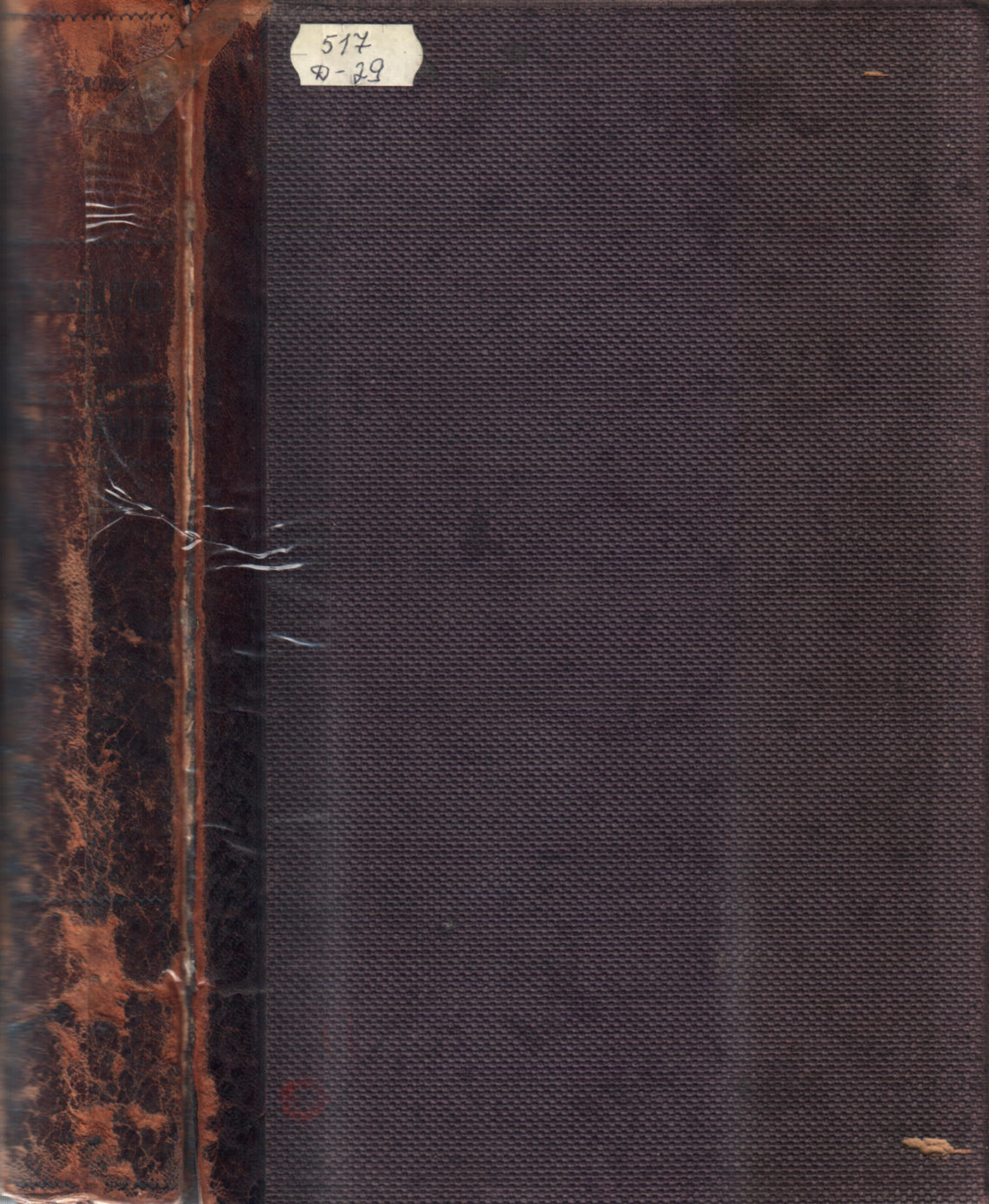
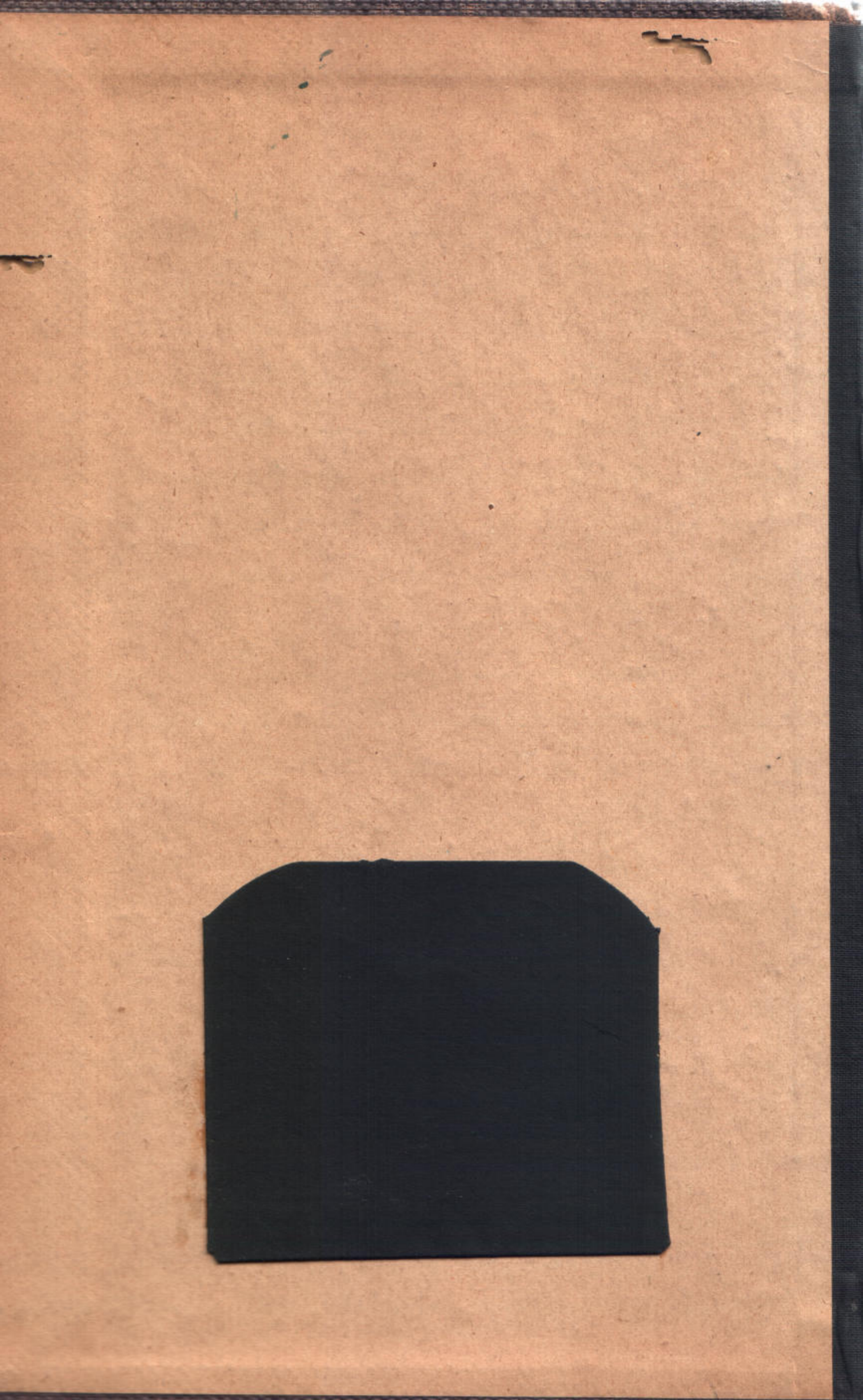
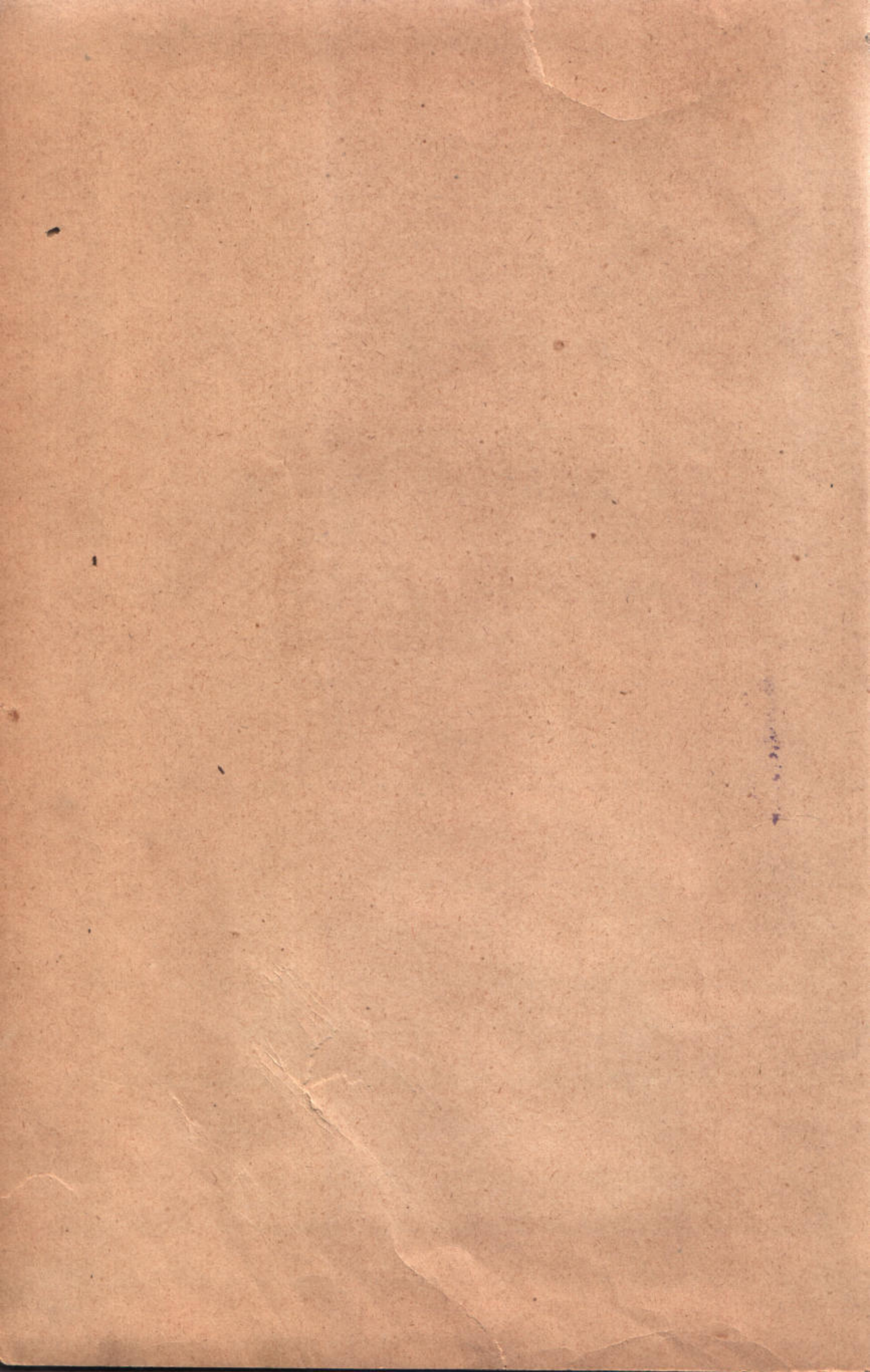

517
Д-29



А Литишковъ



НАЧАЛЬНОЕ РУКОВОДСТВО

КЪ

САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНІЮ

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Н. Б. Делоне,

Ординарный профессоръ Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Съ 321 фигурой въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій пр., № 14.
1900.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 28 Апрѣля 1900 года.

Типографія Ю. Н. Эрлиха. Садовая, 9.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.
ПРЕДИСЛОВІЕ 1
ВВЕДЕНІЕ 5

Часть I.

Основанія Аналитической Геометріи.

ГЛАВА I.

Аналитическая Геометрія на плоскости.

§§ стр.

Пріемы Аналитической Геометріи.

1. Характеръ аналитической геометріи . . . 8
2. Опредѣленіе положенія точки . . . . . —
3. Прямоугольныя прямолинейныя координаты 10
4. Отрицательныя координаты . . . . . . —
5. Обозначенія точекъ . . . . —
6. Опредѣленіе линій уравненіями . . . . . —
7. Уравненіе окружности, описанной изъ начала координатъ радіусомъ R . . . 12
8. Линіи закономѣрныя и незакономѣрныя . —
9. Общій пріемъ нахожденія уравненій закономѣрныхъ линій . . . . —
10. Начертить линію по данному ея уравненію 13

Прямая линія.

11. Уравненіе прямой, проходящей чрезъ начало 14
12. Уравненіе прямой опредѣляемой угломъ наклоненія и отрѣзкомъ, образуемымъ ею на оси ординатъ 15
13. Частные виды уравненія (7) . . . . . —
14. Уравненіе прямой, опредѣляемой отрѣзками, образуемыми ею на осяхъ . . 16
15. Порядокъ уравненія . . . . —
16. Всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ прямую 17
17. Уравненіе прямой, проходящей чрезъ данную точку . . . . —
18. Уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки 18
19. Уравненіе прямой, проходящей на разстояніи p отъ начала 19

§§ стр.

20. Разстояніе между двумя точками 19
21. Координаты точки, раздѣляющей разстояніе между двумя данными точками на двѣ части, относящіяся одна къ другой какъ m къ n 20
22. Координаты средины разстоянія между двумя данными точками . . . . . . —
23. Уголъ, составляемый двумя прямыми . . 21
24. Условіе параллельности двухъ прямыхъ . 22
25. Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ 23
26. Разстояніе точки отъ прямой $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ . . . . . . —
27. Разстояніе точки отъ прямой $Ax + By + C = 0$ 25

Эллипсъ.

28. Опредѣленіе эллипса 26
29. Уравненіе эллипса относительно главныхъ осей его . . . . —
30. Изслѣдованіе вида эллипса по его уравненію 28
31. Діаметры эллипса и его центръ 29
32. Сравненіе эллипса съ окружностью . . . 30
33. Главныя оси эллипса 31
34. Соотношеніе между a, b и c . . . . . —
35. Эксцентриситетъ эллипса 32
36. Геометрическое мѣсто срединъ параллельныхъ хордъ эллипса . . . . —
37. Сопряженные діаметры 34
38. Нахожденіе центра начерченнаго эллипса . —
39. Опредѣленіе главныхъ осей начерченнаго эллипса . . . . —
40. Опредѣленіе фокусовъ начерченнаго эллипса 35
41. Черченіе эллипса помощью нити . . . . —

§§ стр.

Гипербола.

42. Основное свойство гиперболы 36
43. Уравненіе гиперболы относительно главныхъ осей . . . . —
44. Изслѣдованіе вида гиперболы по ея уравненію . . . . —
45. Ассимптоты гиперболы 37
46. Главныя оси гиперболы 38
47. Построеніе ассимптотъ по уравненію гиперболы . . . . —

Парабола.

48. Основное свойство параболы . . . . . —
49. Уравненіе параболы относительно вершины 39
50. Изслѣдованіе вида параболы по ея уравненію . . . . —

Полярныя координаты.

51. Полярныя координаты 40
52. Преобразованіе Декартовыхъ координатъ въ полярныя . . . . —
53. Преобразованіе полярныхъ координатъ въ Декартовы 41
54. Разстояніе точекъ эллипса и гиперболы отъ фокусовъ этихъ кривыхъ 42
55. Полярныя уравненія эллипса, гиперболы и параболы относительно фокуса . . . 43

Преобразованіе координатъ.

56. Необходимость преобразованія однихъ Декартовыхъ координатъ въ другія Декартовы 44
57. Переносъ начала 45
58. Поворотъ осей 46
59. Общее преобразованіе координатъ . . . —
60. Уравненіе равносторонней гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ 47
61. Косоугольныя координаты 48
62. Кривыя втораго порядка . . . . —
63. Уравненія эллипса, параболы и гиперболы относительно вершинъ 49
64. Примѣчаніе 50
65. Первое понятіе о функціи . . . . . . —
66. Кривыя различныхъ порядковъ 51

ГЛАВА II.

Аналитическая Геометрія въ пространствѣ.

67. Опредѣленіе положенія точки прямоугольными координатами 52
68. Поверхность выражается уравненіемъ вида: $f(x, y, z) = 0$ . . . . —
69. Уравненіе сферической поверхности, описанной радіусомъ R изъ начала . . . 53
70. Всякое уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между координатами x, y, z представляетъ собою поверхность . . . . —
71. Представленіе линіи совокупностью двухъ уравненій съ тремя перемѣнными . . 55
72. Представленіе линіи пересѣченіемъ двухъ цилиндровъ 56
73. Понятіе о проэкціяхъ . . . . —
74. Длина проэкціи на плоскость прямолинейнаго отрѣзка 57
75. Длина проэкціи прямолинейнаго отрѣзка на прямую . . . . —
76. Проэкція послѣдней стороны многоугольника 58
77. Преобразованіе координатъ въ пространствѣ 59
78. Перенесеніе начала . . . . —
79. Поворотъ осей 60
80. Общее преобразованіе . . . . —
81. Разстояніе между двумя точками . . . . —
82. Разстояніе точки отъ начала 61
83. Сферическія координаты . . . . —
84. Преобразованіе сферическихъ координатъ въ Декартовы и обратно 62
85. Свойство угловъ, составляемыхъ радіусомъ-векторомъ съ осями координатъ . —
86. Опредѣленіе угла, составляемаго двумя прямыми по даннымъ косинусамъ наклоненія этихъ прямыхъ 63
87. Уравненіе плоскости, проходящей на разстояніи p отъ начала 64

Плоскость и прямая.

88. Всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ въ пространственныхъ координатахъ плоскость 65
89. Уголъ, составляемый двумя плоскостями . —
90. Условіе перпендикулярности двухъ плоскостей 66
91. Условіе параллельности двухъ плоскостей . —
92. Уравненіе плоскости, отсѣкающей на осяхъ отрѣзки a, b, c . . . . —
93. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$ . . 67
94. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ . . —
95. Выраженіе прямой двумя уравненіями . . 68

§§ стр.
96. Уравненіе прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку (x', y', z') . . . . . —
97. Уравненія прямой, проходящей чрезъ точки (x', y', z') и (x'', y'', z'') . . 69
98. Уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x', y', z') и составляющей съ осями углы: α, β, γ 70
99. Уголъ, составляемый двумя прямыми . . 71

Поверхности второго порядка.

100. Гиперболоидъ вращенія объ одной полости . . . . —
101. Прямолинейныя образующія гиперболоида вращенія 72
102. Модель гиперболоида вращенія объ одной полости 73
103. Гиперболоидъ объ одной полости . . . 74
104. Гиперболоидъ вращенія о двухъ полостяхъ 75
105. Трехосный гиперболоидъ о двухъ полостяхъ . . . . —
106. Эллипсоиды вращенія . . . . —
107. Трехосный эллипсоидъ 76
108. Параболоидъ вращенія 77
109. Эллиптическій параболоидъ . . . . . —
110. Гиперболическій параболоидъ . . . . . —
111. Поверхность прямого круглаго конуса . 78
112. Конусы 2-го порядка 79
113. Поверхности 2-го порядка . . . . . . —
114. Коническія сѣченія 80

Часть II.

Основанія анализа безконечно-малыхъ.

ГЛАВА I.

Дифференціальное исчисленіе.

115. Вступленіе 83
116. Производная 85
117. Геометрическое значеніе производной . . 86
118. Примѣръ вычисленія производной . . . 87
119. Увеличивается или уменьшается функція начиная отъ даннаго значенія перемѣнной 88
120. Въ какихъ случаяхъ $f'(x) = 0$ . . . 89
121. Производная постоянной величины . . . 90
122. Различные порядки безконечно-большихъ величинъ . . . . —
123. Различные порядки безконечно малыхъ величинъ . . . . —
124. Основныя теоремы о безконечно малыхъ 91
125. Дифференціалъ 93
126. Простыя функціи 94
127. Производная отъ $(a+x)$ 95
128. Производная отъ $(u+v+w+...)$ . . —
129. Производная отъ ax 96
130. Производная отъ uv . . . . —
131. Производная степени 97
132. $\frac{\sin x}{x}$ . . . . —
133. Производная отъ $\sin x$ 98
134. Производная отъ $\cos x$ . . . . —
135. Производная отъ $\frac{u}{v}$ 99
136. Производная отъ $tg\, x$ . . . . —
137. Производная отъ $\arcsin x$ . . . . . . —
138. Производная отъ $\arccos x$ 100
139. Производная отъ $arctg\, x$ . . . . . —
140. Дифференцированіе сложныхъ функцій . 101
141. Дифференцированіе радикаловъ 102
142. Понятіе о рядахъ 103
143. Признаки сходимости рядовъ 104
144. Примѣръ 105
145. Число e . . . . —
146. Теорема 106
147. Числовая величина e . . . . —
148. Производная отъ логариѳма 107
149. Производная отъ a^x 108
150. Употребленіе логариѳмированія при дифференцированіи нѣкоторыхъ функцій . 109
151. Частныя производныя функціи многихъ перемѣнныхъ . . . . —
152. Полный дифференціалъ 110
153. Производныя сложныхъ функцій . . . 111
154. Производныя неявныхъ функцій . . . —
155. Производныя высшихъ порядковъ . . . 113
156. Замѣна одного независимаго перемѣннаго другимъ 114

Аналитическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

1) Ряды.

157. Рядъ Тайлора для цѣлой раціональной алгебраической функціи 116
158. Рядъ Тайлора для какой-либо $f(x)$. 118

§§ стр.
159. Рядъ Макъ-Лорена 121
160. Разложеніе функціи e^x . . . . —
161. Разложеніе $sin\,x$ . . . . —
162. Разложеніе $cos\,x$ 122
163. Аргументы тригонометрическихъ функцій въ анализѣ . . . . —
164. Разложеніе $lg\,(1+x)$ . . . . . . —
165. Ряды Тайлора и Макъ-Лорена для функцій многихъ перемѣнныхъ 123
166. Формула Эйлера для однородныхъ функцій 124

2) Истинное значеніе величинъ, выраженныхъ въ неопредѣленной формѣ.

167. Величины $\frac{0}{0}$ 125
168. Величины $\frac{\infty}{\infty}$ 127
169. Величины: ∞^0; 1^∞; 0^0; $0 . \infty$ . . . 128

3) Наибольшія и наименьшія значенія функцій.

170. О максимумахъ и минимумахъ функціи одного перемѣннаго . . . . —
171. Способъ нахожденія максимумовъ и минимумовъ 129
172. Максимумы и минимумы функцій многихъ перемѣнныхъ 131

Геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

173. Теорія касательной къ кривой $f(x,y)=0$ 132
174. Уравненіе нормали 133
175. Длина подкасательной . . . . —
176. Длина поднормали 134
177. Длина нормали . . . . —
178. Общность дифференціальныхъ формулъ . —
179. О вогнутости и выпуклости кривыхъ . 135
180. Точки перегиба 136
181. Направленіе элемента кривой . . . . —
182. Элементъ кривой . . . . —
183. Параметры кривой 137
184. Огибающія 138
185. Кривизна кривыхъ 142
186. Величина радіуса кривизны 144
187. Развертки и развертывающія 145
188. По данному уравненію развертывающей найти уравненіе развертки 146
189. Порядокъ соприкосновенія двухъ кривыхъ 148
190. Дифференціалъ дуги въ полярныхъ координатахъ 149
191. Уголъ, составляемый радіусомъ-векторомъ съ касательною 150
192. Выраженіе радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ . . . . —
193. Особыя точки кривыхъ 151
194. Точка возврата 152

§§ стр.
195. Точка остановки 153
196. Угловыя точки . . . . —
197. Кратныя точки 154
198. Отдѣльная точка 155
199. Вліяніе параметровъ 156

Изслѣдованіе свойствъ нѣкоторыхъ кривыхъ.

200. Вступленіе 157
201. Касательная эллипса . . . . —
202. Сопряженные діаметры эллипса . . 158
203. 1-ая теорема Аполлонія 159
204. Разстояніе центра эллипса отъ касательной 160
205. Уголъ φ, составляемый двумя сопряженными діаметрами эллипса . . . . . —
206. 2-ая теорема Аполлонія 161
207. Разстоянія касательной эллипса отъ фокусовъ . . . . —
208. Равенство угловъ, составляемыхъ касательною эллипса съ радіусами-векторами точки касанія 162
209. Радіусъ кривизны эллипса 163
210. Координаты центра кривизны эллипса . —
211. Развертка эллипса 164
212. Касательная гиперболы 165
213. Ассимптоты гиперболы . . . . —
214. Радіусъ кривизны и развертка гиперболы 166
215. Касательная параболы . . . . —
216. Равенство угловъ, составляемыхъ нормалью параболы съ радіусомъ-векторомъ и съ прямыми, параллельными ея оси 167
217. Архимедова спираль 169
218. Логариѳмическая спираль 170
219. Радіусъ кривизны логариѳмической спирали 171
220. Развертка логариѳмической спирали . . 172
221. Гиперболическая спираль 173
222. Циклоида и ея построеніе по точкамъ . 174
223. Уравненіе циклоиды 175
224. Касательная и нормаль циклоиды . . . 176
225. Радіусъ кривизны циклоиды 177
226. Центръ кривизны циклоиды . . . . . —
227. Развертка циклоиды . . . . —
228. Построеніе циклоиды дугами окружностей 178
229. Растянутая и сжатая циклоиды . . . 179
230. Приближенное построеніе длины полуокружности 180
231. Рулетты . . . . —
232. Эпициклоиды и гипоциклоиды 181

Функціи многихъ перемѣнныхъ.

233. Кривыя двоякой кривизны 181
234. Касательная къ кривой 182

§§ стр.
235. Элементъ дуги кривой въ пространствѣ 182
236. Направленіе элемента . . . . —
237. Плоскость нормальная къ кривой . . 183
238. Плоскость, касательная къ поверхности —
239. Нормаль поверхности 185
240. Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями координатъ . . . —

§§ стр.
241. Уравненіе нормали 186
242. Плоскость соприкосновенія . . . . . —
243. Радіусъ кривизны . . . . —
244. Винтовая линія 187
245. Развертывающаяся винтовая поверхность 189
246. Косая винтовая поверхность . . . . . —

ГЛАВА II.

Интегральное исчисленіе.

247. Понятіе объ интегралѣ 189
248. Постоянныя интеграціи 190
249. Неопредѣленный интегралъ . . . . . —
250. Интегралъ какъ сумма безконечно-большаго числа безконечно-малыхъ величинъ 191
251. Опредѣленный интегралъ 192
252. Дифференціалъ площади 193
253. Интегралъ какъ площадь 194
254. Знакъ подстановки 196
255. Основныя формулы интегрированія . . —
256. Интегрированіе по частямъ 199
257. Интегрированіе подстановкою 200
258. Обращеніе къ читателю 202

Интегрированіе дробей.

259. Интегрированіе раціональныхъ дробей въ случаѣ неравныхъ дѣйствительныхъ корней 202
260. Интегрированіе раціональной дроби, если корни неравные, но нѣкоторые изъ нихъ мнимые 206
261. Интегрированіе раціональныхъ дробей въ случаѣ равныхъ корней 210
262. Интегрированіе раціональной дроби въ случаѣ равныхъ мнимыхъ корней . . 211

Интегрированіе функцій, содержащихъ радикалы.

263. Подъ корнями находятся только одночлены 216
264. Подъ радикалами находятся двучлены перваго порядка 217
265. Дифференціалы, заключающіе въ себѣ квадратный корень $\sqrt{a+bx+cx^2}$ —

Интегрированіе бинома.

266. Случаи интегрируемости бинома и его преобразованіе подстановкою $a+bx^n=z$ 220

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

267. Простѣйшій случай 221
268. Интегралы вида $\int z^n P\,dx$ 222
269. $\int sin^m x \cdot cos^n x\,dx$ 223
270. Нѣкоторые наиболѣе употребительные въ приложеніяхъ интегралы 224

Вычисленіе площадей.

271. Площадь параболы 226
272. Площадь эллипса . . . . —
273. Площадь гиперболы 228
274. Площадь циклоиды . . . . —
275. Дифференціалъ сектора въ полярныхъ координатахъ 230
276. Дифференціалъ сектора въ Декартовыхъ координатахъ . . . . —
277. Площадь сектора 231
278. Секторъ логариѳмической спирали . . —

Выпрямленіе дугъ кривыхъ.

279. Общая формула выпрямленія дугъ кривыхъ въ Декартовыхъ координатахъ . 232
280. Выпрямленіе циклоиды . . . . —
281. Выпрямленіе параболы 233
282. Выпрямленіе эллипса 234
283. Общій способъ выпрямленія дугъ въ полярныхъ координатахъ 236
284. Выпрямленіе дуги архимедовой спирали 237

Приблизительное опредѣленіе площадей и точное вычисленіе средняго значенія функцій.

285. Элементарный способъ 237
286. Средняя ариѳметическая ординатъ . . 238
287. Опредѣленіе средняго значенія функціи . —
288. Правило Симпсона 239

Вычисленіе объемовъ помощью простыхъ интеграловъ.

289. Объемы тѣлъ вращенія 241
290. Объемъ тѣла, площади сѣченій котораго параллельными плоскостями извѣстны 242

§§ стр.

Вычисленіе объемовъ тѣлъ помощью двойныхъ интеграловъ.

291. Общія формулы 244
292. Формулы § 291-го съ другой точки зрѣнія 246
293. Многократные интегралы 247

Вычисленіе величины поверхностей.

294. Величина поверхностей вращенія . . . 249
295. Проэкція площади на плоскость . . . 250
296. Вычисленіе площадей поверхностей . . 251

ГЛАВА III.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

297. Опредѣленіе 253
298. Отдѣленіе перемѣнныхъ 254
299. Однородныя уравненія 255
300. Уравненіе $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)+f(x)\,.\,F\left(\frac{y}{x}\right)$ . . 258
301. Уравненіе вида $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ . . . —
302. Условіе интегрируемости полнаго дифференціала 260
303. Интегрирующій множитель 261
304. Интегрирующихъ множителей даннаго уравненія существуетъ безконечное множество 263
305. Геометрическое значеніе дифференціальнаго уравненія и его интеграла . . 265
306. Особый интегралъ 267
307. Линейное уравненіе n-го порядка . . 268
308. Линейныя уравненія безъ 2-го члена . —
309. Линейное уравненіе безъ 2-го члена и съ постоянными коэффиціентами . . 269
310. Замѣчаніе 270

Дифференціальныя уравненія съ частными производными.

311. Образованіе уравненій съ частными производными 271
312. Дифференціальныя уравненія съ частными производными 272
313. Линейное дифференціальное уравненіе 1-го порядка съ частными производными 273
314. Интегрированіе уравненія: $Pp+Qq=R$ 275

Образованіе поверхностей.

315. Замѣчаніе 277
316. Образующія и направляющія 277
317. Цилиндрическія поверхности 278
318. Дифференціальное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей 279
319. Коническія поверхности 280
320. Дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей 281
321. Коноидальныя поверхности . . . . . —
322. Поверхности вращенія . . . . —
323. Развертывающіяся поверхности . . . 282
324. Линейчатыя поверхности 283
325. Дифференціальное уравненіе развертывающейся поверхности . . . . . . —
326. Огибающія поверхности 284
327. Трубчатыя поверхности 286
328. Второй способъ образованія развертывающихся поверхностей . . . . . . —

Кривизна поверхностей и линій, лежащихъ на поверхности.

329. Замѣчаніе 287
330. Индикатриса . . . . —
331. Кривизна нормальныхъ сѣченій . . . 288
332. Закономѣрность распредѣленія кривизны нормальныхъ сѣченій 289
333. Опредѣленіе положенія главныхъ сѣченій 290
334. Опредѣленіе R и R' . . . . —
335. Линіи кривизны 291
336. Кривизна поверхности 292
337. Величина кривизны поверхности . . . 293
338. Раздѣленіе точекъ поверхности на 4 вида 294
339. Аналитическіе признаки точекъ различныхъ видовъ 296
340. Геодезическія линіи 298

Часть III.

Основанія раціональной механики.

Вступленіе.

§§ стр.
341. Опредѣленіе науки 299
342. Науки сходныхъ съ механикою названій —
343. Основные методы изученія природы . . 300
344. Положеніе механики между математикою и опытными науками 300
345. Основные законы Ньютона 301

ГЛАВА I.

Механика точки.

346. Уравненія движенія точки 301
347. Равномѣрно - прямолинейное движеніе точки 302
348. Прямолинейное движеніе съ перемѣнною скоростью 303
349. Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи . 304
350. Разъясненія понятій v и j 305
351. Сила . . . . —
352. Масса 306
353. Движеніе падающей точки . . . . . —
354. Работа 308
355. Живая сила 309
356. Интегралъ живыхъ силъ . . . . . . —
357. Количество движенія 310
358. Движеніе точки, брошенной вверхъ . . —
359. Потенціальная функція 312
360. Законъ сохраненія живой силы . . . —
361. Законъ сохраненія энергіи 313
362. Система точекъ 314

Криволинейное движеніе точки.

363. Скорость въ криволинейномъ движеніи . 314
364. Ускореніе въ криволинейномъ движеніи . 316
365. Движеніе тяжелой точки, брошенной наклонно къ горизонту 317
366. Равномѣрное движеніе точки по окружности 320
367. Общее свойство центральныхъ движеній 322
368. Законъ площадей 323
369. Скорость центральнаго движенія въ полярныхъ координатахъ 324
370. Сила, производящая центральное движеніе 325
371. Законъ площадей характеризуетъ центральное движеніе 326
372. Выводъ закона всемірнаго притяженія изъ движенія планетъ 328

Кеплеровы законы.

373. Элементарный импульсъ силы 329
374. Теорема о количествахъ движенія . . —

Движеніе несвободной точки.

375. Несвободная точка 330
376. Движеніе точки по поверхности . . . —
377. Движеніе точки по линіи 333
378. Начало Д'Аламбера 334
379. Давленіе движущейся точки на поверхность, по которой она движется . . 335

ГЛАВА II.

Механика системы.

Движеніе системы точекъ.

380. Система 335
381. Связи 336
382. Уравненія Лагранжа . . . . —
383. Возможныя перемѣщенія 337
384. Общее уравненіе механики 338
385. Аналитическая механика . . . . . —
386. Потенціальная функція 339
387. Общее уравненіе механики въ случаѣ существованія U 342
388. Центръ инерціи 343
389. Начало движенія центра инерціи . . . 343
390. Начало сохраненія живой силы . . . 346
391. Работа системы 347
392. Интегралъ живыхъ силъ 348
393. Разница понятій «работа» и «мощность» 349
394. Законъ сохраненія энергіи . . . . . —
395. Законъ сохраненія площадей 350
396. Неизмѣняемая плоскость 351
397. Начало возможныхъ перемѣщеній . . . 352

§§ стр.

398. Лагранжевы множители 355
399. Математическій маятникъ 357
400. Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси 360
401. Моментъ инерціи 361
402. Моментъ инерціи параллелепипеда . . 363
403. Сравненіе моментовъ инерціи относительно параллельныхъ осей 365
404. Вращеніе твердаго тѣла около оси . . 366
405. Сложный маятникъ 367
406. Центръ качанія 369
407. Циклоидальный маятникъ 370
408. Брахистохрона . . . . —
409. Равновѣсіе какъ частный случай движенія 371
410. Отдѣлы раціональной механики . . . . —

ГЛАВА III.

Теорія притяженія.

411. Ньютоніанское притяженіе 372
412. Проложенія притяженія на оси координатъ . . . . —
413. Притяженіе, оказываемое шаромъ на внѣшнюю точку 374
414. Притяженіе шаромъ внутренней точки . 376
415. Притяженіе точки, лежащей внутри сферическаго слоя, этимъ слоемъ . . . 377
416. Потенціалъ 378
417. Уравненіе Лапласа 379
418. Уравненіе Пуассона 380
419. Основныя свойства потенціала 382
420. Сила въ данной точкѣ . . . . —
421. Силовыя линіи 383
422. Поверхности уровня . . . . —
423. Случай одной притягивающей точки . —
424. Силовыя трубки 384
425. Силовой потокъ . . . . —
426. Теорема Гаусса . . . . —
427. Свойства силовыхъ трубокъ 386
428. Теорема Остроградскаго 387
429. Теорема Грина 389

ГЛАВА IV.

Гидростатика.

430. Опредѣленіе 391
431. Уравненія равновѣсія жидкости . . . —
432. Условія равновѣсія жидкости 393
433. Поверхности уровня 333
434. Шаръ есть одна изъ формъ равновѣсія свободной жидкости 394

ГЛАВА V.

Гидродинамика.

435. Уравненія гидродинамики 395
436. Уравненія несжимаемости 396
437. Установившееся движеніе 397
438. Теорема Бернулли 398

Часть IV.

Бѣглый обзоръ общаго строя математическихъ наукъ.

ГЛАВА I.

Обзоръ.

439. Вступленіе 399

А. Ариѳметика и Алгебра.

440. Теорія чиселъ 400
441. Высшая Алгебра 402
442. Теорія конечныхъ разностей 403

Б. Анализъ.

443. Общая теорія функцій 404
444. Эллиптическія функціи 404
445. Сферическія функціи 405
446. Варьяціонное исчисленіе 406
447. Группы преобразованій . . . . —

В. Геометрія.

448. Элементарная геометрія и тригонометрія 407

§§ стр.
449. Сферическая тригонометрія 407
450. Аналитическая геометрія 408
451. Геометрія положенія . . . . —
452. Неэвклидова геометрія 410
453. Исчисленіе положеній 411
454. Начертательная геометрія 412
455. Дифференціальная геометрія 414

§§ стр.
456. Теорія вѣроятности 414
457. Аналитическая механика 415
458. Теоретическая механика . . . . . . —
459. Практическая механика 416
460. Математическая физика 417
461. Астрономія . . . . —

ГЛАВА II.

Литература по чистой математикѣ.

462. Теорія чисель 417
463. Высшая алгебра . . . . —
464. Теорія конечныхъ разностей 418
465. Анализъ . . . . —
466. Общая теорія функцій 419
467. Эллиптическія функціи . . . . —
468. Сферическія функціи 420
469. Варьяціонное исчисленіе . . . . . . —
470. Теорія группъ преобразованій . . . . —
471. Сферическая тригонометрія . . . . . —
472. Аналитическая геометрія 420
473. Геометрія положенія 421
474. Высшая геометрія . . . . —
475. Неэвклидовы геометріи . . . . —
476. Многообразія 422
477. Исчисленіе положеній . . . . —
478. Кватерніоны . . . . —
479. Начертательная геометрія . . . . . . —
480. Дифференціальная геометрія . . . . . —
481. Теорія вѣроятнестей . . . . —

Литература по прикладной математикѣ.

482. Аналитическая и теоретическая механика 423
483. Теорія упругости 424
484. Графическая статика . . . . —
485. Сопротивленіе матеріаловъ . . . . . —
486. Гидравлика 425
487. Теорія механизмовъ . . . . —
488. Термодинамика . . . . —
489. Общія сочиненія по практической механикѣ . . . . —

Литература по математической физикѣ.

490. Термодинамика 425
— Электричество . . . . —
490. Оптика 425
— Общаго содержанія книги . . . . . . —

Литература по астрономіи.

491. Сферическая астрономія и поправки . . 427
— Геодезія . . . . —
— Опредѣленіе географическихъ мѣстъ . . —
491. Опредѣленіе орбитъ 427
— Небесная механика . . . . —

Задачи.

Аналитическая Геометрія на плоскости 428
Аналитическая Геометрія въ пространствѣ 433
Дифференціальное исчисленіе 434
Интегральное исчисленіе 440
Интегрированіе уравненій 442
Механика 442

стр

Рѣшенія задачъ 444

Добавленія.

I. О мнимомъ перемѣнномъ 475
II. О вихревомъ движеніи 479
III. Система принятыхъ теперь въ наукѣ единицъ 480
Алфавитный указатель 481

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Математическій методъ, какъ самое вѣрное орудіе человѣческой мысли, усвоивается, мало-по-малу, науками, стоявшими когда-то въ сторонѣ отъ математики. Въ теченіе XIX-го столѣтія завершилось окончательное подчиненіе Астрономіи и Физики математическому анализу. Въ теченіе именно этого заканчивающагося столѣтія Гамильтонъ, при помощи математической теоріи свѣта, предугадалъ явленіе конической рефракціи, существованіе которой нашло впослѣдствіи опытное подтвержденіе; Леверье, имѣя передъ глазами только листы, исписанные формулами, открылъ планету «Нептунъ» и даже не могъ лично приступить къ повѣркѣ своего открытія наблюденіемъ, потому что въ это время Парижское небо было покрыто облаками, такъ что уже другіе астрономы, которыхъ Леверье оповѣстилъ о своемъ открытіи, увидали Нептуна въ свои телескопы. Наконецъ Максвелль, создавъ электромагнитную теорію свѣта, математически узрѣлъ тождество свѣтовыхъ и электрическихъ колебаній, блистательно подтвержденное опытами Герца. Въ рукахъ такихъ ученыхъ, какъ Гамильтонъ, Клаузіусъ, Максвелль, Гельмгольтцъ, Кирхгоффъ и Томсонъ, математика такъ ярко освѣщала путь физикѣ, что и въ другихъ наукахъ появилось стремленіе идти впередъ при ея вѣрномъ свѣтѣ. По всей линіи естественныхъ наукъ, и даже въ наукахъ соціальныхъ, это стремленіе сдѣлалось настолько сильнымъ и подчиненіе математическому анализу настолько быстрымъ, что уже и теперь незнакомый съ высшею математикою химикъ не въ состояніи читать нѣкоторыхъ выдающихся сочиненій по химіи потому только, что они изобилуютъ математическими формулами; и уже не далеко то время, когда въ такомъ же положеніи окажутся натуралистъ, медикъ и даже соціологъ.

Приведу одинъ примѣръ: еще недавно ботаника была совсѣмъ независима отъ математики. Между тѣмъ, въ послѣдніе два года, работы нашихъ извѣстныхъ русскихъ ученыхъ (ботаниковъ К. А. Тимирязева и Е. Ф. Вотчала и математика Н. Е. Жуковскаго) показали, что поднятіе

соковъ въ растеніяхъ происходитъ по закону, выражаемому тѣмъ же самымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, которымъ выражается распространеніе тепла въ твердомъ тѣлѣ.

Молодежь, учащаяся на естественномъ отдѣленіи физико-математическаго факультета, на медицинскомъ факультетѣ и въ высшихъ агрономическихъ заведеніяхъ, какъ только начинаетъ предаваться самостоятельнымъ занятіямъ, все чаще и чаще встрѣчается съ необходимостью усвоенія главнѣйшихъ методовъ высшей математики. Изъ моей педагогической практики въ Ново-Александрійскомъ Институтѣ Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства я могу привести даже такой примѣръ, гдѣ задача по статистикѣ послужила поводомъ къ тому, что студентъ долженъ былъ обратиться къ самостоятельному ознакомленію съ теоріею вѣроятностей и анализомъ, а затѣмъ уже самъ увлекся математикою. Мнѣ приходилось не разъ давать совѣты такимъ молодымъ людямъ относительно избранія кратчайшихъ путей для ознакомленія съ математическими методами и приходилось убѣждаться, что эти кратчайшіе пути еще весьма слабо намѣчены. Встрѣчаются затрудненія даже чисто формальнаго характера: на первыхъ же страницахъ аналитической геометріи человѣкъ встрѣчается съ непонятными для него детерминантами или производною, начинаетъ искать разъясненій въ курсахъ анализа, но эти курсы предполагаютъ уже знакомство съ аналитическою геометріею. Самые курсы написаны для будущихъ математиковъ и инженеровъ и потому представляютъ затрудненія для «читателя со стороны», который однако притянутъ своею же наукою къ необходимости изученія математики. Мнѣ случалось видѣть, что человѣкъ, не привыкшій къ математическимъ отвлеченіямъ и не имѣя еще конкретныхъ представленій о кривыхъ 2-го порядка, запутывался въ общемъ изслѣдованіи этихъ кривыхъ, которое въ лучшихъ курсахъ предпосылается детальному ихъ изученію. Полные курсы не могутъ пойти на уступки въ порядкѣ размѣщенія матеріала, стремясь, для сохраненія стройности, идти отъ общаго къ частному, какъ это и свойственно духу аналитической геометріи, а «посторонній» читатель именно въ этомъ ходѣ изложенія и встрѣчаетъ затрудненія. Цѣль настоящаго руководства и заключается именно въ томъ, чтобы послужить помощью и первымъ путеводителемъ по высшей математикѣ для такихъ «постороннихъ лицъ». Желаніе же автора заключается въ томъ, чтобы «посторонній» читатель сдѣлался мало-по-малу для математики «своимъ», полюбилъ бы эту науку и занялся бы ею серьезнѣе. Для перехода отъ настоящаго руководства къ болѣе серьезному изученію науки я и помѣстилъ, въ части IV-ой, бѣглый обзоръ математическихъ наукъ и литературу.

Здѣсь я считаю непремѣннымъ своимъ долгомъ замѣтить, что и этотъ «бѣглый обзоръ», составляющій I-ую главу IV-й части настоящаго руководства, и приведенная литература не претендуютъ на полноту и точность. Составить стройный обзоръ всей области математическихъ знаній, и дать литературу хотя бы только важнѣйшихъ сочиненій по математикѣ — это дѣло такихъ фундаментальныхъ коллективныхъ трудовъ, составляемыхъ нѣсколькими спеціалистами, какъ математическая Энциклопедія Буркхардта и Мейера. Я слѣдую только правилу: «лучшее не должно быть врагомъ необходимому», и помѣщаю IV-ую часть въ надеждѣ, что и она, при всей ея неполнотѣ, укажетъ читателю пути, по которымъ онъ можетъ идти далѣе. Прошу только видѣть въ IV-ой части настоящаго руководства простое указаніе путей для дальнѣйшаго математическаго самообразованія, и не искать въ ней вѣрной картины или даже абриса всей нашей Науки, а главное — не судить о величинѣ и важности ея отдѣловъ по величинѣ соотвѣтствующаго текста части IV-ой. Нахожу необходимымъ выразиться еще прямѣе: на отдѣлахъ болѣе мнѣ близкихъ я останавливался подробнѣе.

Это замѣчаніе напоминаетъ мнѣ объ обязанности просить снисхожденія у моихъ коллегъ математиковъ, привыкшихъ стремиться къ возможно большей точности и строгости доказательствъ. Въ бесѣдахъ съ начинающими очень трудно держать знамя строгости доказательствъ на той же высотѣ, какъ въ болѣе глубокихъ трактатахъ. Меня, въ этомъ отношеніи, ободряютъ слова Ф. Клейна, который находитъ даже нецѣлесообразнымъ давать начинающимъ такія, выдержанныя въ строгомъ стилѣ, руководства какъ курсы Пикара и Жордана. Въ самой исторіи нашей Науки новыя понятія появлялись не во всеоружіи точности и строгости, подобно Аѳинѣ изъ головы Юпитера, и только постепенно подвергались болѣе глубокой разработкѣ. Начинающій только запутается въ многословіи совершенно строгихъ опредѣленій и доказательствъ.

Съ другой стороны, нельзя также предписывать «постороннему» идти мелкими шагами: на это у него не хватитъ ни времени, ни охоты. Поэтому я рѣшился вести своего читателя быстро и на довольно значительныя высоты. Эта быстрота хода, требуемая самою цѣлью настоящаго руководства, заставила меня, напримѣръ, въ механикѣ не стѣсняться подраздѣленіемъ ея на статику, кинематику и кинетику. Я бы предпочелъ, чтобы мой читатель увидалъ въ анализѣ и механикѣ то единое цѣлое, которое такъ ясно усматривается въ исторіи развитія науки со временъ Ньютона и чтобы механика представилась ему вытекающей изъ законовъ Ньютона. Поэтому я рѣшилъ вести читателя быстро на высоты общихъ теоремъ и уравненій механики, оставляя статику совсѣмъ въ сторонѣ (кромѣ теоріи притяженія);

со статикою читатель и самъ справится, если она представится ему въ сочиненіяхъ по его спеціальности. Моя цѣль была—отучить его отъ боязни интеграловъ и дифференціальныхъ уравненій. Это же послужило причиною болѣе продолжительной остановки на теоріи притяженія по ея аналогіямъ со многими отдѣлами физики и какъ на пути, изобилующемъ многократными интегралами.

Предупреждаю, однако, читателя, что въ настоящемъ руководствѣ изъ механики выбраны только общія ея теоремы и что въ подробныхъ руководствахъ онъ найдетъ цѣлыя области, оставленныя мною въ сторонѣ, и множество конкретныхъ примѣровъ. Гидростатика и гидродинамика мною едва задѣты.

Я буду счастливъ, если замѣчанія моихъ почтенныхъ коллегъ дадутъ мнѣ возможность улучшить современемъ это руководство.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ настоящемъ введеніи мы напомнимъ нѣкоторыя формулы алгебры, геометріи и тригонометріи и познакомимъ читателя съ нѣкоторыми понятіями высшей алгебры.

1) Величина, пропорціональная перемѣнной величинѣ x, можетъ быть представлена въ видѣ произведенія, mx, икса на постоянный множитель m. Дѣйствительно: если x увеличится вдвое, то и mx увеличится вдвое. Вообще, если x увеличится или уменьшится въ a разъ, то и mx увеличится или уменьшится въ a разъ. Постоянная величина m называется въ этомъ случаѣ коэффиціентомъ пропорціональности. Итакъ:

mx = величина пропорціональная перемѣнной величинѣ x.

2) Изъ $n+1$ уравненій можно исключить n заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ.

3) Для опредѣленія n неизвѣстныхъ требуется n уравненій.

4) Квадратное уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ два корня (рѣшенія):

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

5) $$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

6) $$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

7) Намъ понадобится формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3 + \ldots + mab^{m-1} + b^m.$$

8) Дробные показатели: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

9) Отрицательные показатели: $\frac{1}{a} = a^{-1}$; $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$.

10) Величина a есть среднепропорціональная между m и n, если:

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{n}$$

откуда: $a^2 = mn$ или: $a = \sqrt{mn}$.

Итакъ, средне-пропорціональная между m и n равна $\sqrt{mn}$.

11) Теорема Пиѳагора: квадратъ гипотенузы = суммѣ квадратовъ катетовъ.

12) Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу = средне-пропорціональная между отрѣзками гипотенузы.

13) Катетъ = средне-пропорціональная между гипотенузою и прилежащимъ отрѣзкомъ.

14) Тригонометрическія формулы:

$\sin(90 - \varphi) = \cos\varphi$; $\qquad \sin(180 - \varphi) = \sin\varphi$.

$\cos(90 - \varphi) = \sin\varphi$; $\qquad \cos(180 - \varphi) = -\cos\varphi$.

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$; $\qquad tg(90 - \varphi) = cotg\,\varphi = \frac{1}{tg\,\varphi}$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$$

$$tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi \, . \cos\varphi$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}}$$

$$tg(2\varphi) = \frac{2\,tg\,\varphi}{1 - tg^2\varphi}$$

$$tg(a + b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \, . tg\,b}$$

$$tg(a - b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \, . tg\,b}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \, . \cos b + \cos a \, . \sin b.$$

$$\sin(a - b) = \sin a \, . \cos b - \cos a \, . \sin b.$$

$$\cos(a + b) = \cos a \, . \cos b - \sin a \, . \sin b.$$

$$\cos(a - b) = \cos a \, . \cos b + \sin a \, . \sin b.$$

По сторонамъ a, b и углу φ, заключенному между ними, площадь треугольника опредѣляется формулою:

$$\frac{ab \cdot sin\,\varphi}{2}.$$

Если a, b, c суть стороны треугольника, φ уголъ, заключенный между a и b, то:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\varphi.$$

15) Всякое уравненіе m-ой степени можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\ldots(x-k)\,(x-l) = 0,$$

гдѣ a, b, c, $d \ldots k$, l суть корни (рѣшенія) уравненія. Дѣйствительно, когда x равняется одному изъ этихъ корней, то лѣвая часть уравненія обращается въ нуль, и уравненіе такимъ образомъ удовлетворяется. Напримѣръ, при $x = b$, получимъ:

$$(b-a)\,(b-b)\,(b-c)\,(b-d)\ldots(b-k)\,(b-l) = 0$$

или

$$(b-a)\,.\,0\,.\,(b-c)\,.\,(b-d)\ldots(b-k)\,(b-l) = 0.$$

Здѣсь, въ числѣ множителей лѣвой части, находится нуль, слѣдовательно, вся лѣвая часть равна нулю: уравненіе обратилось въ *тождество*.

16) Когда мы пишемъ уравненіе въ такомъ видѣ: лѣвая часть, содержащая x, равна нулю, то мы *требуемъ* такое x, при которомъ лѣвая часть обратилась бы въ нуль. Въ тождествѣ лѣвая часть *сама по себѣ* равна нулю. Напримѣръ, если имѣемъ уравненіе:

$$x - 2 = 0,$$

то мы требуемъ такое x, при которомъ это уравненіе удовлетворилось бы. Такое x будетъ 2, и только при $x = 2$ это уравненіе удовлетворяется. Тождество же всегда удовлетворено, напримѣръ всегда:

$$3^2 - 9 = 0$$

или

$$(a+b)^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 0$$

или

$$x^2 - x\,.\,x = 0.$$

Уравненіе обращается въ тождество, если вмѣсто неизвѣстнаго подставимъ одинъ изъ корней. Напримѣръ уравненіе $x - 2 = 0$ обращается въ тождество $2 - 2 = 0$ если вмѣсто x подставимъ его корень (рѣшеніе) 2.

17) Въ высшей алгебрѣ доказывается, что всякое уравненіе m-ой степени имѣетъ m корней.

18) Выраженіе:

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots . A_{m-1}\,x + A_m$$

называется цѣлою алгебраическою функціею.

Такъ какъ уравненія m-ой степени имѣетъ m корней, то написанная выше цѣлая алгебраическая функція можетъ быть представлена въ видѣ:

$$A_0 (x - a) (x - b) (x - c) \dots (x - k) (x - l).$$

гдѣ a, b, $c \dots$ суть корни уравненія

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + Am = 0.$$

Напримѣръ $x^2 + px + q$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{f} - q}\right)\right] \left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{f} - q}\right)\right].$$

Возьмемъ еще примѣръ: дана алгебраическая функція

$$x^2 - 7x + 10;$$

чтобы представить ее въ видѣ множителей, рѣшимъ уравненіе:

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Получимъ $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Слѣдовательно, данную функцію можно представить въ видѣ:

$$(x - 2) (x - 5).$$

Для того, чтобы провѣрить этотъ выводъ раскроемъ скобки въ послѣднемъ выраженіи; получимъ:

$$x^2 - 2x - 5x + 10$$

или

$$x^2 - 7x + 10$$

именно данная функція.

19) Если уравненіе имѣетъ мнимый корень вида $a + b\sqrt{-1}$, то оно *должно* имѣть и *сопряженный* ему корень $a - b\sqrt{-1}$.

Часть I.

Основанія Аналитической Геометріи.

ГЛАВА I.

Аналитическая Геометрія на плоскости.

Пріемы Аналитической Геометріи.

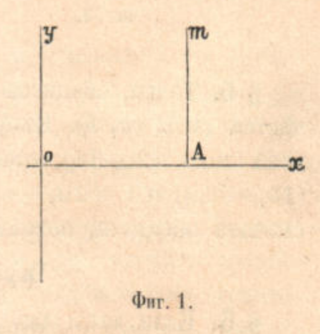
Характеръ Аналитической Геометріи.

§ 1. Алгебраическій способъ примѣняется и въ элементарной геометріи при выводѣ различныхъ геометрическихъ формулъ, но тамъ эти формулы служатъ только для опредѣленія величинъ (длины, площади, объема, угла и проч.), а не положенія или вида линій и поверхностей.

Знаменитый французскій философъ Декартъ (Descartes, по латыни Cartesius), (1596—1650) оказалъ огромную услугу человѣчеству изобрѣтеніемъ Аналитической Геометріи, которая устанавливаетъ такую тѣсную связь между Алгеброю и Геометріею, что всякая линія или поверхность выражается *уравненіемъ*, вполнѣ характеризующимъ всѣ свойства выражаемой имъ геометрической формы (то есть линіи или поверхности).

Опредѣленіе положенія точки.

§ 2. Положеніе точки на плоскости вполнѣ опредѣляется разстояніями этой точки отъ двухъ данныхъ перпендикулярныхъ между собою прямыхъ, если сказано по какую сторону отъ каждой изъ этихъ прямыхъ она находится.



Фиг. 1.

Дѣйствительно, если даны на плоскости (фиг. 1) двѣ перпендикулярныя между собою прямыя ox и oy и сказано, что точка m находится на разстояніи 18 миллиметровъ отъ прямой ox, по ту ея сторону, гдѣ поставлена буква y, и на разстояніи 20 миллиметровъ отъ прямой oy, по ту ея сторону, гдѣ поставлена буква x, то мы найдемъ эту точку, откладывая $OA = 20$ мм., возставляя изъ A къ прямой ox перпендикуляръ и

отloживъ на немъ $Am = 18$ мм. Подобнымъ образомъ опредѣляется положеніе географическихъ мѣстъ по долготѣ, отсчитываемой по экватору и широтѣ, отсчитываемой по меридіану.

Прямоугольныя прямолинейныя координаты.

§ 3. Данныя перпендикулярныя между собою прямыя ox и oy (фиг. 1) называются *осями координатъ*; ox называется *осью абсциссъ*, oy *осью ординатъ.* Пересѣченіе o осей координатъ называется *началомъ.* Разстоянія, отсчитываемыя по оси абсциссъ (какъ въ примѣрѣ § 2-го разстояніе OA) называются *абсциссами.* Разстоянія, отсчитываемыя по перпендикулярамъ къ оси абсциссъ, называются *ординатами.* Абсциссы обозначаются буквою x; ординаты буквою y. Такъ что (фиг. 1) для точки m:

$$OA = x$$

$$Am = y.$$

Величины x и y, соотвѣтствующія точкѣ m, называются *координатами* этой точки.

Линейная единица, которою измѣряются координаты, выбирается произвольно. Въ примѣрѣ § 2-го за линейную единицу принятъ миллиметръ.

Отрицательныя координаты.

§ 4. Абсциссы считаются положительными по одну сторону отъ начала и отрицательными по другую его сторону. Точно также и ординаты считаются положительными по одну сторону оси иксовъ и отрицательными по другую ея сторону. Поэтому, напримѣръ, координаты точки A (фиг. 2) суть:

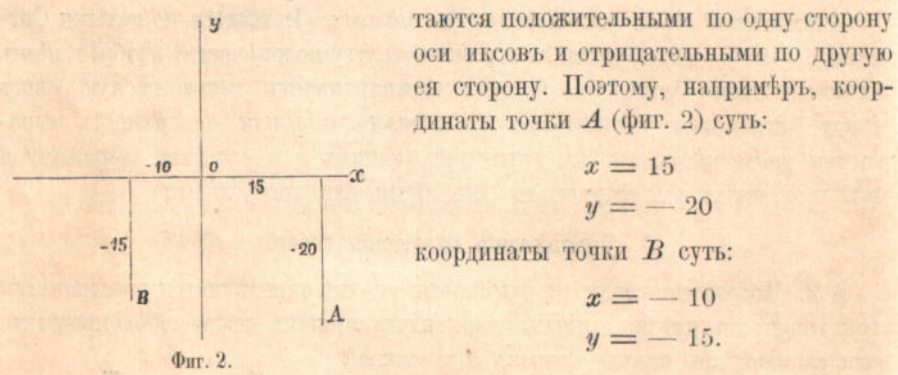
$$x = 15$$

$$y = -20$$

координаты точки B суть:

$$x = -10$$

$$y = -15.$$



Фиг. 2.

Обозначенія точекъ.

§ 5. Точка, абсцисса которой равна a и ордината равна b, обозначается такъ: (a, b). Напримѣръ точка m въ § 2-мъ можетъ быть обозначена такъ (20, 18); точки A и B въ § 4-мъ можно обозначить такъ: (15, — 20) и (— 10, — 15). Въ этомъ обозначеніи: въ скобкахъ ставится сначала абсцисса, потомъ запятая и затѣмъ ордината.

Опредѣленіе линій уравненіями.

§ 6. Если даны два уравненія съ двумя перемѣнными (какъ говорятъ въ элементарной Алгебрѣ «съ двумя неизвѣстными»), то изъ нихъ можно

опредѣлить оба неизвѣстныхъ. Слѣдовательно: если подъ x и y разумѣются координаты точки, то двумя уравненіями съ перемѣнными x и y опредѣляется положеніе точки. Напримѣръ, если даны уравненія:

$$5x + 4y = 23$$
$$3x + y = 11,$$

то получимъ: $x = 3$, $y = 2$. Слѣдовательно, совокупность данныхъ въ этомъ примѣрѣ уравненій опредѣляетъ точку (3, 2).

Посмотримъ теперь, какое значеніе имѣетъ одно уравненіе съ двумя перемѣнными. Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе:

$$ax + by = c.$$

Опредѣляя изъ этого уравненія y чрезъ x, получимъ:

$$y = \frac{c - ax}{b} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Стоящій направо послѣ ряда точекъ знакъ (1) обозначаетъ: *формула первая*; такіе знаки ставятся, чтобы можно было удобнѣе ссылаться на приводимыя формулы.

Каждому значенію x формула (1) даетъ вполнѣ опредѣленное значеніе для y. Напримѣръ:

при $x = 0$ получимъ $y = \frac{c}{b}$

» $x = 1$ » $y = \frac{c - a}{b}$

» $x = 2$ » $y = \frac{c - 2a}{b}$

» $x = \frac{7}{2}$ » $y = \frac{c - \frac{7}{2}a}{b}$

Здѣсь мы измѣняли x скачками: сразу послѣ нуля давали ему значеніе 1, послѣ чего сразу перескакивали на 2, не проходя дробей, заключенныхъ въ промежуткѣ между 1 и 2.

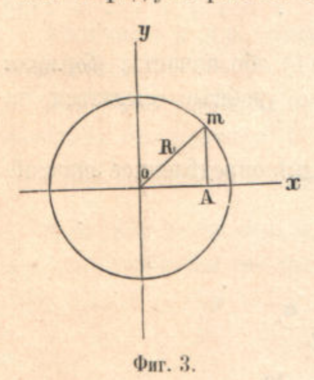
Но если бы x измѣнялось непрерывно, то и y измѣнялось бы непрерывно, и всетаки каждому значенію перемѣннаго x соотвѣтствовало бы опредѣляемое формулою (1) значеніе y; для каждой абсциссы x находилась бы соотвѣтствующая ордината y; каждая такая пара этихъ координатъ опредѣляетъ точку, лежащую въ концѣ ординаты. Но, при непрерывномъ измѣненіи x и y, эта точка очертитъ непрерывную линію. Координаты каждой точки этой линіи непремѣнно будутъ удовлетворять уравненію (1), такъ какъ онѣ изъ него и получаются. Слѣдовательно, уравненіе (1) выражаетъ собою линію, очерченную концомъ ординаты, опредѣляемой изъ уравненія (1) по непрерывно измѣняемымъ значеніямъ x.

Итакъ, если принять перемѣнныя x и y за координаты точки, то *одно уравненіе съ двумя перемѣнными представляетъ собою линію* (прямую или кривую). Два уравненія съ двумя перемѣнными представляютъ собою двѣ линіи. Рѣшая ихъ, получимъ координаты точки пересѣченія этихъ линій, то есть той точки, которая лежитъ какъ на одной изъ этихъ линій, такъ и на другой и координаты которой удовлетворяютъ, слѣдовательно, уравненіямъ обѣихъ линій.

Наоборотъ, если данъ законъ образованія какой-нибудь линіи, то она можетъ быть выражена уравненіемъ съ двумя перемѣнными. Покажемъ это на примѣрѣ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Уравненіе окружности, описанной изъ начала координатъ радіусомъ R.

§ 7. Найдемъ уравненіе окружности, центръ которой находится въ началѣ и радіусъ равенъ R (фиг. 3). Возьмемъ какую-нибудь точку m на этой окружности и опредѣлимъ зависимость между координатами этой точки, основываясь на законѣ образованія окружности. Этотъ законъ состоитъ въ томъ, что всѣ точки окружности лежатъ на одинаковомъ разстояніи R отъ центра. Изъ треугольника OmA видно, что разстояніе точки m отъ начала (которое принято за центръ) опредѣляется по координатамъ x, y формулою (квадратъ гипотенузы):



Фиг. 3.

$$\overline{om}^2 = x^2 + y^2.$$

Всѣ точки окружности находятся на такомъ же разстояніи отъ центра, и дано, что оно равно R. Слѣдовательно, для всѣхъ точекъ окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

это и есть уравненіе данной окружности.

Линіи закономѣрныя и незакономѣрныя.

§ 8. Однако уравненіями могутъ быть съ точностью выражаемы не всякія линіи, а только тѣ, для которыхъ извѣстенъ законъ образованія (основныя геометрическія свойства). Мы будемъ называть такія линіи *закономѣрными*. Линіи же какъ нибудь (произвольно) начерченныя могутъ быть, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, выражены уравненіями лишь съ нѣкоторою степенью приближенія. Геометрія имѣетъ дѣло, главнѣйшимъ образомъ, съ линіями закономѣрными.

Общій пріемъ нахожденія уравненій закономѣрныхъ линій.

§ 9. Общій пріемъ нахожденія уравненія закономѣрной линіи именно таковъ, какой былъ примѣненъ въ § 7-омъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: берутъ (воображаютъ) на заданной линіи произвольную точку и стараются,

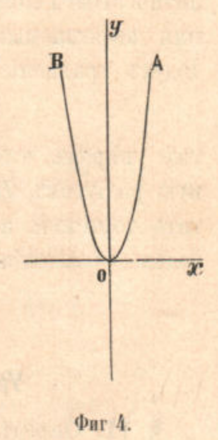
по данному закону образованія этой линіи, найти соотношеніе между ея координатами. Выраженное въ формѣ уравненія, это соотношеніе, будучи справедливымъ для всѣхъ точекъ линіи, и будетъ ея уравненіемъ.

Начертить линію по данному ея уравненію.

§ 10. Покажемъ на примѣрѣ, какъ вычерчивается линія по данному ея уравненію. Начертимъ линію, уравненіе которой таково:

$$y = x^2.$$

Общій пріемъ рѣшенія такой задачи состоитъ въ томъ, что даютъ нѣсколько произвольныхъ значеній одному изъ перемѣнныхъ и опредѣляютъ, по данному уравненію, соотвѣтственныя имъ значенія другого перемѣннаго. Каждая пара такихъ значеній опредѣляетъ точку. По расположенію найденныхъ такимъ путемъ нѣсколькихъ точекъ (чѣмъ больше ихъ найдено, тѣмъ лучше) судятъ о формѣ линіи.



Фиг 4.

Примемъ за линейную единицу миллиметръ (если бы избрали за линейную единицу метръ, то размѣры кривой вышли бы большіе, но форма ея получилась бы та же). Начертимъ (фиг. 4) оси координатъ. Изъ даннаго уравненія $y = x^2$ видимъ, что:

при $x = 0$ ордината $y = 0$
» $x = 1$ » $y = 1$
» $x = 2$ » $y = 4$
» $x = 3$ » $y = 9$
» $x = 4$ » $y = 16$.

Строимъ точки: (0,0); (1,1); (2,4); (3,9); (4,16). Соединяя ихъ прямыми между собою послѣдовательно, мы получили бы ломаную линію, похожую на искомую линію; но лучше соединять точки между собою «на глазъ» или по *лекалу*. Лекаломъ называется пластинка, вырѣзанная узорчато по весьма различнымъ кривымъ и употребляемая какъ линейка. Попытками находятъ такое положеніе лекала, при которомъ три, или болѣе, изъ найденныхъ точекъ находятся у края лекала, и ихъ соединяютъ линіею, ведя у края лекала карандашъ или рейсфедеръ; потомъ слѣдующую группу точекъ соединяютъ съ концомъ уже начерченной части, и такъ далѣе. Въ данномъ случаѣ замѣчаемъ, что значеніе ординаты y не зависитъ отъ знака, стоящаго при x, такъ что: при $x = 3$, ордината $y = 9$, точно такъ же, какъ и при $x = -3$. Слѣдовательно каждой точкѣ вида (a, b) будетъ соотвѣтствовать другая, тоже принадлежащая искомой кривой, точка вида $(-a, b)$. Итакъ, противъ каждой изъ опредѣленныхъ уже точекъ, лежащихъ по одну сторону оси y, будетъ находиться симметричная ей точка по другую сторону оси y. Значитъ искомая линія кромѣ найденной части OA содержитъ еще симметричную ей, относительно оси y, часть OB. Обѣ эти части простираются въ безконечность; потому что,

при безграничномъ увеличенiи x, ордината y, какъ видно изъ даннаго уравненiя, тоже безгранично увеличивается. Вся линiя лежитъ только по одну сторону оси x, потому что y дѣлается отрицательнымъ въ томъ только случаѣ, если x мнимое.

Итакъ, линiя можетъ быть построена по данному уравненiю путемъ нанесенiя на чертежъ отдѣльныхъ ея точекъ, положенiя которыхъ опредѣляются, если давать одному изъ перемѣнныхъ произвольныя значенiя и по нимъ опредѣлять, пользуясь даннымъ уравненiемъ, соотвѣтствующiя значенiя другого перемѣннаго.

Отсюда уже видно, что видъ линiи, а слѣдовательно и всѣ ея геометрическiя свойства, вполнѣ опредѣляются ея уравненiемъ. Занимаясь Аналитическою Геометрiею, нужно прiучить себя видѣть въ уравненiяхъ линiи, ими выражаемыя. Знающiй Аналитическую Геометрiю, какъ только ему дадутъ уравненiе параграфа 7-го:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

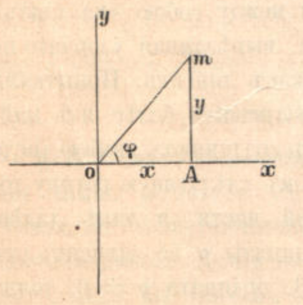
уже увѣренъ, что это уравненiе представляетъ собою окружность, описанную радiусомъ R изъ начала. Настоящiй знатокъ можетъ даже и не чертить чертежей, а рѣшать всѣ геометрическiя задачи, имѣя передъ глазами только уравненiя изслѣдуемыхъ линiй.

Прямая линiя.

Уравненiе прямой, проходящей чрезъ начало.

§ 11. Опредѣлимъ уравненiе прямой, проходящей чрезъ начало координатъ и составляющей уголъ φ съ осью x (осью абсциссъ). Возьмемъ на данной прямой произвольную точку m (фиг. 5) и проведемъ ея ординату Am. Изъ треугольника OAm имѣемъ:

$$y = x \,.\, tg\, \varphi. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$



Фиг. 5.

Это уравненiе вѣрно для координатъ всякой точки данной прямой, и только для точекъ, лежащихъ на этой прямой. Слѣдовательно, это искомое уравненiе прямой.

Отсюда видно, что всякое уравненiе вида:

$$y = kx, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

гдѣ k есть величина постоянная, выражаетъ собою прямую, проходящую чрезъ начало и составляющую съ осью x такой уголъ φ, тангенсъ котораго равенъ k.

Такъ напримѣръ уравненiе:

$$y = x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5$$

которое можно написать и такъ: $y = 1 \,.\, x$ есть уравненiе прямой, проходящей чрезъ начало и составляющей съ осью x уголъ въ 45°, такъ какъ $tg\, 45° = 1$.

Уголъ φ, составляемый прямою съ осью абсциссъ, называется *угломъ наклоненія* прямой.

Уравненіе прямой опредѣляемой угломъ наклоненія и отрѣзкомъ, образуемымъ ею на оси ординатъ.

§ 12. Пусть намъ даны: уголъ наклоненія φ прямой и разстояніе b, на которомъ она (считая отъ начала) пересѣкаетъ ось ординатъ (фиг. 6). Опредѣлимъ уравненіе этой прямой. Возьмемъ на прямой точку m, проведемъ ея ординату Am и проведемъ прямую параллельную оси абсциссъ чрезъ точку B пересѣченія данной прямой съ осью y. Изъ прямоугольнаго треугольника mBd имѣемъ:

$$y - b = x \,.\, tg\,\varphi,$$

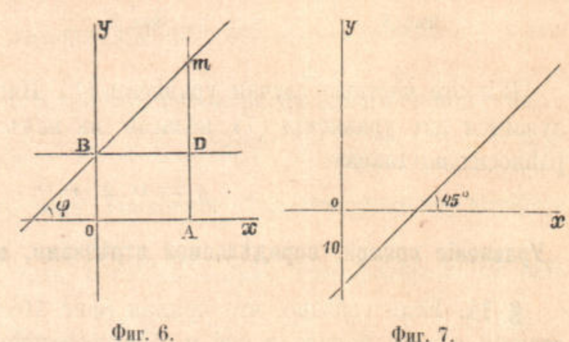
откуда:

$$y = x \,.\, tg\,\varphi + b \,.\,.\,.\; (6)$$

Это и есть искомое уравненіе прямой.

Отсюда видно, что вообще всякое уравненіе вида:

$$y = kx + b \quad .\,.\,.\; (7)$$



Фиг. 6. Фиг. 7.

есть уравненіе прямой, которая пересѣкаетъ ось y на разстояніи b отъ начала и составляетъ съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ k.

Напримѣръ, уравненіе

$$y = x - 10$$

представляетъ собою прямую пересѣкающую (фиг. 7) ось y на разстояніи -10 отъ начала и наклоненную къ оси x подъ угломъ въ $45°$.

Частные виды уравненія (7).

§ 13. Если въ уравненіи (7) положимъ $b = 0$, то оно обратится въ уравненіе (4). Такъ и должно быть, потому что прямая, проходящая чрезъ начало, все равно что прямая, пересѣкающая ось y на разстояніи *нуль* отъ начала.

Если положимъ, въ уравненіи (7), $k = 0$, то получимъ уравненіе

$$y = b \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; (8)$$

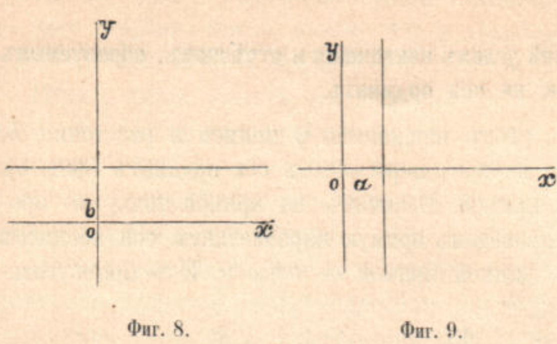
Но k есть тангенсъ угла наклоненія; если тангенсъ $= 0$, то и уголъ $= 0$. Значитъ уравненіе (8) выражаетъ прямую параллельную оси x и отстоящую отъ нея на разстояніи b.

Дѣйствительно, всѣ ординаты такой прямой (фиг. 8) равны одной и той же величинѣ b.

Точно такъ же уравненіе

$$x = a \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; (9)$$

выражаетъ *прямую параллельную оси* y (фиг. 9) и отстоящую отъ нея на разстояніи a.



Фиг. 8. Фиг. 9.

Уравненіе

$$x = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

выражаетъ, слѣдовательно, прямую параллельную оси y и отстоящую отъ нея на разстояніи *нуль*, то есть—*самую ось* y.

Точно такъ же *уравненіе оси* x будетъ:

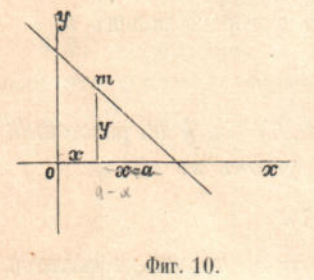
$$y = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (11)$$

Все это частные случаи уравненія (7). Напримѣръ уравненіе (11) получается изъ уравненія (7), полагая въ немъ: $k = b = 0$, то есть оно равносильно такому:

$$y = 0 . x + 0.$$

Уравненіе прямой, опредѣляемой отрѣзками, образуемыми ею на осяхъ.

§ 14. Если сказано, что прямая (фиг. 10) пересѣкаетъ ось x на разстояніи a отъ начала и ось y — на разстояніи b отъ начала, то этимъ прямая вполнѣ опредѣлена. Выведемъ ея уравненіе. Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ:



Фиг. 10.

$$\frac{y}{a - x} = \frac{b}{a},$$

откуда

$$ay = ab - bx.$$

Дѣля все послѣднее уравненіе (всѣ члены его) на ab, получимъ искомое уравненіе въ легко запоминаемой формѣ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (12)$$

Оно можетъ быть написано также въ видѣ:

$$y = -\frac{b}{a} x + b$$

похожемъ на уравненіе (7).

Порядокъ уравненія.

§ 15. *Порядкомъ* одночлена по отношенію къ заключающимся въ немъ перемѣннымъ *называется сумма показателей этихъ перемѣнныхъ.* Такъ напримѣръ одночлены: ax^3, by^3, c^2xy^2, a^2x^2y суть третьяго порядка; одночлены же: ax^2, b^2xy, cy^2 суть второго порядка.

Порядкомъ уравненія называется наивысшій изъ порядковъ его членовъ. Напримѣръ уравненія:

$$Ax + By + C = 0$$
$$Ax = 0$$

суть перваго порядка. Уравненія же:

$$Ax + By^2 + C = 0$$
$$Axy + B = 0$$

суть второго порядка.

Всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ прямую.

§ 16. Докажемъ весьма важную теорему, что *всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ прямую.*

Для этого покажемъ, что уравненіе 1-го порядка самаго общаго вида:

$$Ax + By + C = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

можетъ быть приведено къ виду уравненія (7), относительно котораго извѣстно, что оно выражаетъ прямую.

Уравненіе (13) можетъ быть послѣдовательно преобразовано въ слѣдующія формы:

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагая здѣсь:

$$-\frac{A}{B} = k$$

$$-\frac{C}{B} = b$$

и получимъ уравненіе (7):

$$y = kx + b. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Итакъ, всякое уравненіе 1-го порядка можетъ быть приведено къ виду уравненія (7) и потому выражаетъ прямую.

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ данную точку.

§ 17. Прямая совершенно опредѣлена, если сказано, что она проходитъ чрезъ данную точку (x', y') и составляетъ данный уголъ съ осью x. Вмѣсто второго условія можетъ быть дано, что прямая составляетъ съ осью x такой уголъ, тангенсъ котораго равенъ данной величинѣ k. Найдемъ уравненіе такой прямой. Для этого возьмемъ уравненіе (7)

$$y = kx + b. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Если прямая, выраженная этимъ уравненіемъ, проходитъ чрезъ точку

(x', y'), то координаты x' и y' этой точки должны удовлетворять уравненію (7), такъ что:

$$y' = kx' + b. \qquad (14)$$

Вычитая уравненіе (14) изъ уравненія (7) получимъ:

$$y - y_1 = k(x - x'). \qquad (15)$$

Это и есть искомое уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x', y') и составляющей съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ k.

Здѣсь x, y суть перемѣнныя координаты прямой, величина которыхъ измѣняется съ переходомъ отъ одной точки прямой къ другой ея точкѣ; что же касается x' и y', то они суть постоянныя координаты *данной* точки.

Напримѣръ уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (2,5) и наклоненной къ оси x подъ угломъ 45° (извѣстно что $tg\, 45° = 1$) будетъ:

$$y - 5 = x - 2$$

или

$$x - y + 3 = 0.$$

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

§ 18. Прямая вполнѣ опредѣлена, если сказано, что она проходитъ чрезъ данныя точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Найдемъ уравненіе прямой, заданной такимъ образомъ.

Если прямая проходитъ чрезъ точку (x_1, y_1), то уравненіе ея можно написать согласно § 17-му, въ видѣ

$$y_1 - y = k(x_1 - x). \qquad (16)$$

Если прямая проходитъ чрезъ точку (x_2, y_2), то уравненіе ея можно написать въ видѣ:

$$y_2 - y = k(x_2 - x).$$

Раздѣливъ это уравненіе на (16), получимъ:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}. \qquad (17)$$

Это и есть искомое уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Преобразуемъ его такъ:

$$(y - y_1)(x - x_2) = (y - y_2)(x - x_1)$$

или:

$$xy - xy_1 - x_2y + x_2y_1 = xy - xy_2 - x_1y + x_1y_2,$$

откуда:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} . x + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}. \qquad (18)$$

Сравнивая это уравненіе съ (7), видимъ, что прямая, проходящая чрезъ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), пересѣкаетъ ось y на разстояніи $\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$ отъ начала и составляетъ съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Напримѣръ: уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки $(-2,3)$ и $(1,5)$, будетъ, по формулѣ (18):

$$y = \frac{3-5}{-2-1}x + \frac{-2.5-1.3}{-2-1}$$

или:

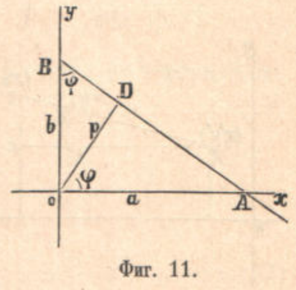
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Эта прямая пересѣкаетъ (§ 12) ось y на разстояніи $\frac{13}{3}$ отъ начала и составляетъ съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{2}{3}$.

Уравненіе прямой, проходящей на разстояніи p отъ начала.

§ 19. Выведемъ уравненіе прямой, про которую извѣстно, что она находится на разстояніи p отъ начала, при чемъ p составляетъ уголъ φ съ осью x. Пусть a и b суть отрѣзки, отсѣкаемые этою прямою (фиг. 11) на осяхъ x и y отъ начала. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ AoD и BoD имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= a \,.\, \cos\varphi \\ p &= b \,.\, \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$



Фиг. 11.

По отрѣзкамъ наша прямая опредѣляется (§ 14) уравненіемъ (12)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Вставляя сюда вмѣсто a и b ихъ величины изъ равенствъ (19), получимъ:

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\varphi}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\varphi}} = 1$$

или:

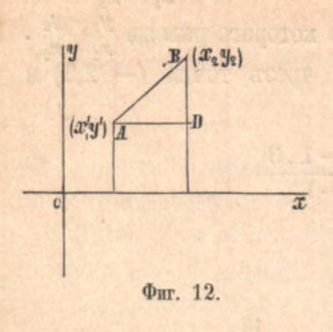
$$x \,.\, \cos\varphi + y \,.\, \sin\varphi - p = 0 \ldots\ldots\ldots (20)$$

Это и есть искомое уравненіе прямой, проходящей на разстояніи p отъ начала.

Разстояніе между двумя точками.

§ 20. Опредѣлимъ разстояніе между двумя точками по заданнымъ координатамъ этихъ точекъ (фиг. 12). Пусть координаты 1-ой точки суть x_1, y_1, координаты второй точки x_2, y_2. Проведемъ чрезъ точку $(x_1\ y_1)$,

параллель къ оси x. Изъ прямоугольнаго треугольника ABD искомое разстояніе δ опредѣлится, какъ гипотенуза по катетамъ, въ видѣ:



Фиг. 12.

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ldots \ldots (21)$$

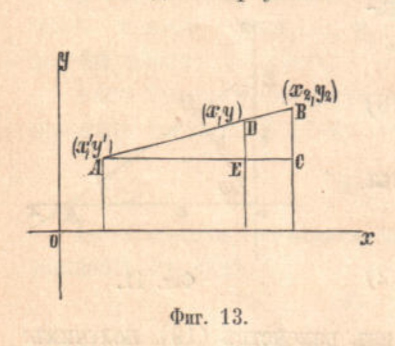
Выражая, что разстояніе точки (x, y) окружности отъ центра, взятаго не въ началѣ, но въ точкѣ (a, b), одинаково и равно радіусу R для всѣхъ точекъ окружности, получимъ уравненіе окружности, описанной радіусомъ R изъ точки (a, b)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Координаты точки, раздѣляющей разстояніе между двумя данными точками на двѣ части, относящіяся одна къ другой какъ m къ n.

§ 21. Пусть намъ даны координаты двухъ точекъ: (x_1, y_1) и (x_2, y_2), требуется найти координаты (фиг. 13) точки (x, y), дѣлящей разстояніе между данными точками на два отрѣзка, которые относились бы одинъ къ другому какъ m къ n.

Изъ подобія треугольниковъ ABC и ADE имѣемъ:



Фиг. 13.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{m + n}$$

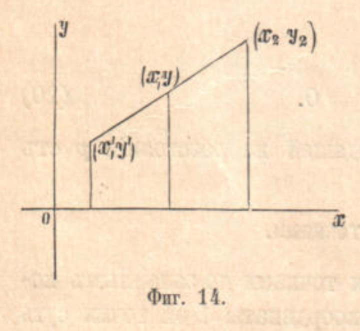
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{m + n};$$

откуда:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \ldots \ldots (22)$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \ldots \ldots (23)$$

Координаты средины разстоянія между двумя данными точками.



Фиг. 14.

§ 22. Если точка D дѣлитъ разстояніе AB (фиг. 14) пополамъ, то въ формулахъ (22) и (23) нужно положить: $m = n$, и тогда для координатъ точки D получимъ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \ldots \ldots (24)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \ldots \ldots (25)$$

Эти формулы показываютъ, что *координаты средины разстоянія между*

двумя данными точками суть ариѳметическія среднія *) *отъ координатъ данныхъ точекъ.*

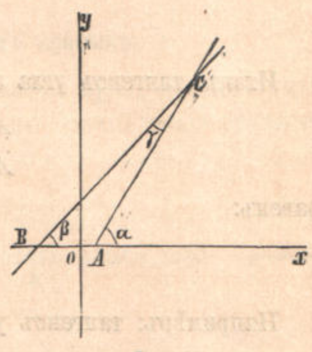
Уголъ, составляемый двумя прямыми.

§ 23. Если даны двѣ прямыя уравненіями

$$y = kx + b$$
$$y = k'x + b',$$

то легко найти тангенсъ угла, заключеннаго между ними. А именно, мы знаемъ (§ 12), что k и k' суть тангенсы угловъ наклоненія данныхъ прямыхъ (фиг. 15) къ оси x, такъ что:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = k \\ tg\,\beta = k' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$



Фиг. 15.

Кромѣ того, уголъ α есть внѣшній уголъ треугольника ABC и потому:

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

откуда

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Итакъ:

$$tg\,\gamma = tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

вставляя сюда вмѣсто $tg\,\alpha$ и $tg\,\beta$ величины k и k' (согласно формуламъ (26)), получимъ:

$$tg\,\gamma = \frac{k - k'}{1 + kk'}.$$

Итакъ: *тангенсъ угла, составляемаго прямыми*

$$\left.\begin{array}{l} y = kx + b \\ y = k'x + b' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

равенъ:

$$\frac{k - k'}{1 + kk'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Если прямыя были бы даны уравненіями:

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

то ихъ можно было бы привести къ виду:

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B} \\[2ex] y = -\dfrac{A'}{B'}x - \dfrac{C'}{B'} \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

*) Ариѳметическою среднею величинъ a и b называется величина $\frac{a+b}{2}$.

сходному съ видомъ уравненій (27). Слѣдовательно, тангенсъ угла, составляемаго прямыми (31), такъ же составляется изъ величинъ: $-\frac{A}{B}$ и $-\frac{A'}{B}$ (коэффиціентовъ при x) какъ формула (28) составлена изъ k и k' (коэффиціентовъ при x уравненій 27). Слѣдовательно, тангенсъ этого угла равенъ

$$\frac{-\frac{A}{B}-\left(-\frac{A'}{B'}\right)}{1+\frac{AA'}{BB'}},$$

или

$$\frac{A'B-AB'}{AA'+BB'}.$$

Итакъ: тангенсъ угла заключеннаго между прямыми:

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ A_1x+B_1y+C_1=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

равенъ:

$$\frac{A'B-AB'}{AA'+BB'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Напримѣръ: тангенсъ угла заключеннаго между прямыми

$$3x+5y+2=0$$
$$4x+y-5=0$$

равенъ:

$$\frac{4.5-3.1}{3.4+5.1}=\frac{17}{17}=1.$$

Слѣдовательно, эти прямыя составляютъ уголъ въ 45°, такъ какъ $tg\,45°=1$.

Условіе параллельности двухъ прямыхъ.

§ 24. Если числитель выраженія (28) равенъ нулю, но знаменатель не равенъ нулю, то это выраженіе, а слѣдовательно опредѣляемый имъ тангенсъ и уголъ между прямыми (27) равенъ нулю, то есть эти прямыя взаимно параллельны. Итакъ: условіе параллельности прямыхъ:

$$y=kx+b$$
$$y=k'x+b'$$

таково:

$$k=k' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Прилагая такія же разсужденія къ выраженію (33), находимъ, что условіе параллельности прямыхъ:

$$Ax+By+C=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

таково:

$$A'B = AB'$$

или

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (35)$$

Напримѣръ прямыя:

$$32x + 80y - 15 = 0$$
$$8x + 20y + 61 = 0$$

взаимно параллельны, потому что:

$$\frac{32}{8} = \frac{80}{20} = 4.$$

Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ.

§ 25. Если знаменатель выраженія (28) равенъ нулю, то самое это выраженіе и опредѣляемый имъ тангенсъ угла, заключеннаго между прямыми

$$y = kx + b$$
$$y = k_1x + b_1,$$

равны безконечности, а слѣдовательно самый этотъ уголъ есть прямой. Итакъ: условіе перпендикулярности прямыхъ:

$$y = kx + b$$
$$y = k'x + b'$$

таково:

$$1 + kk' = 0$$

или

$$k' = -\frac{1}{k} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (36)$$

Прилагая такія же разсужденія къ выраженію (33), находимъ, что условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ:

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

таково

$$AA' + BB' = 0. \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (37)$$

Напримѣръ прямыя:

$$6x + 5y - 13 = 0$$
$$10x - 12y - 17 = 0$$

перпендикулярны между собою, потому что:

$$6 \, . \, 10 - 5 \, . \, 12 = 0.$$

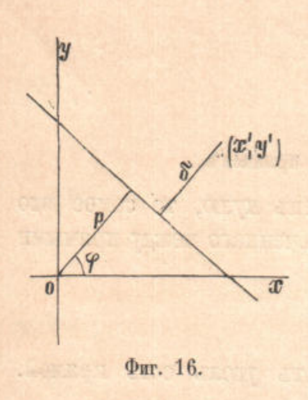
Разстояніе точки отъ прямой $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$.

§ 26. Опредѣлимъ разстояніе точки (x_1, y_1) отъ прямой, выраженной уравненіемъ:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0, \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (20)$$

найденнымъ въ § 19-мъ. Здѣсь, какъ мы видѣли въ § 19-мъ, p есть разстояніе данной прямой отъ начала координатъ, φ уголъ, составляемый съ осью x перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала на нашу прямую.

Планъ рѣшенія нашей задачи таковъ: 1) найдемъ уравненіе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки (x_1, y_1) на данную прямую, выраженную уравненіемъ (20). Затѣмъ 2) рѣшая уравненіе этого перпендикуляра совмѣстно съ уравненіемъ (20), найдемъ (см. конецъ § 6-го) координаты основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ (x_1, y_1) на данную прямую. Наконецъ: 3) по координатамъ этого основанія и по координатамъ (x_1, y_1) данной точки найдемъ, пользуясь формулою (21), величину δ перпендикуляра, опущеннаго изъ (x_1, y_1) на данную прямую — то-есть искомое разстояніе точки (x_1, y_1) отъ этой прямой.



Фиг. 16.

1) Уравненіе перпендикуляра, опущеннаго изъ (x_1, y_1) на прямую (20), напишемъ по формулѣ (15), пользуясь тѣмъ, что уголъ наклоненія этого перпендикуляра къ оси x равенъ φ, то-есть углу наклоненія p къ оси x (фиг. 16):

$$y - y_1 = (x - x_1)\, tg\, \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

2) Рѣшимъ это уравненіе съ уравненіемъ данной прямой:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Получимъ по исключеніи y:

$$x \cos \varphi + y_1 \sin \varphi + (x - x_1)\, tg\, \varphi \, . \sin \varphi - p = 0,$$

откуда:

$$x \cos \varphi + x\, tg\, \varphi \, . \sin \varphi = p + x_1\, tg\, \varphi \, . \sin \varphi - y_1 \sin \varphi.$$

Помножая всѣ члены послѣдняго уравненія на $\cos \varphi$, имѣемъ:

$$x (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = p \cos \varphi + x_1 \sin^2 \varphi - y_1 \sin \varphi \, . \cos \varphi$$

или

$$x = p \cos \varphi + x_1 \sin^2 \varphi - y_1 \sin \varphi \, . \cos \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Подставляя эту величину x въ (38), получимъ:

$$y = y_1 + p \, . \cos \varphi \, . \, tg\, \varphi + x_1 \sin^2 \varphi \, . \, tg\, \varphi - y_1 \sin \varphi \, . \cos \varphi \, . \, tg\, \varphi - x_1\, tg\, \varphi$$

или

$$y = p \, . \sin \varphi + x_1\, tg\, \varphi\, (\sin^2 \varphi - 1) + y_1 (1 - \sin^2 \varphi)$$

или

$$y = p \sin \varphi - x_1 \sin \varphi \, . \cos \varphi + y_1 \cos^2 \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Формулы (39) и (40) даютъ выраженія координатъ (x, y) основанія перпендикуляра опущеннаго изъ (x_1, y_1) на данную прямую.

3) По координатамъ (x, y), опредѣляемымъ формулами (39) и (40) и по координатамъ x_1, y_1 данной точки составляемъ, пользуясь формулою:

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

выраженіе для искомаго разстоянія δ.

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}.$$

Вставляя сюда вмѣсто x и y ихъ величины изъ (39) и (40), получимъ:

$$\delta = \sqrt{(x_1 - p\cos\varphi - x_1 \sin^2\varphi + y_1 \sin\varphi . \cos\varphi)^2 + (y_1 - p\sin\varphi + x_1 \sin\varphi . \cos\varphi - y_1 \cos^2\varphi)}$$

или

$$\delta = \sqrt{(x_1 \cos^2\varphi + y_1 \sin\varphi . \cos\varphi - p\cos\varphi)^2 + (x_1 \sin\varphi . \cos\varphi + y_1 \sin^2\varphi - p\sin\varphi)^2}$$

или

$$\delta = \sqrt{(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p)^2 \cos^2\varphi + (x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p)^2 \sin^2\varphi}.$$

При радикалѣ беремъ знакъ $+$ потому, что разстояніе считаемъ всегда положительнымъ (не обращаемъ вниманія на его направленіе). Координаты опредѣляютъ и направленіе, поэтому берутся съ соотвѣтствующими знаками. Разстояніе же разсматривается только съ точки зрѣнія своей величины:

$$\delta = \sqrt{(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p)^2 \ (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}$$

Припоминая, что: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, получимъ наконецъ:

$$\delta = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Сравнивая это выраженіе съ уравненіемъ (20) данной прямой, можемъ сказать, что: чтобы получить разстояніе точки (x_1, y_1) отъ прямой

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0,$$

достаточно замѣнить въ уравненіи этой прямой, перемѣнныя координаты x, y постоянными координатами (x_1, y_1) данной точки.

Разстояніе точки отъ прямой $Ax + By + C = 0$.

§ 27. Чтобы получить формулу для разстоянія точки (x_1, y_1) отъ прямой, выраженной общимъ уравненіемъ:

$$Ax + By + C = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

сравнимъ это уравненіе съ (20). Коэффиціенты при x и y уравненія (20) таковы, что сумма ихъ квадратовъ $(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$ равна 1. Чтобы привести уравненіе (42) къ такому виду, при которомъ его коэффиціенты имѣли бы такое свойство, необходимо и достаточно всѣ члены уравненія (42) раздѣлить на $\sqrt{A^2 + B_2}$. Дѣйствительно тогда получимъ уравненіе

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

въ которомъ тоже сумма квадратовъ коэффиціентовъ

$$\left(\frac{A^2}{A^2+B^2}+\frac{B^2}{A^2+B^2}\right) \text{ равна } 1.$$

Уравненіе (43) будетъ тожественно съ (20) если положить:

$$\cos\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad \sin\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad p=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\quad . \; . \; (44)$$

Искомое выраженіе разстоянія δ отъ прямой (42) получится слѣдовательно, если въ формулу (41) подставимъ вмѣсто $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, p величины, опредѣляемыя равенствами (44). Получимъ:

$$\delta=\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

Итакъ: *чтобы получить разстояніе точки* (x_1, y_1) *отъ прямой* $Ax+By+C=0$ *нужно въ это уравненіе прямой подставить, вмѣсто перемѣнныхъ координатъ* (x, y), *координаты* x_1, y_1 *данной точки и полученное выраженіе раздѣлить на* $\sqrt{A^2+B^2}$.

Напримѣръ: разстояніе точки $(-3, 5)$ отъ прямой

$$2x+7y-20=0$$

будетъ:

$$\delta=\frac{2.(-3)+7.5-20}{\sqrt{2^2+7^2}}$$

или

$$\delta=\frac{9}{\sqrt{53}}.$$

Эллипсъ.

Опредѣленіе эллипса.

§ 28. Въ особенности ярко выступаетъ пригодность Аналитической Геометріи при изслѣдованіи кривыхъ линій *) опредѣляемыхъ ихъ характеристическими свойствами.

Займемся изслѣдованіемъ свойствъ кривой, основное свойство которой заключается въ томъ, что: *сумма разстояній каждой ея точки отъ двухъ данныхъ точекъ* F и F' *есть величина постоянная*. Такая кривая называется *эллипсомъ*. Точки F и F' называются его *фокусами*.

Уравненіе эллипса относительно главныхъ осей его.

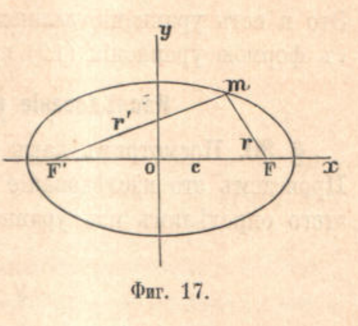
§ 29. Выведемъ прежде всего уравненіе эллипса въ предположеніи, что фокусы его F и F' расположены (фиг. 17) на оси x по обѣ стороны

---

*) Впослѣдствіи мы будемъ ихъ называть просто *кривыми*.

отъ начала въ равныхъ отъ него разстояніяхъ. Пусть m есть какая-нибудь точка эллипса, r и r'—ея разстоянія отъ F и F' (радіусы векторы). По опредѣленію эллипса, данному въ предыдущемъ параграфѣ, $r+r'$ одинаково для всѣхъ точекъ эллипса. Назовемъ постоянную величину этой суммы чрезъ s, такъ что:

$$r + r' = s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (46)$$



Фиг. 17.

Мы получимъ уравненіе эллипса, если вмѣсто r и r' вставимъ въ (46) ихъ выраженіе чрезъ координаты (x, y) точки m, потому что тогда получимъ соотношеніе между x и y годное для всѣхъ точекъ эллипса.

Пусть $OF = c$; $OF' = -c$. Координаты фокуса F будутъ, слѣдовательно: (c, o); координаты фокуса F' будутъ $(-c, o)$. По формулѣ (21) параграфа 20-го имѣемъ:

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Вставляя эти величины въ (46), имѣемъ:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = s$$

или

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left[\, s - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\right]^2$$

откуда

$$(x-c)^2 + y^2 = s^2 - 2s\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

или

$$\left[2s\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\right]^2 = \left[s^2 + 4cx\right]^2$$

откуда

$$4s^2\left[(x+c)^2 + y^2\right] = s^4 + 8s^2cx + 16c^2x^2$$

или

$$4s^2x^2 + 8s^2cx + 4s^2c^2 + 4s^2y^2 = s^4 + 8s^2cx + 16c^2x^2.$$

Положимъ, для удобства: $s = 2a$, получимъ:

$$16a^2x^2 + 16a^2c^2 + 16a^2y^2 = 16a^4 + 16c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2),$$

называя $a^2 - c^2$ чрезъ b^2, полагая слѣдовательно:

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (47)$$

получимъ:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Дѣля всѣ члены этого уравненія на a^2b^2, получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad \dots\dots\dots\dots (48)$$

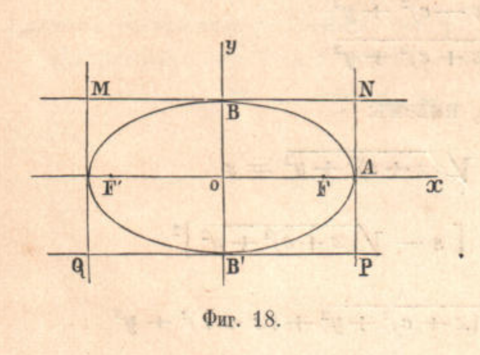
Это и есть уравненіе эллипса въ формѣ, легко запоминаемой и сходной съ формою уравненія (12) прямой линіи.

Изслѣдованіе вида эллипса по его уравненію.

§ 30. Посмотримъ, какъ опредѣлить видъ эллипса по уравненію (48). Проведемъ это изслѣдованіе сначала общимъ способомъ (см. § 10). Для этого опредѣлимъ изъ уравненія (48) ординату y. Получимъ:

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \dots\dots\dots\dots (49)$$

При $x=0$ получаемъ изъ этой формулы $y=\pm b$. Слѣдовательно, точки (o, b), $(o, -b)$ принадлежитъ эллипсу. Это суть точки B и B' (фиг. 18), лежащія на оси y по обѣ стороны начала на разстояніяхъ b отъ него. Вообще знакъ $\pm$ въ формулѣ (49) показываетъ, что каждой положительной ординатѣ эллипса соотвѣтствуетъ, равная ей по абсолютной величинѣ, отрицательная ордината. Другими словами, эллипсъ симметриченъ относительно оси x. Поэтому достаточно изслѣдовать формулу (49) только со знакомъ $+$ и опредѣлить (этимъ самымъ) видъ той части эллипса, которая лежитъ по одну сторону оси x, въ области положительныхъ ординатъ, а затѣмъ присоединить къ этой части другую симметричную ей относительно оси x.



Фиг. 18.

Итакъ, займемся изслѣдованіемъ формулы:

$$y=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \dots\dots\dots\dots (50)$$

Придавая здѣсь перемѣнному x послѣдовательно значенія, возрастающія отъ нуля, видимъ, что y будетъ все уменьшаться и наконецъ, при $x=a$, ордината y обратится въ o, потому что тогда:

$$y=+b\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2}}=0.$$

Слѣдовательно, эллипсу принадлежитъ точка (a, o), расположенная на оси x въ разстояніи a отъ начала. На фиг. 18 эта точка обозначена буквою A.

При дальнѣйшемъ увеличеніи перемѣннаго x формула (50) будетъ да-

вать для y мнимыя значенія, потому что, при $x > a$, подъ знакомъ радикала будутъ получаться отрицательныя количества. Слѣдовательно: эллипсъ не простирается въ сторону положительныхъ y далѣе прямой MN проведенной чрезъ B параллельно оси y.

Если опредѣлимъ x изъ уравненія (48), то получимъ:

$$x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Эта формула показываетъ, что эллипсъ симметриченъ и относительно оси y и что далѣе параллелей, проведенныхъ къ оси y на разстояніяхъ a отъ нея, эллипсъ не простирается. Итакъ: весь эллипсъ заключается въ прямоугольникѣ $MNPQ$ (фиг. 18), и уже многое выяснилось относительно его вида.

Еслибы мы задались какими-нибудь числовыми величинами *параметровъ* a и b въ уравненіи (48), то, поступая по указанному въ § 10-мъ опредѣлили бы достаточное число точекъ, которыя дали бы намъ возможность начертить всю фигуру эллипса изображеннаго на (фиг. 18).

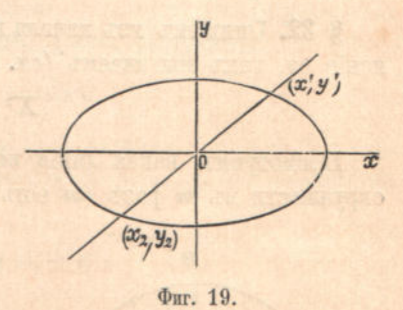
Но слѣдующіе два параграфа научатъ насъ лучше судить о видѣ эллипса чѣмъ самый чертежъ, изображающій только, такъ сказать, опредѣленную особь изо всей породы эллипсовъ.

Діаметры эллипса и его центръ.

§ 31. Опредѣлимъ разстояніе отъ начала 0 точекъ пересѣченія эллипса съ прямою

$$y = kx, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (51)$$

проведенною чрезъ начало (фиг. 19).



Фиг. 19.

Для этого опредѣлимъ сперва (пользуясь сказаннымъ въ § 6) координаты этихъ точекъ пересѣченія, рѣшая совмѣстно (уравненія (48) и (51). Получимъ, по исключеніи y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2}{b^2} = 1$$

откуда

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}} = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}} = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}}.$$

Имѣемъ, слѣдовательно, два значенія для абсциссы искомыхъ точекъ пересѣченія:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= +\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}} \\ x_2 &= -\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (52)$$

Вставляя эти величины, вмѣсто x, послѣдовательно въ уравненіе (51), получимъ для y тоже два значенія:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= +\frac{kab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}} \\ y_2 &= -\frac{kab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Слѣдовательно, получаются двѣ точки пересѣченія (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Разстояніе первой точки отъ начала будетъ:

$$\sqrt{(x_1 - o)^2 + (y_1 - o)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} + \frac{k^2a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}} = ab\sqrt{\frac{1 + k^2}{b^2 + a^2k^2}}.$$

Разстояніе 2-ой точки отъ начала будетъ:

$$\sqrt{(x_2 - o)^2 + (y_2 - o)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} + \frac{k^2a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}} = ab\sqrt{\frac{1 + k^2}{b^2 + a^2k^2}}. \quad (54)$$

Для обоихъ разстояній получается одна и та же величина. Итакъ: всѣ хорды эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходящія чрезъ начало координатъ, дѣлятся этимъ началомъ пополамъ.

Слѣдовательно, эллипсъ имѣетъ *центръ*. Хорды, проходящія чрезъ центръ, называются *діаметрами* эллипса.

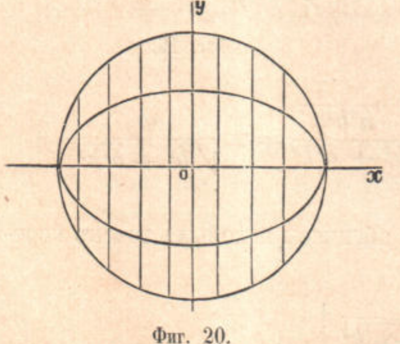
Сравненіе эллипса съ окружностью.

§ 32. Опишемъ изъ начала координатъ окружность радіусомъ R. Уравненіе ея, какъ мы знаемъ (см. § 7), будетъ

$$X^2 + Y^2 = R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

Посмотримъ, какая линія получится, если уменьшимъ всѣ ординаты окружности въ m разъ (m есть какое-нибудь цѣлое число). Назовемъ координаты точекъ этой искомой линіи чрезъ x, y. Согласно предположенію

$$\left.\begin{aligned} X &= x \\ Y &= my. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (56)$$



Фиг. 20.

Вставляя вмѣсто X и Y въ уравненіе (55) величины, опредѣляемыя уравненіями (56), получимъ уравненіе искомой линіи:

$$x^2 + m^2y^2 = R^2; \quad \ldots (57)$$

потому что, если X, Y удовлетворяютъ уравненію (55), то x, y должны удовлетворять уравненію (57), а между тѣмъ x, y суть координаты искомой линіи; слѣдовательно, (57) есть уравненіе этой линіи. Докажемъ, что она

представляетъ собою эллипсъ. Раздѣлимъ всѣ члены уравненія (57) на m^2R^2. Получимъ:

$$\frac{x^2}{m^2R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

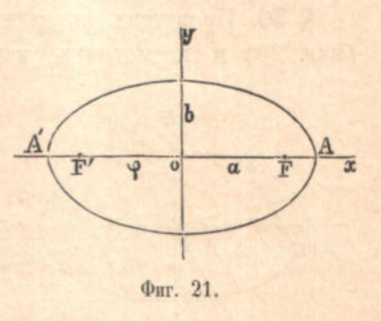
Это есть уравненіе эллипса (48), въ которомъ $a = mR$; $b = R$, какъ видно изъ сравненія уравненій (48) и (58).

Итакъ, эллипсъ получается изъ окружности, если всѣ ея ординаты уменьшить въ одинаковое число разъ (фиг. 20).

Главныя оси эллипса.

§ 33. Діаметръ AA', проходящій чрезъ фокусы, называется *большою осью* эллипса. Его половина OA называется (фиг. 21) *большою полуосью.* Величина большой полуоси есть абсцисса точки пересѣченія эллипса (48) съ осью x; поэтому она опредѣлится изъ уравненія (48), полагая въ немъ: $y = 0$. Получимъ

$$x = a = \text{большая полуось.}$$



Фиг. 21.

Діаметръ BB', перпендикулярный къ большой оси, называется *малою осью* эллипса. Его половина OB называется *малою полуосью.* Величина малой полуоси есть ордината точки пересѣченія эллипса съ осью y; поэтому она опредѣлится изъ уравненія (48) если положить въ немъ: $x = 0$. Получимъ:

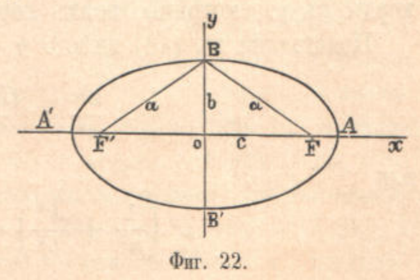
$$y = b = \text{малая полуось.}$$

Итакъ: параметры a и b въ уравненіи (48) эллипса суть его большая и малая полуоси. Концы A, A', B, B' полуосей называются вершинами эллипса.

Соотношеніе между a, b и c.

§ 34. Представивъ формулу (47) параграфа 29-го въ видѣ:

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$



Фиг. 22.

и зная, что *фокальное разстояніе* c (разстояніе OF отъ центра до фокуса) откладывается по оси x, тогда какъ малая полуось b — по оси y, замѣчаемъ, по теоремѣ Пиѳагора, что разстоянія вершины B отъ фокусовъ равны a (фи.г 22), такъ что:

$$BF = BF' = \sqrt{b^2 + c^2} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Эксцентриситетъ эллипса.

§ 35. Отношеніе $\frac{c}{a}$ фокальнаго разстоянія къ большой полуоси называется *эксцентриситетомъ* эллипса и обозначается буквою e. Изъ этого опредѣленія и формулы (59) заключаемъ, что:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Чѣмъ болѣе удлиненную форму имѣетъ эллипсъ, тѣмъ болѣе его эксцентриситетъ.

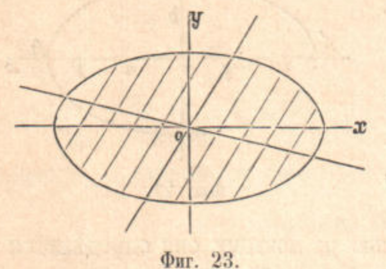
Геометрическое мѣсто рединъ параллельныхъ хордъ эллипса.

§ 36. Проведемъ въ эллипсѣ рядъ параллельныхъ другъ другу хордъ (фиг. 23) и посмотримъ, каково будетъ геометрическое мѣсто срединъ этихъ хордъ. Рѣшимъ задачу эту аналитически, то есть формулами. Возьмемъ уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots (48)$$

и пусть уравненіе какой нибудь изъ разсматриваемыхъ хордъ будетъ

$$y = kx + \beta \ldots\ldots (62)$$



Фиг. 23.

Замѣтимъ, что, благодаря взаимной параллельности разсматриваемыхъ хордъ, величины k въ ихъ уравненіяхъ будутъ одинаковы для всѣхъ хордъ, и только величины β будутъ различны. Планъ рѣшенія задачи будетъ таковъ: нахожденіе точекъ пересѣченія хорды (62) съ эллипсомъ (48), состоящее въ совмѣстномъ рѣшеніи ихъ уравненій; опредѣленіе координатъ средины разстоянія между этими точками; переходъ отъ разсмотрѣнія одной хорды къ разсмотрѣнію всѣхъ хордъ, параллельныхъ съ нею.

Подставляя въ (48) вмѣсто y его величину изъ (62), имѣемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + \beta)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) + \frac{2\beta k}{b^2}x + \frac{\beta^2}{b^2} = 1,$$

откуда:

$$x = \frac{\beta k}{b^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 k^2}{b^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)^2} - \frac{\beta^2 - b^2}{b^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)}}.$$

Назовемъ, для краткости, стоящій здѣсь радикалъ чрезъ N и положимъ:

$$\frac{k}{b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)}=M. \quad \ldots\ldots\ldots (63)$$

Тогда получимъ для x формулу:

$$x=M\beta\pm N.$$

Подставляя эту величину вмѣсто x въ (62), получимъ:

$$y=(kM+1)\,\beta\pm kN.$$

Итакъ координаты одного изъ концовъ хорды будутъ:

$$x_1=M\beta+N$$
$$y_1=(kM+1)\,\beta+kN.$$

Координаты же другого конца хорды будутъ:

$$x_2=M\beta-N$$
$$y_2=(kM+1)\,\beta-kN.$$

Зная координаты концовъ, получимъ по формуламъ (24) и (25) координаты средины въ видѣ:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=M\beta \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=(kM+1)\,\beta. \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

Дѣля послѣднія уравненія (64) и (65) одно на другое, получимъ:

$$\frac{y}{x}=\frac{kM+1}{M} \quad \ldots\ldots\ldots (66)$$

Здѣсь уже не содержится величины β, такъ какъ она не заключается въ величинѣ M, опредѣляемой формулою (63). А такъ какъ именно только величиною β и отличаются уравненія разсматриваемыхъ взаимно-параллельныхъ хордъ одно отъ другого, то уравненіе (66) справедливо для координатъ средины каждой изъ разсматриваемыхъ хордъ. Слѣдовательно, (66) и есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста срединъ взаимно-параллельныхъ хордъ. Для всѣхъ взаимно-параллельныхъ хордъ величина k одинакова (тангенсъ ихъ угла наклоненія къ оси x). Итакъ k—постоянное. M тоже постоянное, какъ видно изъ (63). Слѣдовательно, уравненіе (66) содержитъ во второй своей части постоянную величину $\frac{kM+1}{M}$. Назовемъ ее чрезъ A; тогда уравненіе (66) искомаго геометрическаго

мѣста можно представить такъ:

$$\frac{y}{x} = A,$$

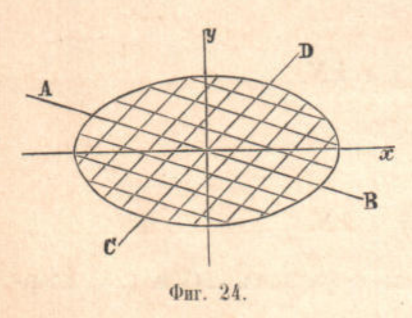
или

$$y = Ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Сравнивая это уравненіе съ (4) убѣждаемся, что *въ эллипсѣ геометрическое мѣсто рединъ взаимно-параллельныхъ хордъ есть прямая, проходящая чрезъ центръ.* Другими словами: *средины взаимно-параллельныхъ хордъ лежатъ на діаметрѣ.*

Сопряженные діаметры.

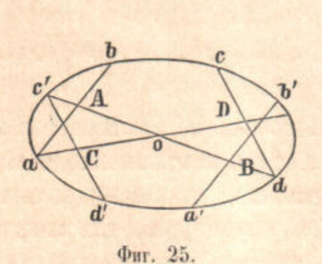
§ 37. Діаметръ AB (фиг. 24), дѣлящій пополамъ цѣлое семейство взаимно-параллельныхъ хордъ, называется *сопряженнымъ*, по отношенію къ этимъ хордамъ. Одна изъ хордъ этого семейства проходитъ чрезъ центръ и потому есть тоже діаметръ CD, и этимъ діаметромъ CD, какъ проходящимъ чрезъ центръ, діаметръ AB, а слѣдовательно и всѣ хорды параллельныя съ AB, дѣлятся пополамъ. *Такіе два діаметра AB и CD, изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, называются сопряженными.* Діаметръ сопряженный большой оси есть малая ось, какъ это можно заключить изъ симметріи эллипса относительно его осей.



Фиг. 24.

Нахожденіе центра начерченнаго эллипса.

§ 38. Свойство сопряженныхъ діаметровъ даетъ возможность опредѣлить центръ эллипса, контуръ котораго начерченъ, слѣдующимъ образомъ (фиг. 25). Пересѣкаемъ эллипсъ двумя какими-нибудь взаимно-параллельными прямыми ab и $a'b'$. Дѣлимъ полученныя хорды пополамъ и, соединяя средины этихъ хордъ прямою AB, получаемъ діаметръ сопряженный хордамъ ab и $a'b'$. Точно такъ же поступаемъ съ двумя другими произвольно взятыми, но взаимно-параллельными, хордами cd и $c'd'$. Получаемъ сопряженный этимъ хордамъ діаметръ CD. Точка o пересѣченія діаметровъ AB и CD и будетъ искомый центръ.

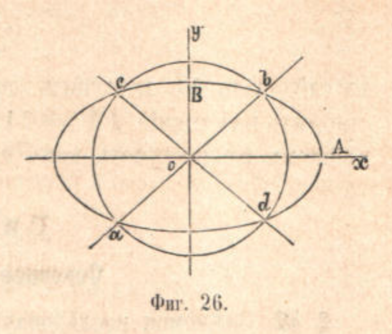


Фиг. 25.

Опредѣленіе главныхъ осей начерченнаго эллипса.

§ 39. Когда центръ o эллипса уже опредѣленъ указаннымъ въ § 38 способомъ, или какъ-нибудь иначе, то, для опредѣленія главныхъ осей,

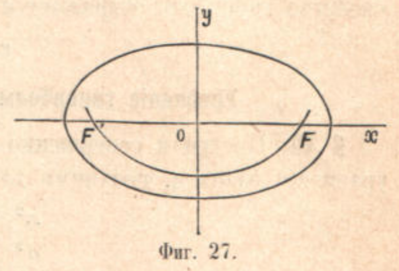
описываемъ изъ центра окружность какимъ-нибудь такимъ радіусомъ, который былъ бы болѣе малой полуоси и меньше большой полуоси. Такая окружность пересѣчетъ (фиг. 26) эллипсъ въ четырехъ точкахъ. Соединимъ крестъ на крестъ эти точки прямыми *аъ* и *cд*. Дѣля смежные углы, образуемые этими прямыми, пополамъ, получимъ направленія главныхъ осей. OA и OB будутъ главныя полуоси. Это построеніе основано на симметріи, относительно главныхъ осей, фигуры, состоящей изъ эллипса и построенной окружности.



Фиг. 26.

Опредѣленіе фокусовъ начерченнаго эллипса.

§ 40. Опредѣливъ центръ даннаго эллипса и главныя оси, можно найти его фокусы, пользуясь тѣмъ, что (см. § 34) разстоянія фокусовъ отъ концовъ малой оси равны большой полуоси. Описываемъ (фиг. 27) изъ конца малой оси окружность радіусомъ равнымъ большой полуоси OA. Точки пересѣченія F и F' этой окружности съ большою осью AA' и будутъ фокусами эллипса.



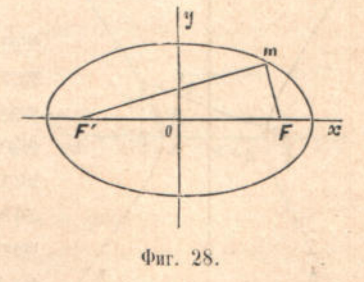
Фиг. 27.

Черченіе эллипса помощью нити.

§ 41. Основное свойство эллипса (§ 28),

$$r + r' = 2a,$$

по которому сумма разстояній каждой его точки отъ фокусовъ есть величина постоянная, равная большой оси, даетъ возможность чертить эллипсъ по даннымъ фокусамъ и большой оси, слѣдующимъ способомъ: отмѣчаемъ (фиг. 28) точками фокусы F и F' на чертежѣ. Втыкаемъ въ эти точки булавки, на одну изъ которыхъ надѣваемъ глухою петлею нить. Обматываемъ другой конецъ нити около другой булавки такъ, чтобы часть нити, остающаяся между булавками, имѣла длину $2a$ большой оси. Оттягиваемъ остріемъ карандаша m нить въ такое положеніе FmF', чтобы части Fm и $F'm$ были натянуты. Не ослабляя этой натянутости ведемъ по бумагѣ карандашъ, который и опишетъ эллипсъ, потому что такимъ образомъ соблюдается условіе $r + r' = 2a$.



Фиг. 28.

Если бы даны были не фокусы и большая ось, но уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то слѣдовало бы поступить такъ. На произвольно взятой прямой линіи отложить разстояніе $FF' = 2\sqrt{a^2 - b^2}$, какъ это видно изъ (47): въ дальнѣйшемъ же поступать какъ и прежде.

Гипербола.

Основное свойство гиперболы.

§ 42. Займемся изслѣдованіемъ кривой, основное свойство которой заключается въ слѣдующемъ: *разность разстояній всякой точки кривой отъ двухъ данныхъ точекъ, называемыхъ фокусами, есть величина постоянная.* Такая кривая называется *гиперболою.* Называя разстоянія какой-нибудь точки гиперболы отъ фокусовъ чрезъ r и r' замѣчаемъ, что основное свойство гиперболы выражается равенствомъ

$$r - r' = s. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Уравненіе гиперболы относительно главныхъ осей.

§ 43. Поступая совершенно такъ же, какъ при выводѣ въ § 29-омъ уравненія эллипса, получимъ для гиперболы уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

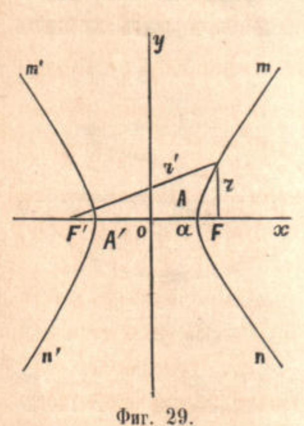
весьма сходное съ уравненіемъ эллипса. Только здѣсь фокусное разстояніе

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Изслѣдованіе вида гиперболы по ея уравненію.

§ 44. Опредѣлимъ изъ (69) y

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$



Фиг. 29.

Изъ этой формулы мы видимъ, во первыхъ, что гипербола симметрична относительно оси x, потому что, благодаря знаку $\pm$, каждому положительному y соотвѣтствуетъ, равное ему по абсолютной величинѣ, отрицательное y. Затѣмъ видимъ, что для всѣхъ x меньшихъ чѣмъ a, величина, стоящая подъ радикаломъ, дѣлается отрицательною, и слѣдовательно y мнимое для всѣхъ x меньшихъ чѣмъ a. Значитъ (фиг. 29), въ части плоскости, ограниченной прямыми параллельными оси y и отстоящими на разстояніи a и $(-a)$ отъ оси y, гипербола не имѣетъ точекъ.

Съ увеличенiемъ x въ формулѣ (70) y безпредѣльно увеличивается.

Если бы наконецъ мы остановились на какихъ-нибудь числовыхъ величинахъ параметровъ a и b, то могли бы опредѣлить (см. § 10) сколько угодно точекъ гиперболы и увидали бы, что она имѣетъ видъ, изображенный на фиг. 29-ой. А именно, гипербола состоитъ изъ двухъ *вѣтвей* mAn и $m'A'n'$, при чемъ каждая вѣтвь уходитъ двумя своими концами въ безконечность, такъ что на чертежѣ можно изобразить только часть гиперболы.

Ассимптоты гиперболы.

§ 45. Опредѣлимъ абсциссу точекъ пересѣченiя гиперболы съ прямою

$$y = x\,tg\,\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

проходящею чрезъ начало координатъ и составляющею (см. § 11) уголъ p съ осью x (фиг. 30). Для этого исключимъ y изъ (70) и (71). Подставляя въ (70), вмѣсто y, его величину изъ (71), получимъ:

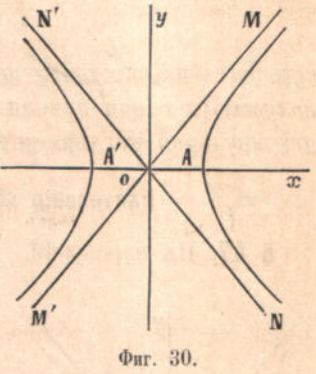
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2\,tg^2\,\varphi}{b^2} = 1,$$

или

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{tg^2\,\varphi}{b^2}\right) = 1,$$

откуда:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{tg^2\,\varphi}{b^2}}} \quad . \; . \; . \quad (72)$$



Фиг. 30.

величина $\frac{1}{a^2} - \frac{tg^2\,\varphi}{b^2}$, стоящая здѣсь подъ радикаломъ, обращается въ нуль если $\frac{1}{a^2} = \frac{tg^2\,\varphi}{b^2}$, то есть при $tg\,\varphi = \pm\frac{b}{a}$; и тогда x обращается въ безконечность. Значитъ прямыя, проведенныя изъ начала подъ углами, тангенсы которыхъ суть $+\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, встрѣчаютъ гиперболу въ безконечности. Эти прямыя MM' и NN' (фиг. 30) называются *ассимптотами*. При дальнѣйшемъ увеличенiи $tg\,\varphi$, величина $\frac{1}{a^2} - \frac{tg^2\,\varphi}{b^2}$, стоящая подъ радикаломъ въ формулѣ (72), дѣлается отрицательною, слѣдовательно, x дѣлается мнимымъ; значитъ внѣ угловъ MoN и $M'oN'$ гипербола не имѣетъ точекъ.

Итакъ, существуютъ для каждой гиперболы такiя двѣ проходящiя чрезъ ея центръ o прямыя, называемыя ассимптотами, которыя встрѣчаютъ гиперболу въ безконечно-удаленныхъ точкахъ. Обѣ вѣтви гиперболы распространяются въ противуположныхъ углахъ образованныхъ ассимптотами. Впослѣдствiи (§ 221) мы докажемъ, что ассимптоты касаются къ гиперболѣ въ безконечности. Углы наклоненiя ассимптотъ къ оси x опредѣ-

ляются (см. выше) равенствомъ

$$tg\,\varphi + \pm \frac{b}{a}\cdot$$

Главныя оси гиперболы.

§ 46. Прямая, на которой расположены фокусы гиперболы, пересѣкаетъ ее въ точкахъ A и A' (фиг. 30), называемыхъ *вершинами* гиперболы. Разстоянія отъ центра до вершинъ OA и OA' называются *дѣйствительными полуосями* гиперболы. Величина дѣйствительной полуоси гиперболы, выраженной уравненіемъ (69), равна a, какъ это можно вывести изъ этого уравненія, опредѣляя абсциссы точекъ пересѣченія гиперболы съ осью x, то есть опредѣляя x въ предположеніи, что $y = 0$.

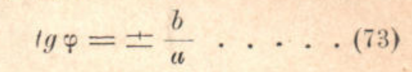
Итакъ, одинъ изъ двухъ параметровъ a и b гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

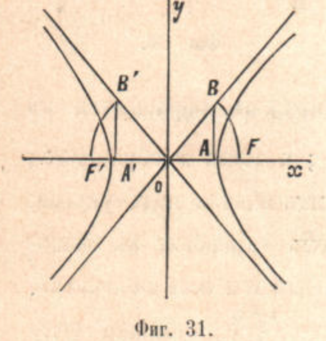
есть ея дѣйствительная полуось. Другой параметръ b называется *мнимою полуосью* и самая прямая PQ, проведенная чрезъ центръ гиперболы перпендикулярно къ дѣйствительной оси, называется мнимою осью гиперболы.

Построеніе ассимптотъ по уравненію гиперболы.

§ 47. Въ параграфѣ 45-омъ мы видѣли, что уголъ φ, составляемый ассимптотою гиперболы съ осью x опредѣляется уравненіемъ



$$tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (73)$$



Фиг. 31.

Если изъ вершинъ гиперболы возставимъ перпендикуляры къ дѣйствительной оси (фиг. 31) *и на нихъ отложимъ величину мнимой полуоси b, то, соединяя полученныя точки прямыми съ центромъ O гиперболы, получимъ ассимптоты*, потому что построенныя такимъ образомъ прямыя образуютъ, какъ видно изъ треугольниковъ OAB и $OA'B'$ съ осью x, углы тангенсъ которыхъ удовлетворяютъ уравненію (73).

Парабола.

Основное свойство параболы.

§ 48. Займемся изслѣдованіемъ кривой, основное свойство которой заключается въ слѣдующемъ: *разстояніе каждой точки кривой отъ нѣкоторой точки, называемой фокусомъ, равно разстоянію той же точки кри-*

вой отъ нѣкоторой прямой, называемой директрисою (фиг. 32), такъ что:

$$mF = ma$$

$$m_1F = m_1a_1$$

$$m_2F = m_2a_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

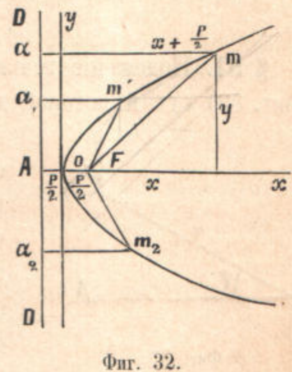
Такая кривая называется *параболою.*

Уравненіе параболы относительно вершины.

§ 49. Выведемъ уравненіе параболы изъ ея основнаго свойства (фиг. 32). Пусть разстояніе отъ фокуса F до директрисы DD будетъ $AF = p$.

Примемъ прямую AF за ось x. На ней будетъ находиться точка O, принадлежащая параболѣ, въ разстояніи $\frac{p}{2}$ отъ фокуса и отъ директрисы, потому что всякая точка, находящаяся въ равныхъ разстояніяхъ отъ фокуса и отъ директрисы, принадлежитъ параболѣ. Примемъ эту точку O за начало координатъ. Пусть координаты какой-нибудь точки m параболы будутъ (x, y). Изъ чертежа видно, что

$$am = \frac{p}{2} + x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$



Фиг. 32.

Координаты фокуса F будутъ $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, и слѣдовательно по формулѣ (21)

$$Fm = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

По основному свойству параболы $am = Fm$, или, вслѣдствіе равенствъ (74) и (75)

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

возвышая обѣ части этого уравненія въ квадратѣ, получимъ

$$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

или

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Это и есть искомое уравненіе параболы. Оно содержитъ одну постоянную величину (параметръ) p равную разстоянію фокуса отъ директрисы.

Изслѣдованіе вида параболы по ея уравненію.

§ 50. Изъ (76) имѣемъ

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

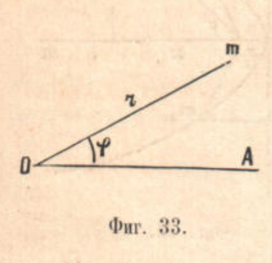
Эта формула показываетъ, что съ увеличиваніемъ x безпредѣльно увеличивается и y, что парабола симметрична относительно оси x и, наконецъ, что вся она лежитъ по одну сторону оси y, такъ какъ при отрицательныхъ значеніяхъ x (и положительномъ p) для y получаются мнимыя величины. Если бы p было отрицательно, то положительныя значенія x давали бы мнимое y.

Если бы мы остановились на какомъ-либо числовомъ значеніи p, то могли бы опредѣлить сколько угодно точекъ параболы (см. § 10) и замѣтили бы, что она имѣетъ видъ, представленный на фиг. (32) *).

Полярныя координаты.

Полярныя координаты.

§ 51. Положеніе точки можно опредѣлять также разстояніемъ r точки (фиг. 33) отъ нѣкоторой данной на плоскости точки O, называемой *полюсомъ* и угломъ (φ), составляемымъ прямою *от* съ нѣкоторою данною на плоскости прямою OA, называемою *полярною осью.* Разстояніе r называется *радіусомъ-векторомъ* точки *m*. Уголъ φ и радіусъ векторъ r называются полярными координатами точки. Точку, имѣющую *полярный уголъ* φ и радіусъ векторъ r, будемъ обозначать такъ: (φ, r).

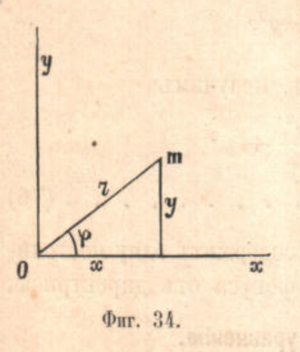


Фиг. 33.

Подобно тому какъ въ Декартовыхъ координатахъ уравненіе, заключающее перемѣнныя x, y, изображаетъ линію, точно такъ же и въ полярныхъ координатахъ: уравненіе, содержащее перемѣнныя φ и r, изображаетъ нѣкоторую (прямую или кривую) линію.

Преобразованіе Декартовыхъ координатъ въ полярныя.

§ 52. Не трудно найти соотношенія, существующія между Декартовыми координатами точки и ея полярными координатами, если въ послѣднихъ полюсъ совпадаетъ съ началомъ Декартовыхъ координатъ, а полярная ось—съ осью x. Дѣйствительно, изъ чертежа (фиг. 34) видно, что



Фиг. 34.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

Эти формулы служатъ для преобразованія уравненій, выраженныхъ въ Декартовыхъ координатахъ, въ уравненія, выраженныя въ координатахъ полярныхъ, для чего достаточно въ первыхъ замѣнить x и y ихъ

*) См. задачу 53.

величинами, опредѣляемыми изъ (77). Напримѣръ, уравненіе прямой $Ax+By+C=0$ выразится въ полярныхъ координатахъ такъ: $Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C = 0$ или:

$$r = \frac{-C}{A\cos\varphi + B\sin\varphi}.$$

Преобразованіе полярныхъ координатъ въ Декартовы.

§ 53. Иногда нужно бываетъ, наоборотъ, перейти отъ полярныхъ координатъ къ Декартовымъ. Найдемъ формулы для такого перехода. Дѣля второе изъ уравненій (77) на первое, получимъ:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Возвышая уравненія (77) почленно въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

откуда:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

Здѣсь передъ радикаломъ удерживаемъ $+$, считая r всегда положительнымъ. Формулы (78) и (79) служатъ для перехода отъ полярныхъ координатъ къ Декартовымъ.

Примѣръ. Преобразовать къ Декартовымъ координатамъ уравненіе

$$r = \frac{-C}{A\cos\varphi + B\sin\varphi},$$

найденное въ предыдущемъ параграфѣ.

По формуламъ тригонометріи имѣемъ: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$; $\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$. Подставляя эти величины въ заданное уравненіе, получимъ:

$$r = \frac{-C\sqrt{1+tg^2\varphi}}{A + B\,tg\,\varphi},$$

вставляя сюда вмѣсто r и $tg\,\varphi$ ихъ выраженія изъ (78) и (79), имѣемъ:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{-C\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}{A + B\frac{y}{x}},$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{-C\sqrt{x^2+y^2}}{Ax+By},$$

или

$$1 = \frac{-C}{Ax+By},$$

или наконецъ: $Ax + By + C = 0$, какъ и слѣдовало ожидать, потому что мы шли въ этой задачѣ путемъ прямо противуположнымъ задачѣ предыдущаго параграфа.

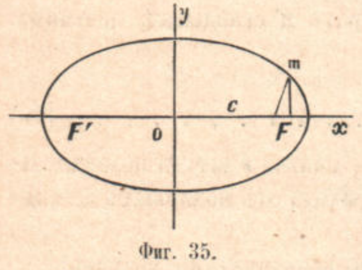
Полярныя координаты позволятъ намъ познакомиться съ уравненіями эллипса, параболы и гиперболы, весьма часто употребляемыми въ Астрономіи, и вообще полярныя координаты иногда удобнѣе Декартовыхъ. Но прежде выведемъ еще нѣкоторыя замѣчательныя формулы.

Разстояніе точекъ эллипса и гиперболы отъ фокусовъ этихъ кривыхъ.

§ 54. Пусть (x, y) суть координаты точки, лежащей на эллипсѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Координаты фокуса F (фиг. 35) суть $(C, 0)$, гдѣ $C = \sqrt{a^2 - b^2}$ (см. ур. (47)). Квадратъ разстоянія точки (x, y) отъ F будетъ, слѣдовательно, по формулѣ (21):



Фиг. 35.

$$r^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \quad . \; . \; . \; (80)$$

Изъ уравненія эллипса имѣемъ:

$$y^2 = \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2}.$$

Вставляя эту величину вмѣсто y^2 въ (80), получимъ:

$$r^2 = x^2 + \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2} - 2cx + c^2,$$

или:

$$r^2 = x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + b^2 - 2cx + c^2 = x^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2 - 2cx + c^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2.$$

Припоминая выраженіе (61) эксцентриситета, получимъ:

$$r^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2 = (a - ex)^2$$

или

$$r = a - ex. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (81)$$

Разстояніе r' точки (x, y) до другого фокуса опредѣлимъ, зная, что по основному свойству эллипса $r + r' = 2a$. Получимъ:

$$r' = a + ex. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (82)$$

Поступая совершенно такъ же для гиперболы и замѣчая только, что для нея (см. конецъ § 43) $c^2 = a^2 + b^2$, получили бы:

$$r = ex - a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (83)$$

$$r' = ex + a. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (84)$$

Полярныя уравненія эллипса, гиперболы и параболы относительно фокуса.

§ 55. Посмотримъ, каково будетъ полярное уравненіе эллипса, если за полярную ось принять большую его ось (фиг. 36), а за полюсъ фокусъ F. Изъ чертежа видимъ, что

$$x = r\cos\varphi + c.$$

Исключая x изъ этого уравненія и уравненія (81), получимъ:

$$r = a - e\,(r\cos\varphi + c),$$

откуда:

Фиг. 36.

$$r = \frac{a - ec}{1 + e\cos\varphi} = \frac{a - \frac{c^2}{a}}{1 + e\cos\varphi} = \frac{a^2 - c^2}{a\,(1 + e\cos\varphi)} = \frac{b^2}{a\,(1 + e\cos\varphi)}.$$

Полагая $\frac{b^2}{a} = p$, получимъ наконецъ:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (85)$$

Это и есть уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ. Здѣсь величина $\frac{b^2}{a}$, которую мы обозначили чрезъ p, называется параметромъ. Какъ не трудно вывести изъ уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, этотъ параметръ есть не что иное, какъ ордината, возстановленная изъ фокуса F. Дѣйствительно, абсцисса фокуса F, какъ извѣстно (см. § 29), есть c, равное $\sqrt{a^2 - b^2}$. Подставляя въ уравненіе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вмѣсто x эту величину, получимъ $\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, откуда $y = \frac{b^2}{a}$.

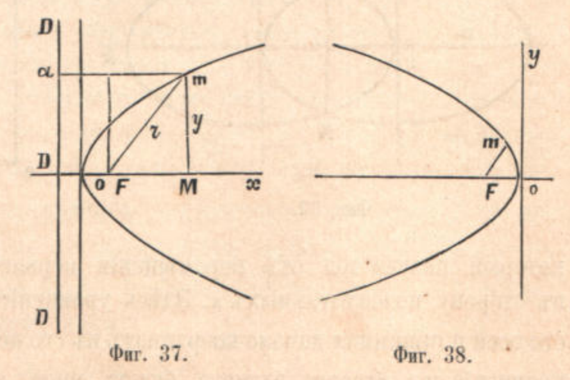
Для гиперболы получили бы такое же уравненіе (85); только для эллипса $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; для гиперболы же: $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Такъ что уравненіе (85) представляетъ эллипсъ при $e < 1$ и гиперболу при $e > 1$.

Мы сейчасъ увидимъ, что и парабола выражается уравненіемъ (85). Дѣйствительно (фиг. 37), по основному свойству параболы и припоминая, что въ ея уравненіи $y^2 = 2px$ величина $p = DF$, получимъ:

$$r = am = p + FM =$$
$$= p + r\cos\varphi,$$

откуда:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$



Фиг. 37. Фиг. 38.

Но еслибы парабола была расположена такъ, какъ на фиг. 38-ой, то по-

лучили бы

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Въ это уравненіе обращается уравненіе (85) при $e = 1$.

Итакъ: уравненіе (85) выражаетъ собою:

эллипсъ при $e < 1$

параболу » $e = 1$

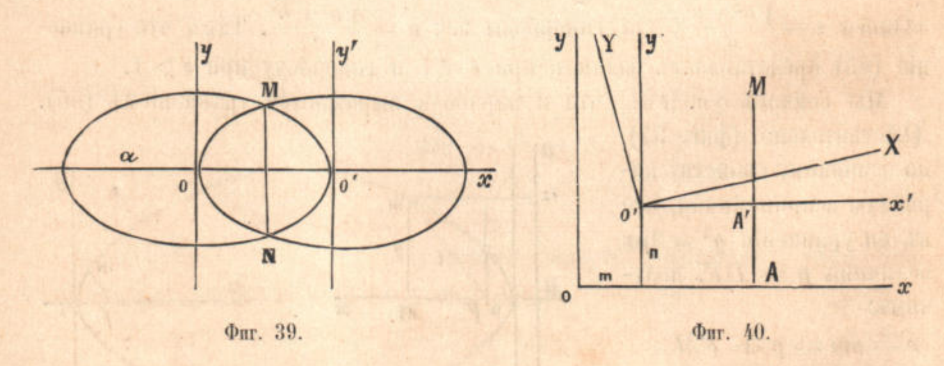
гиперболу » $e > 1$.

Замѣтимъ, что и для параболы величина p равна ординатѣ, возставленной изъ фокуса. Дѣйствительно абсцисса фокуса равна $\frac{p}{2}$ (см. § 49). Вставляя въ уравненіе параболы $y^2 = 2px$ вмѣсто x эту величину $\frac{p}{2}$ получимъ: $y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} = p^2$, откуда $y = p$ для фокуса.

Преобразованіе координатъ.

Необходимость преобразованія однихъ Декартовыхъ координатъ въ другія Декартовы.

§ 56. Уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $y^2 = 2px$, выведенныя нами, годятся для этихъ кривыхъ только при принятыхъ нами предположеніяхъ относительно расположенія этихъ кривыхъ по отношенію къ осямъ координатъ. Между тѣмъ во многихъ задачахъ приходится имѣть дѣло съ этими кривыми иначе расположенными относительно осей координатъ. Напримѣръ въ такой задачѣ: найти (фиг. 39) величину хорды, соединяющей точки пересѣченія даннаго эллипса съ тѣмъ



Фиг. 39. Фиг. 40.

который получается отъ перемѣщенія перваго эллипса на разстояніе a въ сторону положительныхъ x. Здѣсь уравненіе 1-го эллипса, относительно его осей и принимая начало координатъ въ его центрѣ, будетъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; уравненіе же второго эллипса будетъ иное, а какое?—мы еще пока не знаемъ. Если-же за начало координатъ примемъ центръ 2-го эллипса, то не

сумѣемъ написать уравненія перваго, центръ котораго окажется не въ началѣ координатъ.

Чтобы выйти изъ подобнаго рода затрудненій прибѣгаютъ къ *преобразованію* координатъ.

Самый общій случай (фиг. 40) преобразованія координатъ, для перехода отъ какой-нибудь системы xoy къ системѣ $Xo'Y$, разсматриваютъ какъ два послѣдовательныхъ перехода: 1) отъ системы xoy къ системѣ $x'o'y'$ съ осями, параллельными осямъ первой системы. Этотъ переходъ называется *переносомъ начала*; 2) отъ системы $x'o'y'$ къ системѣ $Xo'Y$, имѣющей то же начало, что и промежуточная система $x'o'y'$. Этотъ переходъ называется *поворотомъ осей* на уголъ φ. Уголъ φ есть уголъ, составляемый между собою осями $o'x'$ и $o'X$.

Переносъ начала.

§ 57. Для переноса начала необходимо должна быть задана та точка, въ которую начало переносится. Обыкновенно она задается ея координатами (m, n) (фиг. 40) относительно прежней системы. Преобразованіе будетъ достигнуто, если будемъ знать, какъ выражаются прежнія координаты (x, y) какой-нибудь точки M чрезъ координаты той же точки M, взятыя относительно системы $x'o'y'$. Не трудно видѣть изъ чертежа (фиг. 40), что:

$$x = oA = m + o'A' = m + x'$$
$$y = AM = n + A'M = n + y'.$$

Итакъ формулы для перенесенія начала будутъ:

$$x = m + x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$
$$y = n + y', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

гдѣ (m, n) суть координаты новаго начала o' относительно старой системы xoy.

Если какая-нибудь кривая задана уравненіемъ въ координатахъ x, y, то, чтобы получить ея уравненіе относительно системы $x'o'y'$, достаточно вмѣсто x и y вставить въ данное уравненіе ихъ величины изъ (87) и (88).

Перенесенія начала уже достаточно, напримѣръ, для рѣшенія задачи, предложенной въ § 56-омъ относительно хорды пересѣченія эллипсовъ (фиг. 39). Уравненіе перваго эллипса относительно осей xoy намъ извѣстно: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Уравненіе 2-го эллипса относительно осей $x'o'y'$ тоже извѣстно: оно будетъ $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Координаты начала o' относительно осей xoy будутъ (a, o), слѣдовательно, формулы преобразованія (87) и (88) въ настоящемъ случаѣ примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= y' \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

подставляя въ уравненіе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вмѣсто x и y ихъ величины изъ (89), получимъ:

$$\frac{(a + x')^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad \dots \dots \dots \dots (90)$$

Таково уравненіе 1-го эллипса относительно тѣхъ же осей $x'o'y'$, относительно которыхъ намъ извѣстно и уравненіе 2-го эллипса

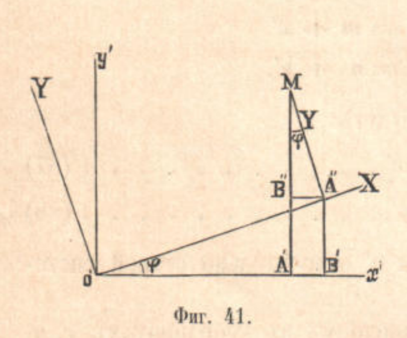
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad \dots \dots \dots \dots (91)$$

Рѣшая теперь совмѣстно уравненія (90) и (91), опредѣлимъ координаты точекъ пересѣченія эллипсовъ и по формулѣ (21) величину хорды MN. Продѣлать эти вычисленія предоставляемъ читателю въ видѣ упражненія, замѣтивъ, что для пониманія дальнѣйшаго это необязательно и что отвѣтъ долженъ получиться:

$$MN = b\sqrt{3}.$$

Поворотъ осей.

§ 58. Займемся теперь переходомъ отъ осей $x'oy'$ къ осямъ $Xo'Y$ (фиг. 41). Проведемъ изъ точки M ординату $MA'' = Y$ и ординату $MA' = y'$ и проведемъ чрезъ точку A'' параллель $A''B''$ къ оси $o'x'$. Замѣтимъ, что уголъ $A''mB'' = \varphi$, какъ имѣющій стороны перпендикулярныя сторонамъ угла φ. Изъ чертежа видимъ, что:



Фиг. 41.

$$x' = O'A' = O'B' - A'B' = O'B' - $$
$$- A''B'' = O'A''\,.\,cos\,\varphi - A''M\,.\,sin\,\varphi$$

или:

$$x' = X\,.\,cos\,\varphi - Y\,.\,sin\,\varphi\,.\ .\ (92)$$

и

$$y' = A_1M = A_1B'' + B''M = B_1A'' +$$
$$+ B''M = O'A''\,.\,sin\,\varphi + A''M\,.\,cos\,\varphi$$

или:

$$y' = X\,.\,sin\,\varphi + Y\,.\,cos\,\varphi. \quad \dots \dots \dots (93)$$

Формулы (92) и (93) и служатъ для перехода отъ системы $x'o'y'$ къ системѣ $Xo'Y$.

Общее преобразованіе координатъ.

§ 59. Соединяя формулы (87) и (88) съ формулами (92) и (93), находимъ для самаго общаго преобразованія однихъ Декартовыхъ координатъ въ другія такія формулы (фиг. 40):

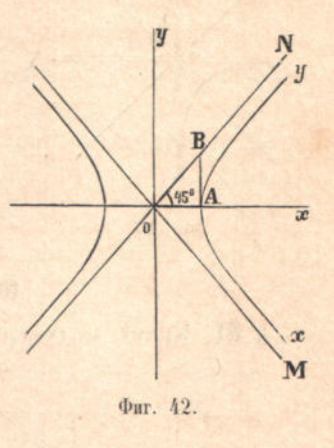
$$\left.\begin{aligned} x &= m + X\,cos\,\varphi - Y\,sin\,\varphi \\ y &= n + X\,sin\,\varphi + Y\,cos\,\varphi \end{aligned}\right\}, \quad \dots \dots \dots (94)$$

гдѣ m и n суть координаты новаго начала o' относительно старой си-

стемы xoy; уголъ же φ есть уголъ, заключенный между осями $o'x'$ и $o'X$ или, что то же, уголъ наклоненія оси $o'X$ къ оси ox.

Уравненіе равносторонней гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ.

§ 60. Мы приложимъ преобразованіе координатъ къ простѣйшему примѣру, который познакомитъ насъ съ замѣчательнымъ уравненіемъ одной гиперболы. Возьмемъ такую гиперболу (фиг. 42), ассимптоты которой наклонены къ оси x подъ угломъ 45°, такъ что эти ассимптоты взаимно-перпендикулярны. Гипербола, имѣющая такія ассимптоты, называется *равносторонней*. Изъ треугольника AOB видно, что въ этомъ случаѣ $a = b$, такъ что уравненіе гиперболы будетъ



Фиг. 42.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или:

$$x^2 - y^2 = a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (95)$$

Посмотримъ, каково будетъ уравненіе этой гиперболы, если за оси координатъ принять самыя ассимптоты oM за ось x, oN за ось y. Для полученія этого уравненія надо повернуть прежнія оси на $-45°$, то есть воспользоваться формулами (92) и (93) въ предположеніи $\varphi = -45°$. Припомнимъ, что, какъ извѣстно изъ тригонометріи, $sin\,(-45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $cos\,(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Такъ какъ мы здѣсь переходимъ не отъ (x', y'), а отъ (x, y), то формулы (92) и (93) примутъ въ настоящемъ случаѣ видъ:

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти значенія x и y въ (95), получимъ:

$$\frac{(X + Y)^2}{2} - \frac{(X - Y)^2}{2} = a^2,$$

или

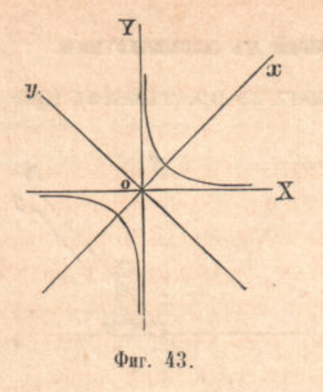
$$2XY = a^2 \text{ или } XY = \frac{a^2}{2}.$$

Полагая $\frac{a^2}{2} = m^2$, получимъ:

$$XY = m^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96)$$

Итакъ: *уравненіе, выражающее, что произведеніе координатъ равняется*

постоянному, представляетъ собою равностороннюю гиперболу, отнесенную къ ассимптотамъ (фиг. 43).

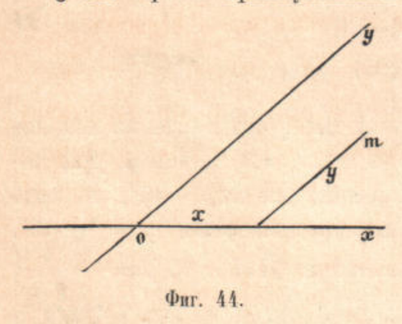


Фиг. 43.

Очень часто въ различныхъ вопросахъ приходится имѣть дѣло съ такими двумя перемѣнными величинами, произведеніе которыхъ остается постояннымъ. Совмѣстное измѣненіе такихъ величинъ, оказывается, изображается совмѣстнымъ измѣненіемъ абсциссъ и ординатъ равносторонней гиперболы (фиг. 43), отнесенной къ асоимптотамъ. Здѣсь видно, какъ, съ увеличеніемъ одной изъ перемѣнныхъ до безконечности, другая уменьшается до нуля.

Косоугольныя координаты.

§ 61. Кромѣ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатъ существуютъ еще *косоугольныя*, въ которыхъ (фиг. 44) оси неперпендикулярны между собою. Въ такой системѣ ординатою точки m служитъ прямая, проведенная чрезъ эту точку параллельно оси y до пересѣченія A съ осью x; абсциссою же служитъ разстояніе этого пересѣченія A отъ начала.



Фиг. 44.

Кривыя второго порядка.

§ 62. Въ строго научныхъ курсахъ Аналитической Геометріи изученіе эллипса, параболы и гиперболы ведется необыкновенно стройно при широкомъ примѣненіи преобразованія координатъ. А именно изслѣдуется самое общее уравненіе второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (97)$$

и доказывается, что это уравненіе (а слѣдовательно и всякое уравненіе 2-го порядка съ двумя перемѣнными) можетъ изображать три типа кривыхъ, смотря по тому, будетъ ли величина $B^2 - 4AC$ болѣе, равна или менѣе нуля. А именно: 1) При $B^2 - 4AC < 0$ уравненіе (97) принадлежитъ къ типу *эллипса* и можетъ представлять собою: а) эллипсъ, б) окружность, в) точку, г) мнимый эллипсъ. 2) При $B^2 - 4AC = 0$ уравненіе (97) принадлежитъ къ типу *параболы* и можетъ представлять собою: а) параболу, б) двѣ параллельныя прямыя, в) двѣ мнимыя прямыя и г) двѣ совпадающія прямыя. 3) При $B^2 - 4AC > 0$ уравненіе (97) принадлежитъ къ типу *гиперболы* и можетъ представлять собою: а) гиперболу и б) двѣ пересѣкающіяся прямыя.

Кромѣ того доказывается, что уравненіе второго порядка только въ томъ случаѣ представляетъ пару прямыхъ, если величина, называемая *дискриминантомъ* и составленная изъ коэффиціентовъ уравненія слѣдующимъ образомъ:

$$BDE - CD^2 - AE^2 - F(B^2 - 4AC), \ldots\ldots (98)$$

окажется равною нулю.

Кривыя: эллипсъ, парабола и гипербола называются *кривыми 2-го порядка.* Въ § 114 мы покажемъ, что онѣ получаются отъ пересѣченія круглаго конуса плоскостью. Поэтому ихъ зовутъ также *коническими сѣченіями.*

Не находя умѣстнымъ въ нашемъ руководствѣ, имѣющемъ въ виду лишь насущныя потребности приложеній, приводить изслѣдованія уравненія второго порядка во всей его стройности, мы ограничимся примѣненіемъ преобразованія координатъ къ выводу такихъ уравненій кривыхъ 2-го порядка, которыя яснѣе всего укажутъ на переходъ отъ параболы къ эллипсу и гиперболѣ.

Уравненія эллипса, параболы и гиперболы относительно вершинъ.

§ 63. Примемъ за начало вершину эллипса и большую ось за ось x (фиг. 45), тогда переходъ отъ уравненія $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ къ координатамъ x, y придется совершить помощью формулъ $x_1 = x - a$; $y_1 = y$ и получится уравненіе эллипса

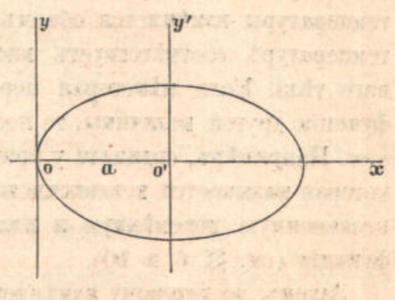
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

или: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2}{a}x + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

или $\quad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$

Вводя параметръ $p = \frac{b^2}{a}$, получимъ:

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2 \;.\;. (99)$$



Фиг. 45.

Примемъ за начало координатъ гиперболы ея вершину A. Переходъ отъ x', y' къ x, y придется здѣсь сдѣлать по формуламъ: $x_1 = x + a$; $y_1 = y$. Вставляя вмѣсто x', y' эти ихъ выраженія въ уравненіе гиперболы $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, получимъ: $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, или: $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$.

Вводя параметръ $p = \frac{b^2}{a}$, получимъ:

$$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2. \ldots\ldots\ldots (100)$$

Наконецъ мы знаемъ уравненіе параболы

$$y^2 = 2px. \ldots\ldots\ldots (101)$$

Сравнивая уравненія (99) и (100) съ (101), замѣчаемъ, что эллипсъ обра-

щается въ параболу при $\frac{b^2}{a^2} = 0$, то есть онъ тѣмъ болѣе сходенъ съ параболою, чѣмъ менѣе отношенiе $\frac{b}{a}$.

Точно также и гипербола обращается въ параболу при $\frac{b^2}{a^2} = 0$. Вообще эллипсъ и гипербола отличаются отъ параболы добавочнымъ членомъ $\frac{b^2}{a^2}x^2$, который въ случаѣ эллипса вычитается, а въ случаѣ гиперболы — прибавляется. Парабола представляетъ собою какъ бы переходъ отъ эллипса къ гиперболѣ.

Примѣчанiе.

§ 64. Въ дальнѣйшемъ изложенiи мы познакомимся еще со многими другими свойствами кривыхъ второго порядка и между прочимъ: дифференцiальное исчисленiе позволитъ намъ познакомиться со свойствами ихъ касательныхъ, а интегральное—съ вычисленiемъ площадей, ограниченныхъ этими кривыми.

Первое понятiе о функцiи.

§ 65. Если какая нибудь величина измѣняется съ измѣненiемъ нѣкоторой другой величины, и при томъ такъ, что, при всякомъ данномъ значенiи 2-ой величины, первая величина имѣетъ вполнѣ опредѣленное значенiе, или по крайней мѣрѣ конечное число опредѣленныхъ значенiй, то первая изъ этихъ величинъ называется *функцiею* второй. Напримѣръ объемъ тѣла есть функцiя его температуры, потому что съ измѣненiемъ температуры измѣняется объемъ, и (при данномъ давленiи) всякой данной температурѣ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная величина объема даннаго тѣла. Если нѣкоторая перемѣнная величина разсматривается какъ функцiя другой величины, то послѣдняя называется *независимою перемѣнною*. Напримѣръ, ордината y прямой $y=kx+b$ есть функцiя ея абсциссы x, которая называется независимою перемѣнною. Мы измѣняемъ какъ угодно независимую перемѣнную и изслѣдуемъ—какъ при этомъ измѣняется ея функцiя (см. §§ 6 и 10).

Законъ, по которому измѣняется функцiя съ измѣненiемъ независимаго перемѣннаго, можетъ быть данъ математическою формулою. Напримѣръ, ордината прямой измѣняется съ измѣненiемъ ея абсциссы по закону, выражаемому формулою $y=kx+b$. Ордината окружности $x^2+y^2=R^2$ измѣняется съ измѣненiемъ абсциссы по закону $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Здѣсь каждому значенiю x соотвѣтствуютъ два значенiя игрека.

Съ этой точки зрѣнiя всякая формула, заключающая въ себѣ перемѣнное количество x и сколько угодно постоянныхъ количествъ, разсматривается какъ функцiя независимаго перемѣннаго x, потому что величина, выраженная такою формулою, измѣняется съ измѣненiемъ x.

Если дана формула, по которой функцiя опредѣляется чрезъ независимыя перемѣнныя, то такая функцiя называется *явною*. Напримѣръ, y есть явная функцiя отъ x, если дано $y=\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$. Какъ бы ни была

сложна формула, содержащая въ себѣ одно перемѣнное x и выражающая y, говорятъ, что y есть явная функція икса.

Но во многихъ случаяхъ весьма удобно бываетъ обозначить только, что y есть функція отъ x, не давая закона зависимости между y и x, не давая никакой опредѣленной формулы для выраженія y чрезъ x; тогда пишутъ такъ: $y = f(x)$, или такъ: $y = F(x)$ или $y = \varphi(x)$; всѣ эти уравненія выговариваются такъ: y равно функціи отъ x, или такъ: y есть функція отъ x, или такъ: игрекъ равняется функціи иксъ. Тутъ уже не дается, какая именно функція отъ x есть y, но просто выражается, что между y и x существуетъ какая-то зависимость. Такія функціи называются *неявными*. Разсмотрѣніе неявныхъ функцій и приведенный выше способъ ихъ обозначенія вносятъ большую общность въ математику и упрощаютъ языкъ, на которомъ выражаются математики.

Если какая нибудь перемѣнная величина зависитъ отъ нѣсколькихъ другихъ такимъ образомъ, что измѣняется съ измѣненіемъ каждой изъ нихъ и при опредѣленныхъ ихъ значеніяхъ имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе (или по крайней мѣрѣ конечное число значеній), то первая изъ этихъ величинъ называется функціею остальныхъ. Такая функція называется функціею многихъ перемѣнныхъ. Онѣ бываютъ явныя и неявныя. Напримѣръ z есть *явная* функція отъ x и y, если z выражено формулою, заключающею въ себѣ x и y; напримѣръ, $z = A \sin(x + 3y)$. Неявныя функціи многихъ перемѣнныхъ выражаются такъ:

$z = f(x, y)$ читается: z равняется функціи икса и игрека;

$u = f(x, y, z)$ читается: u равняется функціи икса, игрека и зеда и такъ далѣе.

Примѣнимъ понятіе о функціи къ выраженію нѣкоторыхъ общихъ положеній Аналитической Геометріи.

Кривыя различныхъ порядковъ.

§ 66. Всякое уравненіе съ двумя перемѣнными x, y можетъ быть, перенесеніемъ всѣхъ членовъ въ одну сторону, выражено такъ:

$$f(x, y) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

Напримѣръ уравненіе $x^3 + 3x^2y = ax + b$ можно написать такъ: $x^3 + 3x^2y - ax - b = 0$, или: $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - ax - b = 0$.

Если $f(x, y)$ перваго порядка, то, какъ мы видѣли въ § 16-омъ, такое уравненіе выражаетъ собою прямую.

Если $f(x, y)$ второго порядка, то, какъ мы видѣли въ § 62-омъ, уравненіе (102) выражаетъ собою кривую второго порядка или пару прямыхъ (для общности и пара прямыхъ считается кривою второго порядка).

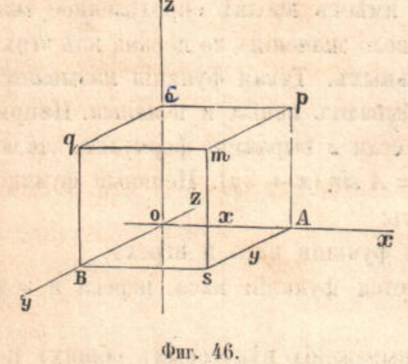
Если $f(x, y)$ имѣетъ m-ый порядокъ, то и кривая, выражаемая уравненіемъ (102), называется кривою m-го порядка.

ГЛАВА II.

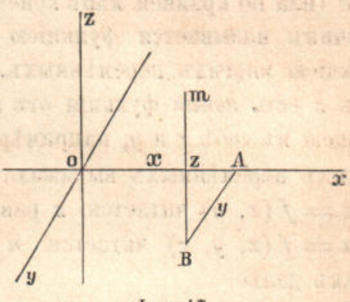
Аналитическая Геометрія въ пространствѣ.

Опредѣленіе положенія точки прямоугольными координатами.

§ 67. Положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется разстояніями ея отъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ *плоскостей координатъ*: xoy, yoz, zox (фиг. 46). Прямыя ox, oy, oz, по которымъ пересѣкаются между собою плоскости координатъ, называются *осями координатъ*. Оси координатъ взаимно пересѣкаются въ точкѣ O, называемой *началомъ*. Перпендикуляры mp, mq, ms, опущенные изъ точки m на плоскости координатъ и называются координатами точки (согласно сказанному въ началѣ этого параграфа). Достраивая къ этимъ перпендикулярамъ прямоугольный параллелепипедъ и припоминая, что противоположныя ребра параллелепи-



Фиг. 46.



Фиг. 47.

педа равны между собою, видимъ, что упомянутымъ перпендикулярамъ соотвѣтственно равны: OA, OB и OC — ребра сходящіяся въ началѣ, которыя и могутъ быть приняты за координаты той вершины m параллелепипеда, которая противуположна началу o. Наконецъ принятыя въ началѣ этого параграфа координаты равны слѣдующимъ прямымъ (фиг. 47): разстоянію z точки m отъ плоскости (xoy), разстоянію y основанія B перпендикуляра mB отъ оси x и разстоянію x основанія A перпендикуляра BA отъ начала.

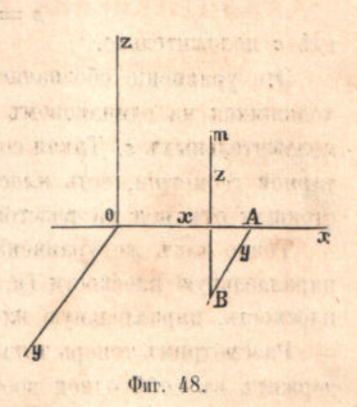
Если направленія ox, oy и oz осей приняты за положительныя, то противуположныя имъ направленія принимаются за отрицательныя.

Поверхность выражается уравненіемъ вида: $f(x, y, z) = 0$.

§ 68. Подобно тому какъ линіи выражаются на плоскости уравненіями вида $f(x, y) = 0$, точно такъ же всякая закономѣрная поверхность въ прямоугольныхъ координатахъ x, y, z выражается уравненіемъ вида

$$f(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

Докажемъ это. Пусть намъ дана какая нибудь закономѣрная поверхность (фиг. 48). Возьмемъ на ней какую нибудь точку m, проведемъ ея координаты $x = OA$; $y = AB$; $z = Bm$. Съ измѣненіемъ положенія точки m на поверхности и точка B будетъ измѣнять свое положеніе на плоскости (x, y), и слѣдовательно координаты x и y будутъ измѣняться. Слѣдовательно ордината z точки m мѣняется съ измѣненіемъ x и y такъ, что для каждой совокупности значеній x и y ордината z имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе. Значитъ z есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, то есть: $z = F(x, y)$. Перенеся всѣ члены этого уравненія въ одну часть получимъ уравненіе вида (103); что и требовалось доказать. Напримѣръ уравненіе



Фиг. 48.

$$z = ax^2 + bx + y^2,$$

вида $z = F(x, y)$, можно написать такъ: $ax^2 + bx + y^2 - z = 0$: въ видѣ $f(x, y, z) = 0$. Здѣсь $ax^2 + bx + y^2$ кратко обозначено чрезъ $F(x, y)$; тогда какъ $ax^2 + bx + y^2 - z$ обозначено чрезъ $f(x, y, z)$.

Уравненіе сферической поверхности, описанной радіусомъ R изъ начала.

§ 69. Выведемъ, для примѣра, уравненіе сферической поверхности, имѣющей центръ въ началѣ, основное свойство которой, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что всѣ точки этой поверхности (фиг. 49) находятся въ одинаковомъ разстояніи отъ центра. Пусть R есть радіусъ такой сферы.

Изъ треугольника oBm имѣемъ

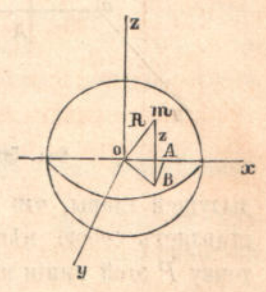
$$om^2 = R^2 = oB^2 + z^2.$$

Изъ треугольника же oAB имѣемъ

$$oB^2 = x^2 + y^2.$$

Итакъ $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Это уравненіе вѣрно для всѣхъ точекъ нашей сферической поверхности.



Фиг. 49.

Слѣдовательно, это уравненіе (104) есть уравненіе сферической поверхности, описанной радіусомъ R изъ начала. Перенеся R^2 въ лѣвую часть уравненія, получимъ: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ имѣющее видъ $f(x, y, z) = 0$.

Всякое уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между координатами x, y, z представляетъ собою поверхность.

§ 70. Наоборотъ, всякое уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между тремя координатами x, y, z представляетъ собою поверхность. Покажемъ это сна-

чала для частныхъ случаевъ уравненія $f(x, y, z) = 0$. Однимъ изъ такихъ частныхъ случаевъ будетъ такой, когда данное уравненіе не заключаетъ въ себѣ координатъ x и y, когда, напримѣръ, оно таково:

$$z = c; \quad \text{или:} \quad z - c = 0, \ldots \ldots \ldots (105)$$

гдѣ c положительно.

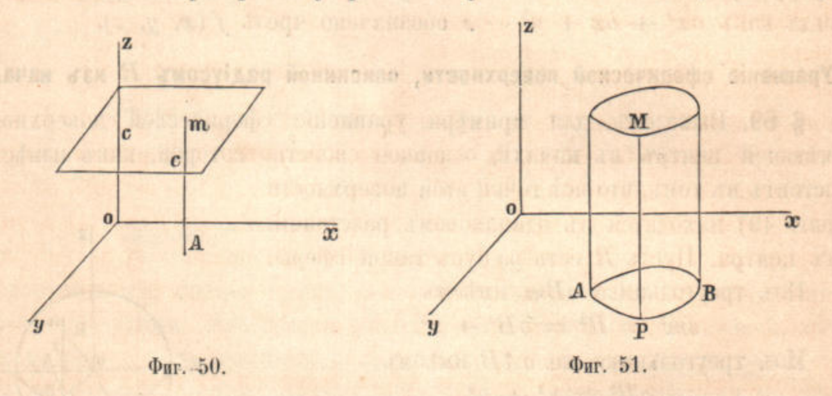
Это уравненіе обозначаетъ собою (фиг. 50) совокупность точекъ, находящихся на одинаковомъ разстояніи c отъ плоскости (x, y) въ сторонѣ положительныхъ z. Такая совокупность точекъ, какъ извѣстно изъ элементарной геометріи, есть *плоскость, параллельная плоскости* (x, y) и отстоящая отъ нея на разстояніи c.

Точно такъ же уравненіе $x - c = 0$ представляетъ собою плоскость, параллельную плоскости (y, z); уравненіе $y - c = 0$ представляетъ собою плоскость, параллельную плоскости (z, x).

Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда уравненіе $f(x, y, z) = 0$ не содержитъ въ себѣ одной координаты. Напримѣръ такое уравненіе

$$f(x, y) = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots (106)$$

несодержащее въ себѣ z, при чемъ сказано, что разсматриваемое уравненіе относится къ пространству трехъ измѣреній. Мы знаемъ уже изъ пре-



Фиг. 50. Фиг. 51.

дыдущей главы, что уравненіе (106) въ плоскости (x, y) (фиг. 51) представляетъ собою нѣкоторую линію AB. Проведемъ чрезъ какую нибудь точку P этой линіи прямую PM параллельную oz. Такъ какъ координата z остается неопредѣленною, то координаты всѣхъ точекъ прямой удовлетворяютъ уравненію (106), потому что x и y всѣхъ этихъ точекъ удовлетворяютъ ему. Но точку P мы брали на линіи AB произвольно, слѣдовательно координаты всѣхъ точекъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ всѣ точки линіи AB параллельно оси oz, удовлетворяютъ уравненію (106). Совокупность всѣхъ такихъ прямыхъ представляетъ собою цилиндръ *), параллель-

*) Въ элементарной геометріи разсматривается только круглый цилиндръ, *направляющая* котораго есть окружность. Въ математикѣ же цилиндромъ называется всякая поверхность, прямолинейныя образуюшія которой взаимно-параллельны, какова бы ни была направляющая.

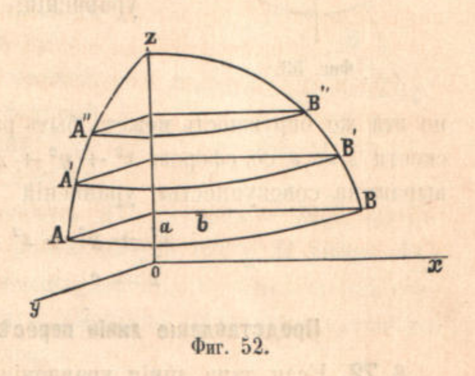
ный оси *oz*. Итакъ уравненіе (106) представляетъ собою *цилиндръ, параллельный оси oz*.

Точно такъ же: уравненіе $f(y, z) = 0$ представляетъ собою цилиндръ, параллельный оси x; уравненіе $f(z, x) = 0$ представляетъ собою цилиндръ, параллельный оси y.

Разсмотримъ наконецъ уравненіе

$$f(x, y, z) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (103)$$

содержащее всѣ три координаты. Проведемъ на разстояніи c отъ плоскости (x, y) параллельную къ ней плоскость ab (фиг. 52). Для всѣхъ точекъ этой плоскости $z = c$. Слѣдовательно, уравненіе (103) для точекъ только этой плоскости обратится въ $f(x, y, c) = 0$, но такое уравненіе съ двумя перемѣнными, относящееся только къ одной плоскости ab, какъ мы знаемъ изъ предыдущей главы, представляетъ собою нѣкоторую кривую AB, лежащую въ этой плоскости. Измѣняя c на небольшую величину, получимъ другую кривую $A'B'$ въ плоскости параллельной плоскости ab. Такимъ образомъ получимъ цѣлый рядъ кривыхъ, совокупность которыхъ составитъ нѣкоторую поверхность. Итакъ, уравненіе (103) представляетъ собою поверхность. Если же оно не содержитъ какой-либо координаты, то представляемая имъ поверхность цилиндрическая (см. ур. 106). Если уравненіе (103) содержитъ только одну координату, то (см. ур. 105) представляемая имъ поверхность есть плоскость, параллельная одной изъ плоскостей координатъ.



Фиг. 52.

Представленіе линій совокупностью двухъ уравненій съ тремя перемѣнными.

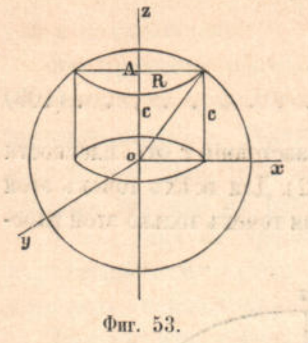
§ 71. Линія (прямая или кривая) представляется при помощи пространственныхъ координатъ x, y, z, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей,

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (107)$$

Такъ какъ всякая линія можетъ быть разсматриваема какъ пересѣченіе безчисленныхъ паръ поверхностей, то линія можетъ быть выражена безконечнымъ числомъ паръ уравненій вида (107). Напримѣръ линія (107) выражается и такою совокупностью уравненій

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ f(x, y, z) - k \cdot f_1(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}, \ldots \ldots (108)$$

какое бы ни было k, потому что координаты, удовлетворяющія уравненіямъ (107), удовлетворятъ и уравненіямъ (108), и обратно: координаты, удовлетворяющія уравненіямъ (108), удовлетворятъ и уравненіямъ (107), какъ это видно изъ состава той и другой совокупности уравненій.



Фиг. 53.

Примѣръ. Окружность, описанная радіусомъ R изъ точки A въ плоскости, параллельной плоскости (x, y) (фиг. 53) и отстоящей отъ нея на разстояніи c, представляетъ собою пересѣченіе цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ съ плоскостью $z = c$ и потому можетъ быть выражена совокупностью уравненій:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ z &= c \end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \; (109)$$

но эта же окружность можетъ быть разсматриваема какъ пересѣченіе плоскости $z = c$ со сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + c^2$, и потому можетъ быть выражена совокупностью уравненій

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 + c^2 \\ z &= c \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (110)$$

Представленіе линіи пересѣченіемъ двухъ цилиндровъ.

§ 72. Если дана линія уравненіями

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ f_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (111)$$

то, исключая y изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ уравненіе вида:

$$F(x, z) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (112)$$

исключая же изъ уравненій (111) координату x, получимъ уравненіе вида:

$$F_1(y, z) = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (113)$$

Уравненіе (112) представляетъ собою (см. § 70) цилиндръ, параллельный оси y; уравненіе же (113) выражаетъ собою цилиндръ, параллельный оси x. Этими двумя уравненіями замѣнена теперь система уравненій (111). Итакъ, *всякая линія можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ цилиндровъ, изъ которыхъ одинъ параллеленъ одной оси координатъ, а другой параллеленъ другой оси.*

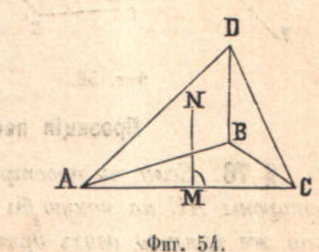
Понятіе о проэкціяхъ.

§ 73. Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки m на данную прямую называется ортогональною *проэкціею точки m на эту прямую.*

Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки *m* на данную плоскость, называется *проэкціею точки m на эту плоскость.* Часть прямой, ограниченной двумя точками, называется *прямолинейнымъ отрѣзкомъ* или *векторомъ.*

Разстояніе между основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ прямолинейнаго отрѣзка на данную прямую, называется *проэкціею прямолинейнаго отрѣзка на эту прямую.* При этомъ прямолинейный отрѣзокъ можетъ лежать на прямой непараллельной и непересѣкающейся съ данною прямою.

Угломъ между двумя непараллельными и непересѣкающимися прямыми называется уголъ, составленный одною изъ данныхъ прямыхъ съ прямою, проходящею чрезъ одну изъ ея точекъ параллельно другой данной прямой. Напримѣръ (фиг. 54) уголъ, составляемый непараллельными и непересѣкающимися взаимно ребрами AC и BD пирамиды $ABCD$, равенъ углу NMC, составленному ребромъ AC съ прямою MN, проведенною параллельно ребру BD чрезъ какую нибудь точку M ребра AC.



Фиг. 54.

Разстояніе между основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ прямолинейнаго отрѣзка на данную плоскость, называется *проэкціею прямоугольнаго отрѣзка на эту плоскость.*

Длина проэкціи на плоскость прямолинейнаго отрѣзка.

§ 74. *Длина проэкціи на плоскость* (xoy) *прямолинейнаго отрѣзка* AB (фиг. 55) *равна произведенію* $AB\,.\cos\varphi$ *длины отрѣзка на косинусъ угла, составляемаго отрѣзкомъ съ плоскостью* xoy. Докажемъ это. Проведемъ чрезъ A прямую AM параллельную проэкціи CC' даннаго отрѣзка. Изъ треугольника BAM видимъ, что:

$$CC' = AM = AB\,.\cos\varphi. \quad (114)$$

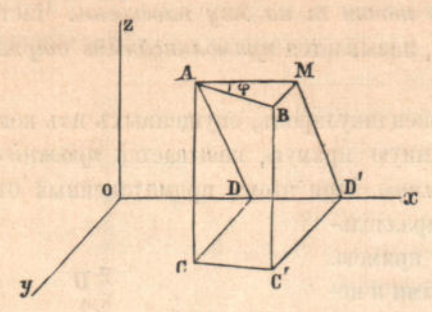
что и требовалось доказать.

Фиг. 55.

Длина проэкціи прямолинейнаго отрѣзка на прямую.

§ 75. *Длина проэкціи прямоугольнаго отрѣзка* AB *на прямую* ox *равна произведенію* $AB\,.\cos\varphi$ *отрѣзка на косинусъ угла, составляемаго имъ съ прямою* ox. Докажемъ это (фиг. 56). Пусть AB будетъ данный отрѣзокъ. Проведя чрезъ концы его плоскости ACD и $BC'D'$ перпендикулярныя къ прямой ox, получимъ проэкцію DD' отрѣзка AB на пря-

мую ox. Проведемъ чрезъ A прямую AM параллельную DD' до встрѣчи въ точкѣ M съ плоскостью $BC'D'$. Изъ треугольника AMB, прямоугольнаго при M, имѣемъ:



Фиг. 56.

$$AM = AB \,.\, \cos\varphi.$$

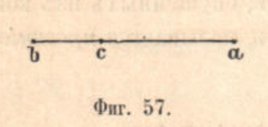
Но AM равна DD' какъ отрѣзокъ параллельной между параллельными плоскостями. Слѣдовательно:

$$DD' = AB \,.\, \cos\varphi; \quad (115)$$

что и требовалось доказать.

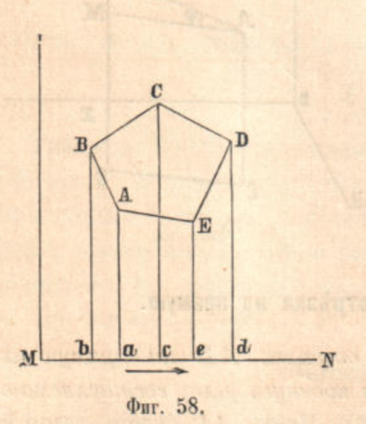
Проэкція послѣдней стороны многоугольника.

§ 76. *Если въ пространствѣ данъ треугольникъ ABC, то проэкція стороны AC на какую бы то ни было прямую равна суммѣ проэкцій на ту же прямую двухъ другихъ сторонъ AB и BC.* Пусть a, b, c будутъ проэкціи вершинъ A, B и C даннаго треугольника на упомянутую произвольно взятую прямую, которая можетъ даже и не находиться въ плоскости ABC. Если b находится между a и c, то ac очевидно равно $ab + bc$. Если c находится между a и b, то ac будетъ равно разности ab и bc, но направленіе bc противуположно направленію ab и потому ac является всетаки алгебраической суммою частей ab и bc (фиг. 57). Итакъ теорема доказана. Вмѣсто трехъ точекъ A, B, C можно взять какое угодно число точекъ въ пространствѣ, проведя чрезъ нихъ послѣдовательно прямыя, составить *пространственный* многоугольникъ и совершенно такимъ же способомъ доазать, что вѣрна̀



Фиг. 57.

Теорема: *При проэктированіи пространственнаго многоугольника на какую-либо прямую, проэкція послѣдней стороны многоугольника равна суммѣ проэкцій прочихъ сторонъ его.*



Фиг. 58.

Эта теорема справедлива и въ томъ случаѣ, если многоугольникъ плоскій и проэктируется на прямую, лежащую въ его плоскости. На такомъ частномъ случаѣ мы пояснимъ смыслъ общей теоремы. Пусть $ABCDE$ будетъ такой многоугольникъ. Проэктируемъ его на прямую MN (фиг. 58). Посмотримъ какъ выразится проэкція ae стороны AE чрезъ проэкціи другихъ сторонъ; при этомъ считаемъ положительными тѣ проэкціи, которыя идутъ въ направленіи ae указанномъ

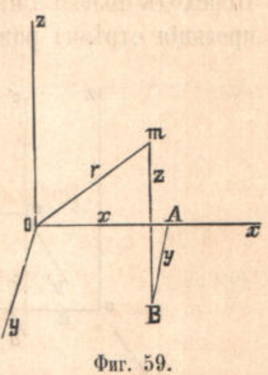
стрѣлкою; проэкціи же, идущія въ противоположномъ направленіи считаемъ отрицательными. Получимъ:

$$ae = (-bа) + bc + cд + (-eд)$$
$$= bc + cд - bа - eд = bд - bа - eд.$$

Равенство, къ которому мы пришли: $ae = bд - bа - eд$, очевидно изъ чертежа.

Эта весьма важная теорема въ ооοбенности часто примѣняется въ такомъ видѣ: *при проэктированіи, на какую-либо прямую, координатъ x, y, z и радіуса-вектора r какой-либо точки M* (фиг. 59): *сумма проэкцій координатъ равна проэкціи радіуса-вектора.* Дѣйствительно здѣсь r есть послѣдняя сторона многоугольника $OABMO$, составленнаго изъ сторонъ:

$$OA = x;\ AB = y;\ BM = z;\ OM = r.$$

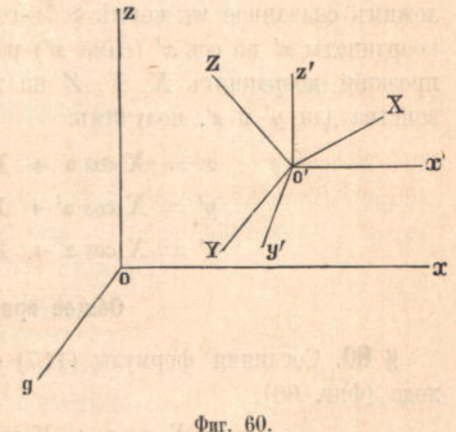


Фиг. 59.

Эта послѣдняя теорема дастъ намъ возможность впослѣдствіи (§ 79) весьма легко найти формулы преобразованія однихъ координатъ x, y, z въ другія X, Y, Z.

Преобразованіе координатъ въ пространствѣ.

§ 77. Подобно тому, какъ на плоскости (§ 56, фиг. 40) мы совершали переходъ отъ однихъ координатъ къ другимъ въ два пріема: 1) перенесеніемъ начала и 2) поворотомъ осей, точно такъ же, въ два пріема, будемъ переходить отъ координатъ x, y, z (фиг. 60) къ координатамъ X, Y, Z: сперва перенесемъ начало изъ o въ o', оставляя оси x', y', z' параллельными осямъ x, y, z, а потомъ повернемъ систему x', y', z' въ положеніе X, Y, Z.



Фиг. 60.

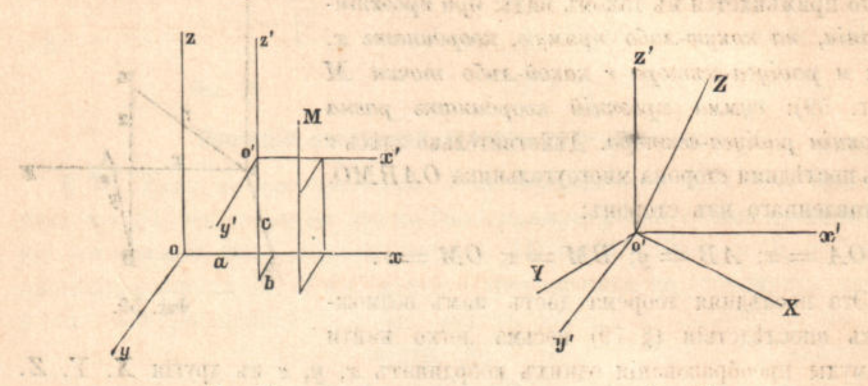
Перенесеніе начала.

§ 78. Перейдемъ отъ осей x, y, z къ параллельнымъ съ ними осямъ x', y', z' (фиг. 61). Пусть a, b, c будутъ координаты новаго начала o' относительно старой системы x, y, z. Не трудно видѣть, что:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \\ z &= z' + c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

Поворотъ осей.

§ 79. Перейдемъ теперь отъ системы x, y, z къ системѣ X, Y, Z, имѣющей то же начало o', но другое направленіе осей. Пусть ось X составляетъ съ осями x', y', z' углы α, β, γ; ось Y составляетъ съ осями x', y', z' углы α', β', γ'; ось Z составляетъ съ осями x', y', z' углы α'', β'', γ''. Переходъ только тогда и возможенъ, когда эти углы даны. Помня, что проэкція отрѣзка равна его длинѣ, помноженной на косинусъ угла, со-



Фиг. 61. Фиг. 62.

ставляемаго имъ съ прямою, на которую онъ проектируется (115), приложимъ сказанное въ концѣ § 76-го, согласно чему проэкція x' (фиг. 62) координаты x' на ось x' (сама x') равна суммѣ $X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$ проэкцій координатъ X, Y, Z на ту же ось x'. Составляя такія же равенства для y' и z', получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma \\ y' &= X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma' \\ z' &= X\cos\alpha'' + Y\cos\beta'' + Z\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (117)$$

Общее преобразованіе.

§ 80. Соединяя формулы (117) съ (116) получимъ для общаго перехода (фиг. 60):

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma + a \\ y &= X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma' + b \\ z &= X\cos\alpha'' + Y\cos\beta'' + Z\cos\gamma'' + c \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (118)$$

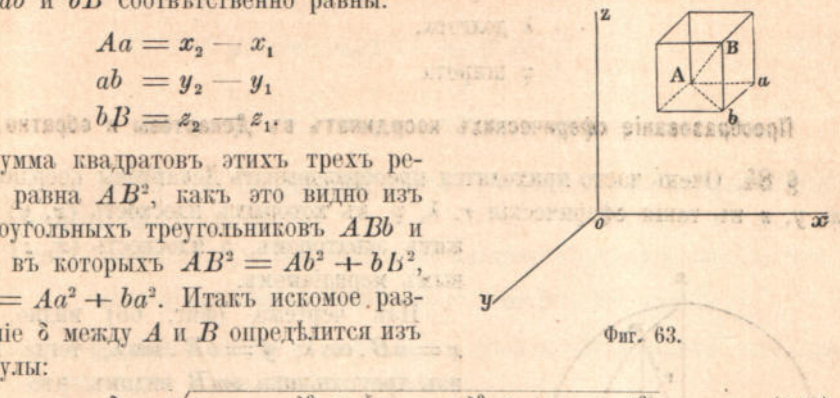
Разстояніе между двумя точками.

§ 81. Выведемъ для двухъ точекъ (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) въ пространствѣ формулу подобную (21), данной въ главѣ I-ой. Пусть первая точка будетъ A (фиг. 63), а вторая B. Проведя чрезъ A и B плоскости,

параллельныя плоскостямъ координатъ, получимъ параллелепипедъ, въ которомъ, какъ видно изъ чертежа, ребра Aa, ab и bB соотвѣтственно равны:

$$Aa = x_2 - x_1$$
$$ab = y_2 - y_1$$
$$bB = z_2 - z_1.$$

Сумма квадратовъ этихъ трехъ реберъ равна AB^2, какъ это видно изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABb и Aba, въ которыхъ $AB^2 = Ab^2 + bB^2$, $Ab^2 = Aa^2 + ba^2$. Итакъ искомое разстояніе δ между A и B опредѣлится изъ формулы:



Фиг. 63.

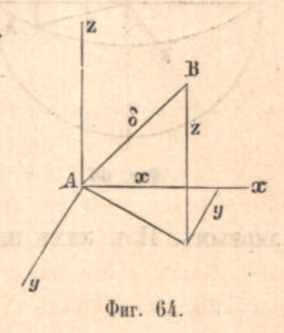
$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Разстояніе точки отъ начала.

§ 82. Если точка A находилась бы въ началѣ, то ея координаты x_1, y_1, z_1 равнялись бы нулю и формула (119) обратилась бы въ

$$\delta = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

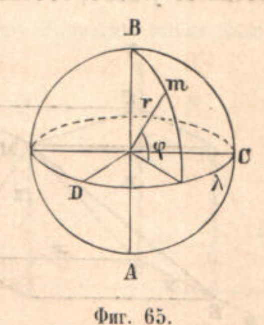
Эта формула опредѣляетъ разстояніе точки отъ начала.



Фиг. 64.

Сферическія координаты.

§ 83. Аналогично съ полярными координатами на плоскости (§ 51) употребляются для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ *сферическія* координаты, которыя весьма сходны съ географическими координатами. Избирается начало O; за одну изъ координатъ точки m (фиг. 65) принимается разстояніе ея r отъ начала, называемое *радіусомъ-векторомъ*. Этимъ радіусомъ описываемъ около начала сферу и выбираемъ плоскость перваго меридіана OBC и плоскость экватора OCD, проходящія чрезъ начало O. Уголъ λ, составляемый плоскостью перваго меридіана съ плоскостью меридіана проходящаго чрезъ m принимается за другую координату точки m и называется ея *долготою*. Уголъ φ, составляемый радіусомъ-векторомъ съ плоскостью экватора, принимается за третью координату и называется *широтою*. Перпендикуляръ DB, возставленный къ плоскости изъ центра, называется *полярною осью*. Итакъ,



Фиг. 65.

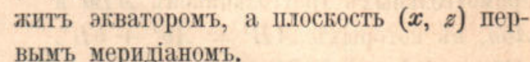
имѣется три «сферическія» координаты:

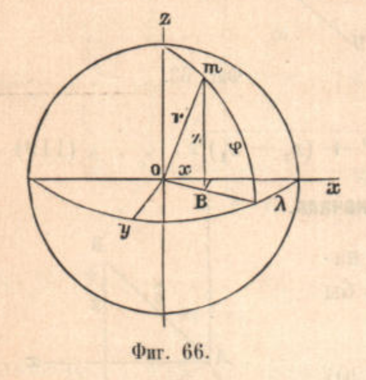
r радіусъ-векторъ,

λ долгота,

φ широта.

Преобразованіе сферическихъ координатъ въ Декартовы и обратно.

§ **84**. Очень часто приходится преобразовывать Декартовы координаты x, y, z въ такія сферическія r, λ, φ, въ которыхъ плоскость (x, y) слу-

житъ экваторомъ, а плоскость (x, z) первымъ меридіаномъ.



Фиг. 66.

Изъ чертежа (фиг. 66) видно, что $x = oB \cdot \cos\lambda$; $y = oB \cdot \sin\lambda$, тогда какъ изъ треугольника omB видимъ, что

$$oB = r \cdot \cos\varphi.$$

Слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ y &= r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ z &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots (121)$$

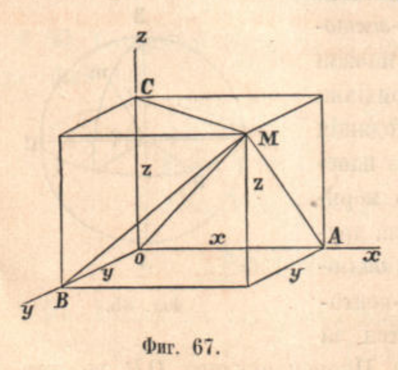
Эти формулы служатъ для перехода отъ Декартовыхъ координатъ x, y, z къ полярнымъ. Изъ нихъ не трудно вывести, для обратнаго перехода, формулы:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots\ldots\ldots (122)$$

$$tg\,\lambda = \frac{y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

$$\sin\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (124)$$

Свойство угловъ, составляемыхъ радіусомъ-векторомъ съ осями координатъ.



Фиг. 67.

§ **85**. Пусть r есть радіусъ-векторъ OM точки M (фиг. 67) и пусть α, β, γ суть углы, составляемые радіусомъ-векторомъ r съ осями координатъ. Замѣчая, что r есть діагональ параллелепипеда, у котораго ребра x, y, z сходятся въ o, мы видимъ, что треугольники oAM, oBM и oCM прямоугольны, потому что углы, находящіеся при вершинахъ ихъ A, B и C, суть прямые. Изъ этихъ треугольниковъ, по извѣстному въ тригонометріи соотношенію между катетомъ и

гипотенузой, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x = r\,.\,cos\,\alpha; \qquad & cos\,\alpha = \frac{x}{r} \\ y = r\,.\,cos\,\beta; \qquad & cos\,\beta = \frac{y}{r} \\ z = r\,.\,cos\,\gamma; \qquad & cos\,\gamma = \frac{z}{r} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (125)$$

Отсюда видно, что координаты точки суть проэкціи ея радіуса-вектора на оси координатъ (см. § 75).

Возводя равенства (125) почленно въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\,.\,cos^2\,\alpha + r^2\,.\,cos^2\,\beta + r^2\,.\,cos^2\,\gamma.$$

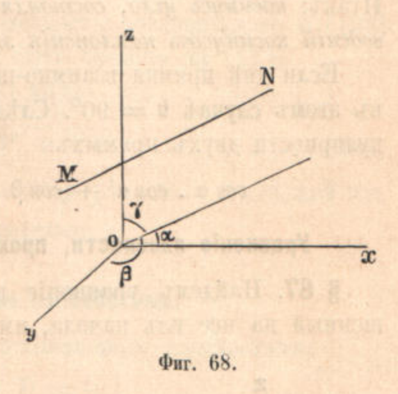
Пользуясь формулою (122) и выводя въ правой части только что написаннаго равенства r^2 за скобки, получимъ:

$$r^2 = r^2\,(cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma),$$

откуда:

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (126)$$

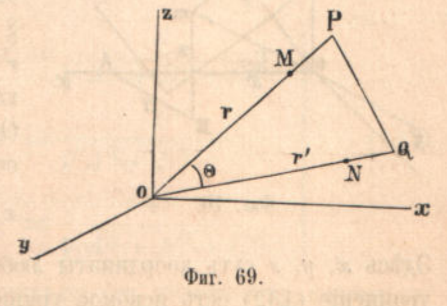
Углы, составляемые какою бы то ни было прямою (фиг. 68) MN съ осями, равны угламъ, составляемымъ съ осями прямою, проходящею чрезъ начало и параллельною прямой MN. Формула (126) показываетъ, слѣдовательно, что *сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ, всегда равна 1.* Формула (126) аналогична извѣстной тригонометрической формулѣ $sin^2\,\varphi + cos^2\,\varphi = 1$ и имѣетъ такое же важное значеніе. Величины: $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ называются *косинусами направленія прямой.*



Фиг. 68.

Опредѣленіе угла, составляемаго двумя прямыми по даннымъ косинусамъ наклоненія этихъ прямыхъ.

§ 86. Пусть OM и ON будутъ прямыя. Косинусы наклоненія прямой OM суть: $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$. Косинусы наклоненія прямой ON суть: $cos\,\alpha'$, $cos\,\beta'$, $cos\,\gamma'$. Требуется опредѣлить уголъ θ, заключенный между OM и ON (фиг. 69).



Фиг. 69.

Возьмемъ на данныхъ прямыхъ какія-либо точки P и Q. Обозначимъ координаты P чрезъ (x, y, z) и координаты точки Q чрезъ (x', y', z').

Изъ треугольника OPQ выводимъ (квадратъ стороны, лежащей противъ угла θ):

$$PQ^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (127)$$

По формулѣ (119) имѣемъ:

$$PQ^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (128)$$

Кромѣ того мы знаемъ по (122), что:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (129)$$

Раскрывъ скобки въ (128) и пользуясь формулами (127) и (129), получимъ:

$$rr' \cos\theta = xx' + yy' + zz',$$

откуда, пользуясь (125), получимъ:

$$\cos\theta = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma' \quad . \; . \; . \; . \; (130)$$

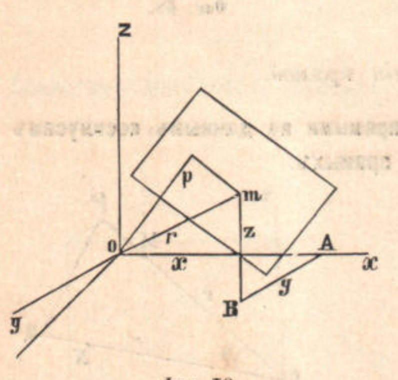
Итакъ: *косинусъ угла, составляемаго двумя прямыми, равенъ суммѣ произведенiй косинусовъ наклоненiя этихъ прямыхъ.*

Если двѣ прямыя взаимно-перпендикулярны, то $\cos\theta = 0$, потому что въ этомъ случаѣ $\theta = 90°$. Слѣдовательно въ случаѣ взаимной перпендикулярности двухъ прямыхъ:

$$\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (131)$$

Уравненiе плоскости, проходящей на разстоянiи p отъ начала.

§ 87. Найдемъ уравненiе плоскости, зная, что перпендикуляръ, опущенный на нее изъ начала, имѣетъ длину p и косинусы его наклоненiя суть: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (фиг. 70). Разсмотримъ многоугольникъ $OABm$, составленный координатами x, y, z какой нибудь точки m данной плоскости и ея радiусомъ-векторомъ, и приложимъ къ этому многоугольнику сказанное въ концѣ § 76-го слѣдующимъ образомъ: проэкцiя r на p есть само p, но кромѣ того она, какъ послѣдняя сторона многоугольника $OABm$, равна суммѣ проэкцiй на p остальныхъ сторонъ. Слѣдовательно:



Фиг. 70.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \quad . \; . \; (132)$$

Здѣсь x, y, z суть координаты любой точки m плоскости. Слѣдовательно, уравненiе (132) есть искомое уравненiе плоскости. Оно похоже на уравненiе (20) прямой.

Плоскость и прямая.

Всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ въ пространственныхъ координатахъ плоскость.

§ 88. Докажемъ, что всякое уравненіе 1-го порядка

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (133)$$

выражаетъ собою плоскость.

Дѣйствительно, уравненіе (133) можетъ быть приведено къ виду (132) если раздѣлимъ (133) почленно на R и положимъ:

$$A = R\,.\,cos\,\alpha;\quad B = R\,.\,cos\,\beta;\quad C = R\,.\,cos\,\gamma;\quad -\frac{D}{R} = p \quad \ldots (134)$$

потому, что тогда получимъ:

$$\frac{R\,cos\,\alpha}{R}x + \frac{R\,cos\,\beta}{R}y + \frac{R\,cos\,\gamma}{R}z = -\frac{D}{R}$$

или

$$x\,.\,cos\,\alpha + y\,.\,cos\,\beta + z\,.\,cos\,\gamma = p.$$

Но уравненіе (132) выражаетъ собою плоскость; слѣдовательно и (133) выражаетъ плоскость, потому что можетъ быть сведено на (132).

При этомъ изъ формулъ (134) и (126) видно, что

$$R = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (135)$$

Здѣсь мы даемъ радикалу такой знакъ, чтобы p, равное по послѣдней изъ формулъ (134) $\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, было положительно.

Уголъ, составляемый двумя плоскостями.

§ 89. Опредѣлимъ косинусъ угла θ, составляемаго плоскостями:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (136)$$

Изъ (134) и (135) слѣдуетъ, что перпендикуляры, опущенные изъ начала на плоскости (136), имѣютъ косинусы наклоненія, выражаемые формулами:

$$\left.\begin{aligned} cos\,\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\quad cos\,\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}; \\ cos\,\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\quad cos\,\beta' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}; \\ cos\,\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\quad cos\,\gamma' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (137)$$

Уголъ, составляемый этими перпендикулярами, равенъ углу, составляемому плоскостями, потому что стороны его перпендикулярны сторонамъ ли-

нейнаго угла, которымъ измѣряется двугранный уголъ, составляемый плоскостями (136). Но уголъ между перпендикулярами имѣетъ косинусъ, выражаемый формулою (130). Вставляя въ (130), вмѣсто косинусовъ, ихъ выраженія изъ (137), получимъ для искомаго угла θ, составляемаго плоскостями (136), формулу:

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \quad . \; . \; . \; . \; (138)$$

Условіе перпендикулярности двухъ плоскостей.

§ 90. Если плоскости (136) взаимно-перпендикулярны, то: $\theta = 90°$; $\cos 90° = 0$, и, слѣдовательно въ (138) числитель $= 0$, то есть:

$$AA' + BB' + CC' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (139)$$

Условіе параллельности двухъ плоскостей.

§ 91. Если плоскости (136) взаимно-параллельны, то: $\cos\theta = \cos 0° = 1$, и слѣдовательно, числитель въ (138) равенъ знаменателю, то есть:

$$[AA' + BB' + CC']^2 = [A^2 + B^2 + C^2]\,[A'^2 + B'^2 + C'^2],$$

или:

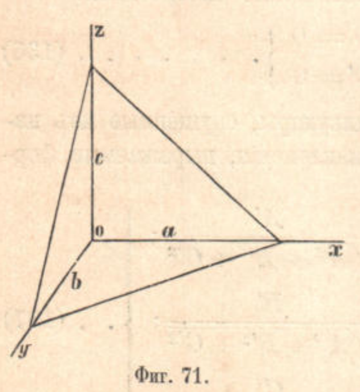
$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + 2AA'BB' + 2AA'CC' + 2BB'CC' = A^2A'^2 +$$
$$+ B^2B'^2 + C^2C'^2 + A^2B'^2 + A^2C'^2 + B^2A'^2 + B^2C'^2 + C^2A'^2 + C^2B'^2,$$

или: $$(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - A'B)^2 = 0.$$

Но сумма трехъ квадратовъ можетъ быть равна нулю только въ томъ случаѣ, если каждый квадратъ равенъ нулю, потому что каждый квадратъ положителенъ. Итакъ условіе параллельности плоскостей (136) будетъ таково:

$$BC' = CB'$$
$$CA' = AC'$$
$$AB' = A'B$$

или: $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad . \; . \; . \; . \; (140)$$



Фиг. 71.

Итакъ: *коэффиціенты параллельныхъ плоскостей пропорціональны между собою.*

Уравненіе плоскости, отсѣкающей на осяхъ отрѣзки a, b, c.

§ 92. Опредѣлимъ уравненіе плоскости, отсѣкающей на осяхъ отрѣзки: a, b, c (фиг. 71).

Отрѣзокъ a на оси x получится, дѣлая въ уравненіи

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (141)$$

$y = 0$; $z = 0$, причемъ получимъ $Aa + D = 0$, откуда $A = -\frac{D}{a}$. Точно такъ же получимъ: $B = -\frac{D}{b}$; $C = -\frac{D}{c}$. Вставляя эти величины, вмѣсто A, B и C, въ (141), получимъ искомое уравненіе:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (142)$$

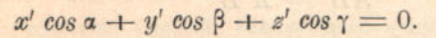
сходное съ уравненіемъ (12) прямой.

Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$.

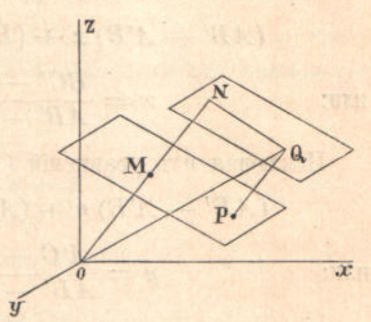
§ 93. Опредѣлимъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь точки (x', y', z'), которую мы назовемъ Q, на плоскость

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p.$$

Проведемъ (фиг. 72) чрезъ (x', y', z') плоскость, параллельную данной и опустимъ на обѣ эти плоскости перпендикуляръ изъ начала. Эти параллельныя плоскости отсѣкутъ на немъ часть MN, равную искомому перпендикуляру PQ. Но ON, какъ преэкція радіуса-вектора OQ на ON, равна (см. конецъ § 76-го):



$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma = 0.$$



Фиг. 72.

Слѣдовательно:

$$PQ = MN = ON - OM = ON - p = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p.$$

Итакъ искомая длина есть:

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

Еслибы p было больше ON, то есть еслибы точка (x', y', z') лежала по ту же сторону отъ данной плоскости какъ начало, то искомая длина перпендикуляра была бы:

$$p - (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (144)$$

Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

§ 94. Переходя, при помощи формулъ (134) и (135) отъ уравненія $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = p$ плоскости къ уравненію

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

получимъ для длины перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ формулу

$$\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^- + B^2 + C}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (145)$$

Примѣръ. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (2, 5, — 4) на плоскость: $x + 3y - 2z + 3 = 0$ будетъ:

$$\frac{1 . 2 + 3 . 5 + 2 . 4 + 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^3}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}.$$

Выраженіе прямой двумя уравненіями.

§ 95. Всякая линія (см. § 71) разсматривается какъ пересѣченіе двухъ поверхностей. Прямая разсматривается какъ пересѣченіе двухъ плоскостей и потому представляется совокупностью двухъ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (146)$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій y. Получимъ

$$(AB' - A'B)\,x + (B'C - BC')\,z + B'D - BD' = 0,$$

или:

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}\,z + \frac{BD' - B'D}{AB' - A'B} \ldots\ldots\ldots (147)$$

Исключая изъ уравненій (146) перемѣнное x, получимъ:

$$(AB' - A'B)\,y + (AC' - A'C)\,z + AD' - A'D = 0,$$

или:

$$y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}\,z + \frac{A'D - AD'}{AB' - A'B} \ldots\ldots\ldots (148)$$

Называя въ (147) и (148) коэффиціенты и постоянные члены маленькими буквами, замѣчаемъ, что уравненіе (147) и (148), которыми можетъ быть замѣнена совокупность уравненій (146), имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{array}{l} x = az + a' \\ y = bz + b' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (149)$$

Итакъ прямая линія можетъ быть выражена совокупностью уравненій вида (149).

Уравненіе прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку (x', y', z').

§ 96. Если прямая, выраженная совокупностью уравненій (146), проходитъ чрезъ данную точку (x', y', z'), то координаты этой точки удовлетворяютъ уравненіямъ (146) и потому окажутся вѣрными равенства:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$
$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0.$$

Вычитая, соотвѣтственно, эти равенства изъ уравненій (146), получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} A\,(x - x') + B\,(y - y') + C\,(z - z') = 0 \\ A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0 \end{array}\right\} \ldots (150)$$

Раздѣливъ каждое изъ этихъ уравненій на $(z - z')$ и опредѣляя изъ

полученныхъ послѣ такого раздѣленія уравненій величины $\frac{x-x'}{z-z'}$ и $\frac{y-y'}{z-z'}$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x'}{z-z'} &= \frac{BC'-B'C}{AB'-A'B} \\ \frac{y-y'}{z-z'} &= \frac{A'C-AC'}{AB'-A'B} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Положимъ, для краткости:

$$BC'-B'C=a;\; A'C-AC'=b;\; AB'-A'B=c.$$

Тогда можно представить уравненія (151) въ видѣ:

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

Всякая прямая, проходящая чрезъ точку (x', y', z'), выражается уравненіями (152). Величины a, b, c называются *коэффиціентами наклоненія* прямой, выраженной уравненіями (152).

Напримѣръ уравненія:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{7}$$

выражаютъ собою прямую, проходящую чрезъ точку (3, 1, —2).

Уравненія прямой, проходящей чрезъ точки (x', y', z') и (x'', y'', z'').

§ 97. Если прямая, проходя чрезъ точку (x', y', z'), проходитъ еще и чрезъ точку (x'', y'', z''), то координаты x'', y'', z'' должны удовлетворять уравненіямъ (152), и потому должны оказаться вѣрными равенства:

$$\frac{x''-x'}{a}=\frac{y''-y'}{b}=\frac{z''-z'}{c}.$$

Дѣля почленно на эти равенства уравненія (152), получимъ:

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

Итакъ уравненія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки, имѣетъ видъ (153).

Напримѣръ, уравненія прямой, проходящей чрезъ точки: (2, —1, 5) и (3, 2, —4), будутъ:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-9}$$

или, послѣ приведенія къ одному знаменателю:

$$\begin{aligned} -9x-18 &= z-5 \\ -9y-9 &= 3z-15. \end{aligned}$$

Эти уравненія не трудно привести къ виду:

$$x = -\frac{1}{9}z - \frac{13}{9}$$

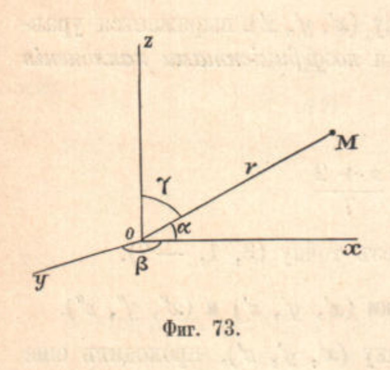
$$y = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\cdot$$

сходному съ видомъ (149).

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x', y', z') и составляющей съ осями углы: α, β, γ.

§ 98. Всѣ прямыя, проходящія чрезъ точку (x', y', z'), отличаются между собою только своимъ направленіемъ; уравненія же ихъ имѣютъ видъ (152) и отличаются одни отъ другихъ только величинами a, b, c. Поэтому полагая въ уравненіяхъ (152): $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, получимъ уравненіе прямой, проведенной чрезъ начало (0, 0, 0) параллельно прямой (152). Это уравненіе прямой, проведенной чрезъ начало будетъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (154)$$



Фиг. 73.

Пусть α, β, γ суть углы наклоненіе прямой (152) и слѣдовательно такъ же и прямой (154) къ осямъ. Отложимъ на прямой (154) (фиг. 73) отъ начала длину r. Тогда координаты (x, y, z) конца M этого отрѣзка будутъ удовлетворять равенствамъ (125): $x = r\,.\,\cos\alpha$; $y = r\,.\,\cos\beta$; $z = r\,.\,\cos\gamma$. Но точка M лежитъ на прямой (154) и потому координаты ея удовлетворяютъ уравненію (154), то есть справедливы равенства:

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = r. \quad \ldots\ldots\ldots (155)$$

Опредѣляя отсюда a, b, c, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\cos\alpha}{r} \\ b &= \frac{\cos\beta}{r} \\ c &= \frac{\cos\gamma}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (156)$$

Вставляя вмѣсто a, b, c въ (152) ихъ величины изъ (156), получимъ:

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots (157)$$

Это и есть уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x', y', z') и составляющей съ осями углы: α, β, γ.

Замѣтимъ, что изъ равенствъ (156) слѣдуетъ:

$$r = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+\gamma^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

Итакъ уравненіе (152) представляетъ собою прямую, проходящую чрезъ точку (x', y', z') и наклоненную къ осямъ подъ углами α, β, γ, опредѣляемыми изъ формулъ (158).

Уголъ, составляемый двумя прямыми.

§ 99. Если имѣемъ двѣ прямыя:

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}$$

$$\frac{x-x''}{\cos\alpha'} = \frac{y-y''}{\cos\beta'} = \frac{z-z''}{\cos\gamma'};$$

то пользуясь формулами (130) заключаемъ, что косинусъ угла θ, составляемаго этими прямыми, будетъ:

$$\cos\theta = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma' \ldots \quad (159)$$

Подставляя сюда вмѣсто косинусовъ ихъ величины, опредѣляемыя по формуламъ (158), видимъ, что косинусъ угла θ, составляемаго прямыми

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x'}{a} = \dfrac{y-y'}{b} = \dfrac{z-z'}{c} \\ \dfrac{x-x''}{a'} = \dfrac{y-y'}{b'} = \dfrac{z-z'}{c'} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (160)$$

будетъ:

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \ldots\ldots \quad (161)$$

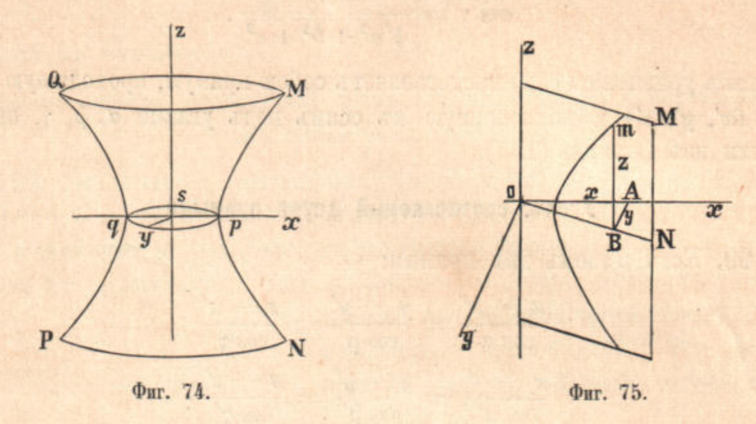
Поверхности второго порядка.

Познакомимся теперь съ наиболѣе интересными поверхностями.

Гиперболоидъ вращенія объ одной полости.

§ 100. Если будемъ вращать (фиг. 74) гиперболу около ея мнимой оси oz, то она опишетъ поверхность $MNPQ$, называемую *гиперболоидомъ вращенія объ одной полости.* На чертежѣ, для его ясности, эта поверхность ограничена плоскостями QM и PN, но поверхность эта простирается въ безконечность какъ и гипербола, вращеніемъ которой она была образована.

Выведемъ уравненіе этой поверхности. Для этого разсмотримъ соотношенія, существующія между координатами точки m гиперболы въ тотъ моментъ (фиг. 75), когда гипербола вышла изъ плоскости (x, z) и находится въ нѣкоторой плоскости OMN. Точка m, принадлежа вращаемой



Фиг. 74. Фиг. 75.

около оси z гиперболѣ, принадлежитъ очевидно и образованному такимъ вращеніемъ гиперболоиду. По свойству гиперболы (см. (69)):

$$\frac{OB^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Но $OB^2 = x^2 + y^2$. Слѣдовательно

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

Это и есть искомое уравненіе гиперболоида вращенія объ одной полости, происшедшаго отъ вращенія около оси oz такой гиперболы, для которой ось oz есть мнимая ось.

Сѣченіе pqs (фиг. 74) такого гиперболоида плоскостью (x, y) называется *горловымъ кругомъ*. Ось oz называется осью вращенія.

Прямолинейныя образующія гиперболоида вращенія.

§ 101. Пересѣчемъ гиперболоидъ плоскостью

$$x = a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

параллельною плоскости (y, z) и находящеюся на разстояніи a отъ начала. Въ сѣченіи получимъ фигуру, выражаемую совокупностью уравненій (162) и (163). Подставляя вмѣсто x въ (162) его величину a изъ (163), получимъ:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (164)$$

или:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (165)$$

Припоминая формулу «разности квадратовъ», получимъ изъ (165):

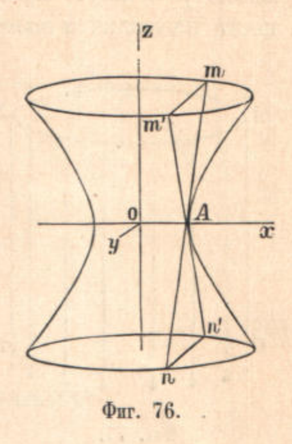
$$\left(\frac{y}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{a}-\frac{z}{c}\right)=0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (166)$$

Это уравненіе справедливо или при

$$\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=0, \quad . \ . \ . \ . \ (167)$$

или при:

$$\frac{y}{a}-\frac{z}{c}=0. \quad . \ . \ . \ . \ (168)$$



Фиг. 76.

Итакъ въ сѣченіи получается или фигура, выражаемая совокупностью уравненій (163) и (167) или фигура, выражаемая совокупностью уравненій (163) и (168). И та, и другая фигуры суть прямыя линіи потому, что уравненія (163), (167) и (168) всѣ перваго порядка. Эти прямыя обозначены на чертежѣ (фиг. 76) линіями mn и $m'n'$. Гиперболоидъ нашъ, какъ тѣло вращенія, симметриченъ относительно оси z. Повертывая его около этой оси, мы во всякомъ его положеніи нашли бы въ сѣченіи его плоскостью $mm'nn'$ пару прямыхъ. Слѣдовательно весь онъ состоитъ изъ прямолинейныхъ образующихъ (фиг. 78 и 79).

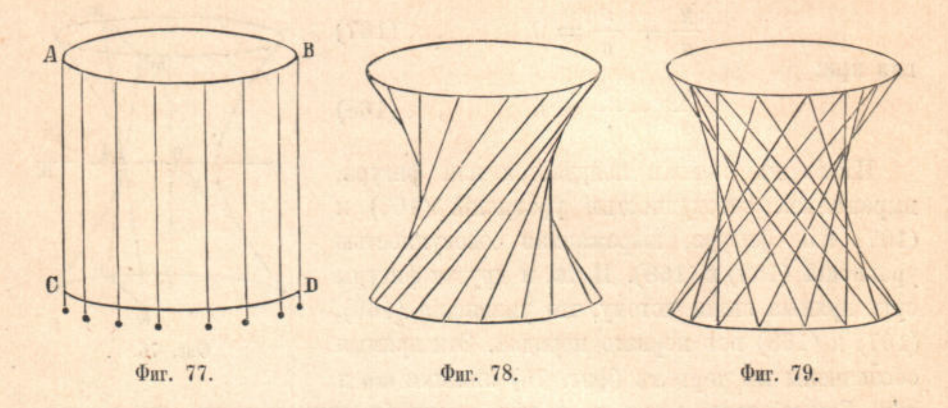
Модель гиперболоида вращенія объ одной полости.

§ 102. Для уясненія вида такого гиперболоида лучше всего приготовить себѣ его модель слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ два одинаковыхъ круга, деревянныхъ или металлическихъ, и продѣлаемъ въ нихъ рядъ отверстій, расположенныхъ по окружностямъ въ одинаковомъ разстояніи одно отъ другого. Положимъ круги одинъ на другой такъ, чтобы отверзтія одного круга приходились надъ отверзтіями другого, продѣнемъ сквозь каждую пару отверзтій нити, закрѣпимъ ихъ у верхняго круга, а на нижніе концы нитей надѣнемъ грузы. Раздвинувъ круги, увидимъ, что нити расположились по поверхности прямого круглаго цилиндра, и если сдѣлано было достаточное число отверзтій, то форма цилиндра (фиг. 77) достаточно выяснится. Повернемъ теперь кругъ CD въ его плоскости на нѣкоторый уголъ, тогда нити пойдутъ наклонно къ кругамъ и расположатся по поверхности гиперболоида вращенія объ одной полости (фиг. 78). Поверхность гиперболоида вырисуется тѣмъ яснѣе, чѣмъ большее число нитей имѣется въ модели.

Въ элементарной геометріи описываются только двѣ *линейчатыя* поверхности (образованныя прямыми линіями): цилиндръ и конусъ. Разсматриваемый гиперболоидъ, какъ мы видѣли, тоже линейчатая поверхность. Цилиндръ и конусъ можно согнуть изъ листа бумаги и наоборотъ разогнуть на плоскость, разрѣзавъ предварительно по одной изъ образующихъ.

Съ гиперболоидомъ этого нельзя сдѣлать, какъ и съ поверхностью шара. Поверхности, образованныя прямыми, называются *линейчатыми*. Линейчатыя поверхности бываютъ такія (какъ цилиндръ и конусъ), которыя можно развернуть на плоскость безъ складокъ и разрывовъ; эти поверхности называются *развертывающимися*. Линейчатыя поверхности бываютъ



Фиг. 77. Фиг. 78. Фиг. 79.

и такія (какъ гиперболоидъ), которыя нельзя развернуть на плоскость безъ складокъ и разрывовъ. Эти поверхности называются *косыми*.

Кромѣ образующихъ семейства *mn* (фиг. 76) существуетъ на гиперболоидѣ и другое семейство образующихъ *m'n'* (фиг. 76). Оба семейства образующихъ изображены на чертежѣ (фиг. 79). Если кругъ CD модели (фиг. 77) повернемъ въ обратную, противъ прежняго, сторону на тотъ же уголъ, то получимъ тотъ же гиперболоидъ (фиг. 78), но составленный изъ образующихъ другого семейства. На (фиг. 79) оба эти семейства образующихъ видны.

Гиперболоидъ объ одной полости.

§ 103. Уравненіемъ

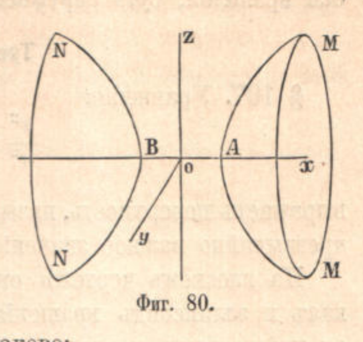
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

въ которомъ коэффиціенты при x^2 и при y^2 неодинаковы, опредѣляется поверхность, похожая на гиперболоидъ, опредѣляемый уравненіемъ (162) и отличающаяся только тѣмъ, что сѣченія, образуемыя плоскостями, параллельными плоскости (x, y), въ гиперболоидѣ (162) суть окружности; сѣченія же поверхности (169) такими плоскостями суть эллипсы. Такая поверхность (169) называется *гиперболоидомъ объ одной полости* (безъ прибавленія слова «вращенія») или *трехъ-оснымъ гиперболоидомъ*, потому что онъ отсѣкаетъ на осяхъ x и y отрѣзки различной длины, называемые полуосями OA и OB. Тогда какъ въ гиперболоидѣ вращенія всѣ оси, лежащія въ плоскости горлового круга, одинаковы.

Гиперболоидъ вращенія о двухъ полостяхъ.

§ 104. Если вращать гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$



Фиг. 80.

около дѣйствительной оси x, то получимъ поверхность (фиг. 80) съ двумя полостями AM и BN, простирающимися въ безконечность. На чертежѣ онѣ для ясности ограничены плоскостями MM и NN. Уравненіе такой поверхности, называемой *гиперболоидомъ вращенія съ двумя полостями*, таково:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

Трехосный гиперболоидъ о двухъ полостяхъ.

§ 105. Поверхность

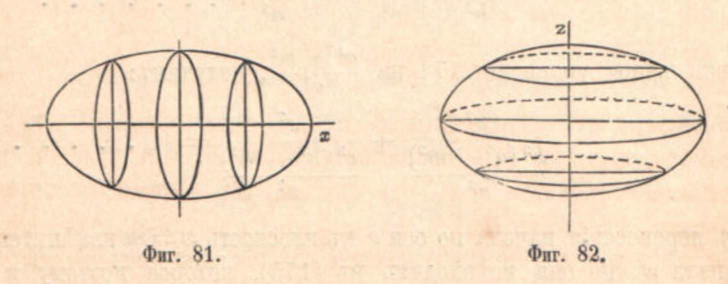
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

отличается отъ (170) тѣмъ, что сѣченія ея плоскостями, параллельными плоскости (y, z), не круговыя, а эллиптическія. Поверхности (170) и (171) *не* линейчатыя, то есть не могутъ быть образованы прямыми (см. подробные курсы).

Эллипсоиды вращенія.

§ 106. Отъ вращенія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ около его большой оси получается поверхность (фиг. 81), называемая *удлиненнымъ эллипсоидомъ вращенія*.

Отъ вращенія того же эллипса около малой оси получается поверхность, называемая *сплюснутымъ эллипсоидомъ вращенія*.



Фиг. 81. Фиг. 82.

Не трудно вывести уравненіе эллипсоида вращенія около оси x напримѣръ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

Онъ будетъ удлинненный, если $a > b$ и сплюснутый, если $a < b$.

Въ эллипсоидѣ вращенія всѣ сѣченія плоскостями, перпендикулярными оси вращенія, суть окружности.

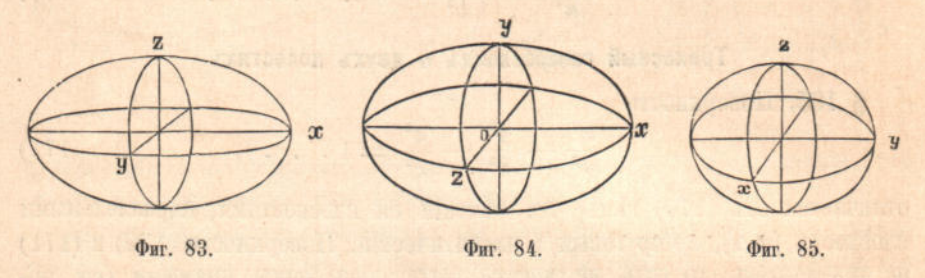
Трехосный эллипсоидъ.

§ 107. Уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (173)$$

выражаетъ поверхность, называемую трехоснымъ эллипсоидомъ. Она имѣетъ чрезвычайно важное значеніе въ механикѣ и физикѣ.

На плоскомъ чертежѣ она изображается въ томъ же видѣ (фиг. 81), какъ и эллипсоидъ вращенія, но отличается отъ него тѣмъ, что сѣченія ея плоскостями, перпендикулярными къ какой бы то ни было изъ осей, не круговыя, а эллиптическія. Видъ такого трехоснаго эллипсоида изо-



Фиг. 83. Фиг. 84. Фиг. 85.

браженъ на фиг. 83 со стороны оси y; на фиг. 84 — со стороны оси z и на фиг. 85—со стороны оси x, если $a > b > c$.

Докажемъ, что сѣченіе его плоскостью $x = m$, перпендикулярною оси x, будетъ эллипсъ. Подставляя въ (173) m вмѣсто x, получимъ:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (174)$$

Дѣля всѣ члены уравненія 174 на $\frac{a^2 - m^2}{a^2}$, получимъ:

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2 - m^2)}{a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2(a^2 - m^2)}{a^2}} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots (175$$

Отъ перенесенія начала по оси x въ плоскость $x = m$ измѣнится только координата x', но она не входитъ въ (175), которое поэтому и будетъ уравненіемъ плоскаго сѣченія. Уравненіе (175) представляетъ собою (какъ это видно изъ сравненія его съ (48)) эллипсъ съ осями $\frac{2b\sqrt{a^2 - m^2}}{a}$ и $\frac{2c\sqrt{a^2 - m^2}}{a}$. Отношеніе этихъ осей равно $\frac{b}{c}$, каково бы ни было m, то есть на какомъ бы разстояніи отъ начала мы не пересѣкали эллип-

соидъ плоскостью, перпендикулярною оси x. Эллипсы, имѣющіе одинаковое отношеніе между осями, называются *подобными* между собою. Совершенно къ такимъ же результатамъ мы пришли бы, пересѣкая эллипсоидъ плоскостями, перпендикулярными къ осямъ y и z. Только отношенія осей были бы $\frac{a}{c}$ и $\frac{a}{b}$.

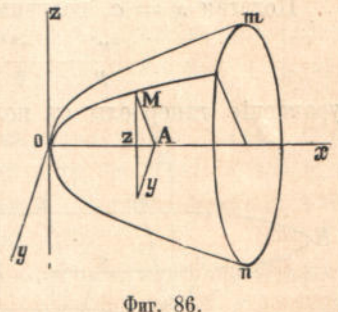
Итакъ сѣченія трехоснаго эллипсоида плоскостями, перпендикулярными его осямъ, суть эллипсы.

Если $a > b > c$, то осямъ даются такія названія: $2a$ большая ось, $2b$ средняя ось, $2c$ малая ось.

Параболоидъ вращенія.

§ 108. Если вращать параболу *mon* (фиг. 86) около ея оси, то получимъ поверхность, называемую параболоидомъ вращенія. Для вывода его уравненія замѣтимъ, что координаты точки M параболы OM (фиг. 86), лежащей въ плоскости OAM, будутъ OA и AM и что, согласно (76), уравненіе между ними будетъ таково:

$$AM^2 = 2p \,.\, OA.$$



Фиг. 86.

Но въ пространственныхъ координатахъ: $AM^2 = y^2 + z^2$; $OA = x$. Итакъ между пространственными координатами точки M параболоида существуетъ уравненіе:

$$y^2 + z^2 = 2px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (176)$$

Это и есть уравненіе параболоида вращенія.

Эллиптическій параболоидъ.

§ 109. Уравненіе

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (177)$$

выражаетъ поверхность, называемую эллиптическимъ параболоидомъ и отличающуюся отъ (176) тѣмъ, что въ ней сѣченія плоскостями, перпендикулярными оси, не круговыя, а эллиптическія.

Гиперболическій параболоидъ.

§ 110. Разсмотримъ поверхность, выражаемую уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (178)$$

Чтобы узнать какое сѣченіе образуетъ она съ плоскостью (y, z), положимъ въ (178) $x = 0$. Получимъ $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$ или: $\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 0.$

Это уравненіе удовлетворяется или при

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \qquad (179)$$

или при

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0. \qquad (180)$$

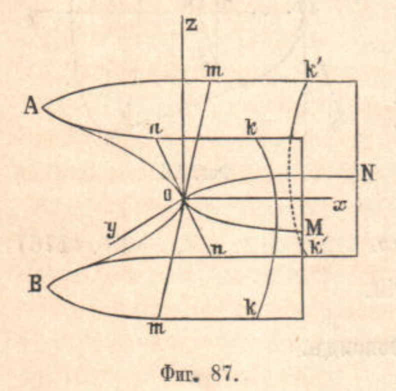
Уравненія (179) и (180) выражаютъ собою прямыя. Итакъ въ сѣченіи съ плоскостью (y, z) получаются двѣ прямыя mm и nn' (фиг. 87).

Полагая z равнымъ какому нибудь постоянному, напримѣръ $z = c$, получимъ изъ (178): $y^2 = 2px + \frac{pc^2}{q}$ уравненіе параболы, потому что преобразованіемъ $x = x_1 - \frac{c^2}{2q}$ оно приведется къ виду $y = 2px_1$. Значитъ сѣченія поверхности (178) плоскостями, параллельными плоскости (x, y), суть параболы.

Полагая $x = a$, получимъ изъ (178):

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2a, \text{ или: } \frac{y^2}{2ap} - \frac{z^2}{2aq} = 1$$

уравненіе гиперболы съ полуосями: $\sqrt{2ap}$ и $\sqrt{2aq}$. Итакъ, сѣченія поверхности плоскостями $x = a$, параллельными плоскости (y, z), суть гиперболы, напримѣръ $kkk'k'$ (фиг. 87).

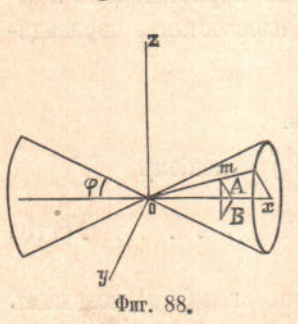


Фиг. 87.

Полагая въ (178): $y = 0$, получимъ: $z^2 = -2qx$ параболу, обращенную въ сторону отрицательныхъ x. Таково сѣченіе поверхности плоскостью (z, x), обозначенное на чертежѣ буквами AOB (фиг. 87).

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что поверхность (178) имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 87)—вродѣ сѣдла; только всѣ упомянутыя параболическія ея сѣченія распространяются въ безконечность, такъ что и самая поверхность распространяется въ безконечность; на чертежѣ мы ее ограничили разными плоскостями, чтобы выяснить ея видъ.

Эта поверхность, имѣющая параболическія, гиперболическія и прямолинейныя сѣченія, называется *гиперболическимъ параболоидомъ*.



Фиг. 88.

Поверхность прямого круглаго конуса.

§ 111. Посмотримъ, какимъ уравненіемъ выражается поверхность прямого круглаго конуса (извѣстнаго изъ элементарной геометріи), ось котораго (фиг. 88) направлена по оси x. Положимъ, что образующая составляетъ съ осью уголъ φ. Возьмемъ какую

нибудь образующую, не лежащую въ плоскости (x, z) и на ней точку m. Опредѣливъ зависимость между координатами (x, y, z) точки m, очевидно принадлежащей конусу, получимъ его уравненіе. Образующая Om составляетъ съ осью x тоже уголъ φ. Изъ треугольника OAm имѣемъ $Am = OA \,.\, tg\,\varphi$. Но $Am = \sqrt{y^2 + z^2}$; $OA = x$. Слѣдовательно $\sqrt{y^2 + z^2} = x \,.\, tg\,\varphi$. Возвышая обѣ части этого уравненія въ квадратъ, получимъ уравненіе конуса:

$$y^2 + z^2 = x^2 \,.\, tg^2\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (181)$$

Здѣсь $tg\,\varphi$ есть величина постоянная.

Конусы 2-го порядка.

§ 112. Уравненіе:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x^2 \,.\, tg\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (182)$$

выражаетъ собою поверхность, отличающуюся отъ круглаго конуса (181) тѣмъ, что у нея сѣченія плоскостями, параллельными плоскости (y, z), не круговыя, а эллиптическія.

Вообще, поверхность, образованная такимъ движеніемъ прямой, при которомъ она, проходя постоянно чрезъ одну и ту же точку, опирается на какую-нибудь плоскую кривую 2-го порядка—эллипсъ, параболу или гиперболу, называется конусомъ 2-го порядка.

Если вершина такого конуса удалена въ безконечность, то образующія взаимно-параллельны, и получается цилиндръ, который разсматривается какъ частный случай конуса.

Поверхности 2-го порядка.

§ 113. Въ подробныхъ курсахъ аналитической геометріи доказывается, что уравненіе 2-го порядка между координатами пространственными представляетъ собою одну изъ слѣдующихъ поверхностей: эллипсоидъ, гиперболоидъ объ одной полости, гиперболоидъ о двухъ полостяхъ, эллиптическій параболоидъ, гиперболическій параболоидъ. Эти поверхности называются поверхностями 2-го порядка. При этомъ, какъ частные случаи этихъ поверхностей, могутъ получиться: конусъ 2-го порядка, пара плоскостей, прямая, сфера, точка и мнимая поверхность. Напримѣръ точку можно разсматривать какъ эллипсоидъ съ безконечно-малыми осями; прямую — какъ безконечно тонкій цилиндръ.

Тамъ же показывается, по какимъ признакамъ узнается, къ какому изъ упомянутыхъ видовъ относится поверхность, выражаемая даннымъ уравненіемъ 2-го порядка. Доказывается также, что изъ всѣхъ поверхностей 2-го порядка только: пары плоскостей, конусы, цилиндры, гиперболоидъ объ одной полости и гиперболическій параболоидъ, суть линейчатыя. Поверхности вращенія считаются частными случаями трехъ-осныхъ поверхностей.

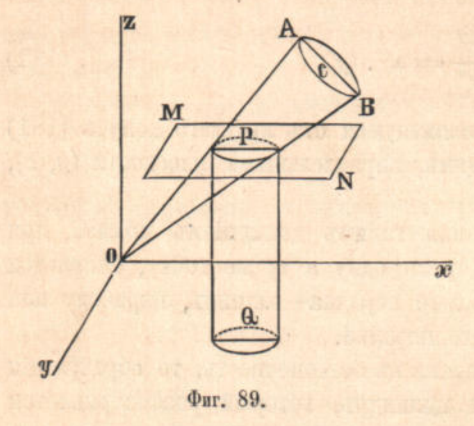
Коническія сѣченія.

§ 114. Всѣ кривыя 2-го порядка, и ихъ частные случаи, можно получить, пересѣкая по различнымъ направленіямъ прямой круглый конусъ. Докажемъ это.

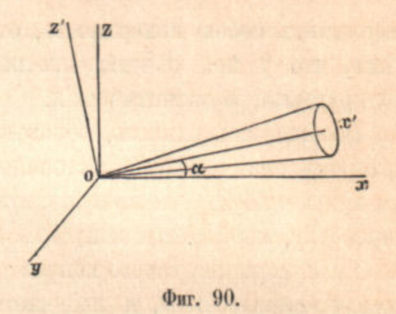
Будемъ наклонять конусъ AOB (фиг. 89) такъ, чтобы его ось OC составляла различные углы съ осью x, оставаясь въ плоскости (x, z) и пересѣкать его затѣмъ плоскостью MN, параллельною плоскости (x, y).

Прежде всего найдемъ уравненіе такимъ образомъ расположеннаго конуса. Назовемъ чрезъ φ уголъ, составляемый его осью съ образующею, и чрезъ α—уголъ наклоненія его оси OC къ оси x.

Изберемъ другую систему осей



Фиг. 89.



Фиг. 90.

координатъ, въ которой ось x' совпадала бы съ осью конуса, ось y' съ осью y и z' была бы перпендикулярна къ осямъ x' и y'. Въ такой системѣ уравненіе нашего конуса, согласно съ (181), будетъ:

$$y^2 + z'^2 = x'^2 \, . \, tg^2 \varphi \, . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (183)$$

Но намъ хочется вывести уравненіе конуса въ системѣ (x, y, z). Такъ какъ ось y въ обѣихъ системахъ одинакова, то формулы преобразованія будутъ тѣ же (92) и (93), что и для плоскихъ координатъ (x, z), только въ нихъ надо вмѣсто y поставить z и замѣтить, что переходимъ отъ (x', z') къ (x, z) и что поворачиваемъ систему (x', z') при этомъ на уголъ $(-\alpha)$. Итакъ формулы преобразованія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + z \sin\alpha \\ z' &= -x \sin\alpha + z \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (184)$$

Вставляя въ (183) вмѣсто x' и z' величины, опредѣляемыя изъ (184), получимъ:

$$y^2 + (z \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 = (x \cos\alpha + z \sin\alpha)^2 \, . \, tg \; \varphi . \quad . \; . \quad (185)$$

Таково уравненіе конуса относительно осей (x, y, z). Пересѣчемъ конусъ

плоскостью MN, уравненіе которой есть

$$z = a, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (186)$$

гдѣ s разстояніе плоскости MN отъ начала.

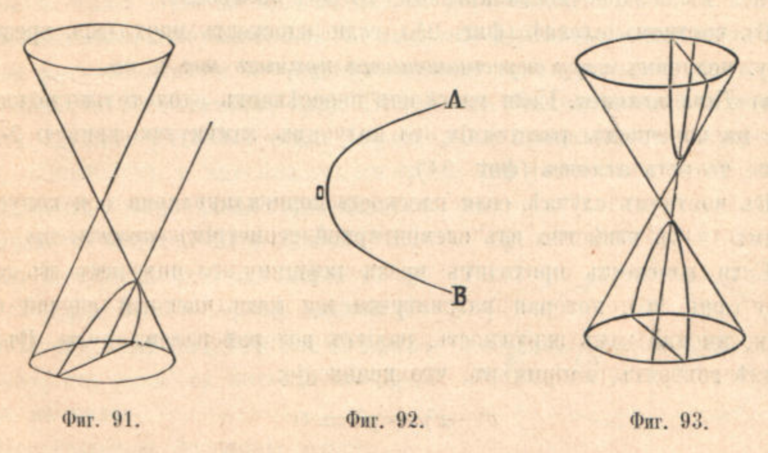
Если вставимъ въ (185) вмѣсто z величину a, то получимъ:

$$y^2 + (a \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 = (x \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha)^2 \cdot tg^2 \varphi \ldots \quad (187)$$

Согласно § 72-му уравненіе выражаетъ собою въ пространственныхъ координатахъ цилиндръ PQ (фиг. 89). Оно же выражаетъ въ плоскостныхъ координатахъ на плоскости (x, y) проэкцію a разсматриваемаго сѣченія, которая равна самому сѣченію. Итакъ, уравненіе разсматриваемаго сѣченія есть (187). Оно 2-го порядка относительно координатъ (x, y). Значитъ: *сѣченіе круглаго конуса плоскостью есть кривая 2-го порядка.* Замѣтимъ, что, благодаря произвольности угловъ φ и α и разстоянія a, въ настоящее разсмотрѣніе входятъ всевозможныя сѣченія по всевозможнымъ направленіямъ и въ любомъ разстояніи отъ вершины всевозможныхъ круглыхъ конусовъ.

Теперь можно было бы аналитически (то есть вычисленіями) показать, въ какомъ случаѣ получается тотъ или другой типъ кривой 2-го порядка. Но мы сдѣлаемъ это при помощи простыхъ соображеній, зная что кривая получается 2-го порядка и соображаясь со сказаннымъ въ § 62.

а) *Типъ параболы.* Если *плоскость параллельна одной изъ образующихъ* конуса, то она пересѣкаетъ на конечномъ разстояніи только одну изъ полостей конуса, сходящихся въ вершинѣ. Но сѣченіе при этомъ получается распространяющееся въ безконечность. Итакъ кривая получается



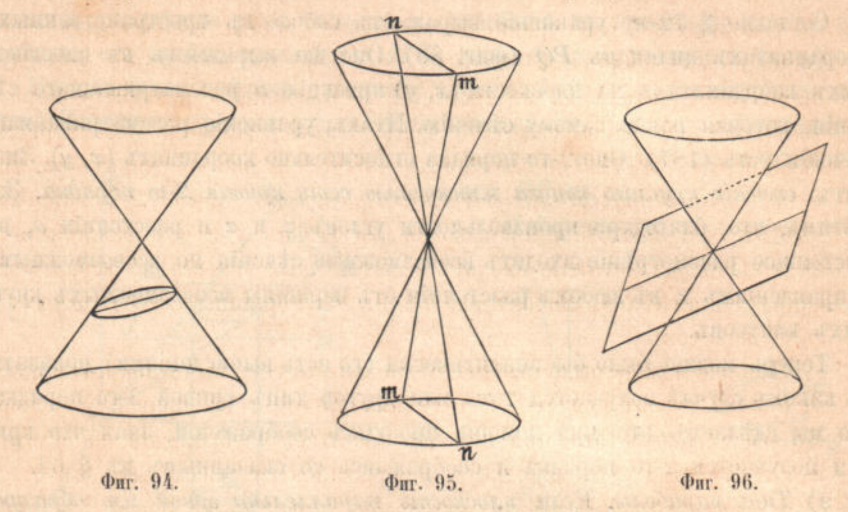
Фиг. 91. Фиг. 92. Фиг. 93.

съ одною безконечно-распространяющеюся вѣтвью. Притомъ, по доказанному выше, она 2-го порядка. Слѣдовательно, это—*парабола* (фиг. 91).

Въ частномъ случаѣ, когда разстояніе между плоскостью и параллельною ей образующею уменьшено до нуля, получимъ *пару совпадающихъ прямыхъ*, идущихъ по этой образующей. Мы говоримъ *пару* прямыхъ, по-

тому что, съ приближеніемъ плоскости къ образующей, *двѣ* стороны параболы OA и OB (фиг. 92) сближаются и выпрямляются. Это вытекаетъ и изъ анализа, такъ какъ парабола $y^2 = 2px$ при $p = 0$ обращается въ $y^2 = 0$, а это уравненіе разбивается на два $+y = 0$ и $-y = 0$.

б) *Типъ гиперболы.* Какъ только выведемъ сѣкущую плоскость изъ положенія, параллельнаго какой бы то ни было образующей, такъ она либо



Фиг. 94. Фиг. 95. Фиг. 96.

пересѣчетъ обѣ полости (фиг. 93), либо только одну, но уже на конечномъ разстояніи (фиг. 94).

Въ первомъ случаѣ (фиг. 93) получимъ кривую съ двумя простирающимися въ безконечность вѣтвями, то есть *гиперболу*.

Въ частномъ случаѣ (фиг. 95), если плоскость проходитъ чрезъ вершину, получимъ *пару пересѣкающихся прямыхъ* mm и nn.

в) *Типъ эллипса.* Если плоскость пересѣкаетъ одну только полость конуса на конечномъ разстояніи, то получимъ замкнутую кривую 2-го порядка, то есть *эллипсъ* (фиг. 94).

Въ частномъ случаѣ, если плоскость перпендикулярна оси конуса, получимъ (какъ извѣстно изъ элементарной геометріи) *окружность*.

Если плоскость проходитъ чрезъ вершину, то получимъ въ сѣченіи точку (фиг. 96), которая разсматривается какъ частный случай окружности, именно какъ окружность, радіусъ которой равенъ нулю. Въ этомъ смыслѣ говорятъ, напримѣръ, что уравненіе:

$$x^2 + y^2 = 0$$

выражаетъ точку, то есть окружность

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

въ которой радіусъ $R = 0$.

Часть II.

Основанія анализа безконечно-малыхъ.

ГЛАВА I.

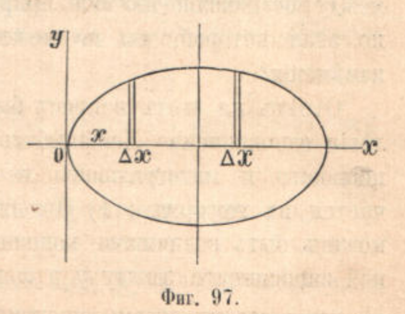
Дифференціальное исчисленіе.

Функціи одного перемѣннаго.

Вступленіе.

§ 115. Математика занимается, главнѣйшимъ образомъ, изслѣдованіемъ зависимости, существующей между различными величинами — изслѣдованіемъ того, какъ измѣняются однѣ величины съ измѣненіемъ другихъ. Особенный интересъ въ этомъ отношеніи представляютъ функціи, непрерывно измѣняющіяся при непрерывномъ измѣненіи независимыхъ перемѣнныхъ. Такія функціи называются *непрерывными*.

Безконечно-малою величиною называется перемѣнная величина, безпредѣльно уменьшающаяся и приближающаяся сколь угодно близко къ нулю, но никогда не достигающая нуля. Примѣромъ безконечно-малой величины можетъ служить разность между периметрами правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ и вписанныхъ въ кругъ: при увеличеніи числа сторонъ эта разность безпредѣльно приближается къ нулю и можетъ быть сдѣлана, помощью выбора достаточно большого числа сторонъ, менѣе всякой данной величины, но, какъ бы много мы ни брали сторонъ, эта разность никогда не обратится въ нуль.

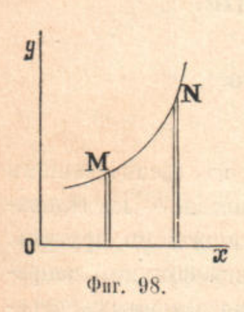


Фиг. 97.

Непрерывною функціею одного перемѣннаго называется такая его функція, которая при безконечно-маломъ приращеніи перемѣннаго, получаетъ то же безконечно-малое приращеніе. Примѣромъ такой функціи можетъ служить положительная ордината эллипса (фиг. 97), разсматриваемая какъ функція абсциссы. Здѣсь при увеличи-

ваніи x, начиная отъ нуля, на безконечно-малыя положительныя приращенія, которыя мы будемъ обозначать такъ Δx (выговаривается дельта x), ордината сначала получаетъ безконечно-малыя положительныя приращенія Δy, пока возрастаетъ; а затѣмъ, когда x сдѣлается болѣе чѣмъ OA, ордината будетъ убывать, но всетаки всякому безконечно-малому положительному приращенію Δx будетъ соотвѣтствовать безконечно-малое, хотя теперь уже и отрицательное, приращеніе Δy. Вмѣсто слова «безконечно-малая убавка» мы будемъ всегда употреблять слово безконечно-малое отрицательное приращеніе.

Уловить смыслъ непрерывнаго измѣненія весьма долго не удавалось людямъ. Напримѣръ даже опредѣленіе кривой, какъ послѣдовательнаго ряда точекъ, не совсѣмъ понятно, такъ какъ въ рядѣ точекъ предполагаются промежутки, а въ кривой ихъ нѣтъ. Можно сказать, что мы переходимъ отъ одной точки кривой къ сосѣдней точкѣ. Но что такое сосѣдняя точка? Если она отстоитъ отъ первоначальной точки на какое-нибудь разстояніе, то является между этими точками перерывъ; если же она не находится на разстояніи отъ первоначальной точки, то сливается съ нею, и мы по такой логикѣ не выйдемъ изъ первоначальной точки. Подобныя разсужденія привели нѣкоторыхъ древнихъ философовъ къ отрицанію движенія.



Фиг. 98.

А между тѣмъ для пониманія непрерывнаго измѣненія необходимо представить себѣ характеръ зависимости, существующей между безконечно-малымъ приращеніемъ перемѣннаго и безконечно-малымъ приращеніемъ функціи. Простого взгляда на кривую (фиг. 98) достаточно, чтобы предчувствовать, что при одинаковыхъ безконечно-малыхъ приращеніяхъ Δx абсциссы x, ордината y получаетъ не одинаковыя приращенія Δy въ точкахъ M и N, такъ какъ въ N она круче, «быстрѣе» поднимается, чѣмъ въ M. Но какова же связь между безконечно-малыми приращеніями функціи и перемѣннаго — связь, не зная которой, мы не можемъ понять самой сущности непрерывнаго измѣненія?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ былъ данъ во второй половинѣ XVII-го столѣтія одновременно Лейбницемъ и Ньютономъ, изобрѣтателями дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, основная идея которыхъ заключается въ томъ, что: 1) Отношеніе двухъ безконечно-малыхъ величинъ можетъ быть величиною конечною (не безконечно-малою) и 2) При данной зависимости между y и x можетъ быть опредѣленъ самый предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближеніи безконечно-малаго приращенія Δx къ нулю.

Этотъ предѣлъ называется *производною* отъ y по иксу. Сведеніе вопроса отъ непонятныхъ безконечно-малыхъ къ понятной, имѣющей конеч-

ную величину и безъ особаго труда опредѣляемой производной и составляетъ неоцѣнимую заслугу Ньютона и Лейбница предъ человѣчествомъ.

Дифференціальное исчисленіе есть наука, занимающаяся изученіемъ производныхъ и ихъ вычисленіемъ.

Познакомимся прежде всего поближе съ понятіемъ о производной.

Производная.

§ 116. Пусть зависимость, существующая между функціею y и независимымъ перемѣннымъ x, дана уравненіемъ:

$$y = f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (188)$$

гдѣ $f(x)$ есть какая-нибудь непрерывная функція отъ x.

Придадимъ иксу безконечно малое приращеніе Δx. Тогда и y измѣнится и получитъ безконечно малое приращеніе Δy; такъ что получимъ:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (189)$$

Отсюда опредѣлимъ Δy, получимъ:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (190)$$

Вставляя вмѣсто y въ (190) его величину изъ (188), получимъ:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (191)$$

Дѣля обѣ части этого равенства на Δx, получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (192)$$

Предѣлъ какой-нибудь величины будемъ обозначать знакомъ *lim* (по латыни предѣлъ = *limes*). Напримѣръ предѣлъ, къ которому приближается отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, при приближеніи Δx къ нулю, будемъ обозначать такъ $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и выговаривать такъ: предѣлъ, при Δx равномъ нулю, отъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производною функціи называется предѣлъ отношенія безконечно малаго приращенія функціи къ безконечно малому приращенію перемѣннаго, то есть именно: $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Переходя отъ обѣихъ частей равенства (192) къ ихъ предѣламъ, получимъ:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{производной отъ } f(x).$$

Производную отъ $f(x)$ по x обозначаютъ такъ $f_x'(x)$ или просто такъ (по Ньютону): $f'(x)$. Лейбницъ, называя $f(x)$ одною буквою y, согласно съ уравненіемъ (188) обозначалъ производную отъ y по x такъ: $\frac{dy}{dx}$ посредствомъ маленькихъ буквъ d (см. § 125). Обозначаютъ ее и такъ y'.

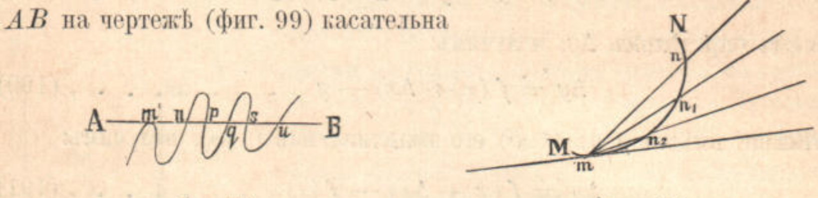
Итакъ производная отъ $f(x)$ опредѣляется слѣдующими уравненіями, показывающими и различныя ея обозначенія:

$$f'(x) = lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'_x(x) \quad . \quad . \quad (193)$$

Это основная формула всего анализа: по ней вычисляются, какъ увидимъ ниже, производныя.

Геометрическое значеніе производной.

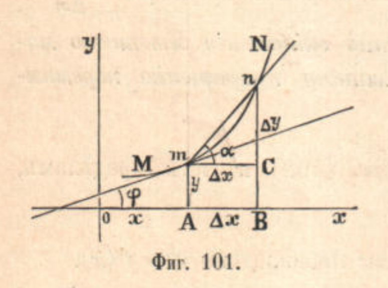
§ 117. Въ настоящемъ параграфѣ мы покажемъ, что производная дѣйствительно представляетъ собою величину конечную. Разсмотримъ для этого нѣкоторыя свойства касательныхъ. Касательная къ окружности опредѣляется въ элементарной геометріи какъ прямая, имѣющая одну общую точку съ окружностью. Такое опредѣленіе касательной не ко всѣмъ кривымъ приложимо. Напримѣръ прямая AB на чертежѣ (фиг. 99) касательна



Фиг 99. Фиг. 100.

къ начерченной кривой въ точкѣ m, но кромѣ этой точки она имѣетъ съ кривою еще общія точки: n, p, q, s, u.

Какъ же правильнѣе было бы опредѣлить, что такое касательная? Представимъ себѣ кривую MN (фиг. 100) и на ней точку m. Возьмемъ на кривой другую точку n и станемъ ее приближать къ m, проводя всякій разъ чрезъ точки m и n сѣкущія. Когда точка n совпадетъ съ m, то сѣкущая обратится въ касательную кривой MN въ точкѣ m. Итакъ: *касательная есть предѣльное положеніе сѣкущей при сближеніи точекъ пересѣченія.*



Фиг. 101.

Теперь обратимся къ геометрическому значенію производной (фиг. 101). Возьмемъ на кривой MN точку m, координаты которой пусть будутъ (x, y). Дадимъ абсциссѣ x приращеніе Δx равное AB; тогда ордината получитъ приращеніе Δy равное Cn. Обозначая чрезъ α уголъ наклоненія сѣкущей mn къ оси x, получимъ изъ прямоугольнаго треугольника mcn:

$$\Delta y = \Delta x \cdot tg\alpha$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

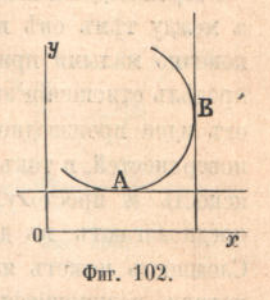
Приближая точку n до совпаденія съ точкою m, уменьшимъ Δx до нуля и отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ до его предѣла. При этомъ сѣкущая превратится въ касательную. Поэтому, обозначая уголъ наклоненія касательной къ оси x чрезъ φ, видимъ, что при совпаденіи точки n съ точкою m, равенство (194) обратится въ:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi \quad \text{. . . . . (195)}$$

Но, по предыдущему, $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и есть производная. Слѣдовательно:

$$f'(x) = tg\,\varphi \quad \text{. . . . . . . (196)}$$

Итакъ: *производная выражается геометрически тангенсомъ угла наклоненія касательной къ оси x.*



Фиг. 102.

Несомнѣнно однако, что на кривой MN касательная въ каждой ея точкѣ составляетъ вполнѣ опредѣленный уголъ съ осью x и что только въ исключительныхъ случаяхъ (напримѣръ въ точкахъ A и B (фиг. 102)) тангенсъ этого угла 0 или безконечность; вообще же $tg\,\varphi$, а слѣдовательно и $f'(x)$, суть величины конечныя и вполнѣ опредѣленныя.

Примѣръ вычисленія производной.

§ 118. Впослѣдствіи мы подробно займемся вычисленіемъ производныхъ отъ различныхъ функцій; теперь же покажемъ на простомъ примѣрѣ, что формула (193) даетъ возможность находить производную $f'(x)$ по данной $f(x)$.

Пусть, напримѣръ, $f(x) = ax$, гдѣ a есть постоянная величина. Давая приращеніе Δx перемѣнному x, получимъ по формулѣ (193):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{a(x+\Delta x) - ax}{\Delta x} \quad \text{. . . . . . (197)}$$

Здѣсь мы по (193) должны были составить первый членъ числителя выраженія $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то есть продѣлать надъ $x + \Delta x$ ту самую операцію, которая продѣлана въ данной функціи надъ иксомъ, именно умноженіе на a. Потомъ вычесть отсюда самую функцію, то есть ax, полученную разность раздѣлить на Δx, а отъ полученнаго частнаго взять предѣлъ. Пока въ (197) переходъ къ предѣлу только еще обозначенъ, произведемъ его на дѣлѣ. Получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{a(x+\Delta x) - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} (a) = a.$$

Послѣднее равенство $\lim\limits_{\Delta x=0} (a) = a$ вполнѣ очевидно, потому что каково бы ни было Δx предѣлъ отъ a всегда есть a, если a постоянная величина.

Итакъ мы опредѣлили производную отъ ax. Оказывается, что если $y = ax$, то $\frac{dy}{dx} = a$. Иначе можно этотъ результатъ написать такъ:

$$\frac{d\ (ax)}{dx} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

и выговорить такъ: производная отъ ax равна a.

Производныя конечны, вполнѣ понятны, даже могутъ быть вычисляемы, а между тѣмъ онѣ въ самомъ дѣлѣ опредѣляютъ зависимость между безконечно малыми приращеніями функціи и перемѣннаго, именно — самый предѣлъ отношенія этихъ безконечно малыхъ величинъ. Не мудрено ожидать отъ идеи производной большой силы въ изслѣдованіи функцій, кривыхъ, поверхностей, и такъ далѣе. Эта идея производной всюду вноситъ съ собою ясность и простоту, а вовсе не сложность и злоухищренность, какую предполагаютъ въ дифференціальномъ исчисленіи незнакомые съ нимъ. Сложность можетъ явиться, и является, впослѣдствіи отъ того, что математики, поднявшіеся помощью простого понятія о производной надъ прежнимъ горизонтомъ знанія, захотѣли конечно еще болѣе раздвинуть представившуюся имъ картину, и вотъ на границахъ новыхъ, подлежащихъ новому изслѣдованію, областей, конечно являются опять сложность и затрудненія. Но отъ понятія о производной, и при помощи его, мы пройдемъ еще очень длинный путь безъ особыхъ затрудненій.

Увеличивается или уменьшается функція начиная отъ даннаго значенія перемѣнной.

§ 119. Замѣтимъ, что измѣненіемъ независимаго перемѣннаго мы распоряжаемся по нашему произволу, а функція при этомъ измѣняется, смотря по тому, какою формулою она связана съ независимымъ перемѣннымъ. Мы будемъ считать приращенія Δx независимаго перемѣннаго всегда положительными.

Изъ выраженія (193):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

видно, что если начиная отъ даннаго значенія перемѣннаго, при дальнѣйшемъ его увеличеніи, функція *увеличивается*, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ и слѣдовательно (при принятой положительности Δx) *производная положительна.*

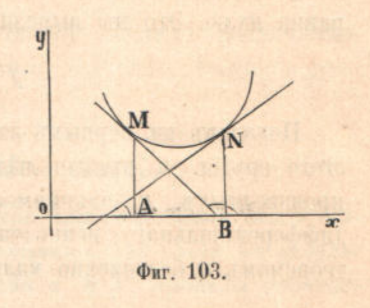
Наоборотъ, если функція *убываетъ*, то *производная отрицательна*; потому что тогда $f(x+\Delta x) < f(x)$.

По знаку производной можно, наоборотъ, уже судить о ходѣ функціи. Если при данномъ значеніи x, *производная положительна*, то *функція*,

начиная отъ величины соотвѣтствующей этому значенію перемѣннаго, *возрастаетъ*.

Если *производная отрицательна*, то функція убываетъ. Поднимается въ данномъ мѣстѣ кривая или опускается, узнаемъ по знаку производной при данной величинѣ x.

Это видно и изъ геометрическаго значенія производной: изъ того, что она равна тангенсу угла наклоненія касательной кривой $y = f(x)$. Дѣйствительно: въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ какъ въ точкѣ M (фиг. 103), ордината кривой уменьшается съ увеличеніемъ x, уголъ φ тупой, и $tg\,\varphi$, а слѣдовательно и производная, отрицательны. Гдѣ, какъ въ N, ордината увеличивается при увеличеніи x, уголъ φ острый, и $tg\,\varphi$, а слѣдовательно и производная, положительны. Если бы вычислили по уравненію $y = f(x)$ данной кривой производную $f'(x)$ и положили бы въ ней $x = a = OA$ (фиг. 103), то вычисленная величина получилась бы отрицательною.

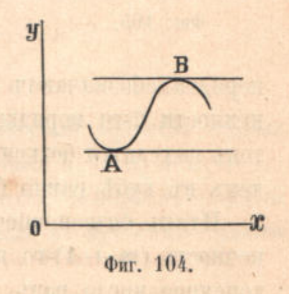


Фиг. 103.

Положивъ же въ $f'(x)$, что $x = b = OB$, получили бы величину положительную. Отрицательность производной при $x = a$ и положительность ея при $x = b$ показали бы, что въ точкѣ M, соотвѣтствующей $x = a$, кривая понижается. Положительность производной при $x = b$ показала бы, что въ точкѣ N, соотвѣтствующей $x = b$, кривая повышается.

Въ какихъ случаяхъ $f'(x) = 0$.

§ 120. Если производная равна нулю только при опредѣленномъ значеніи перемѣннаго, то значитъ касательная къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ, соотвѣтствующей этому значенію перемѣннаго, параллельна оси x. Это можетъ быть или въ томъ случаѣ, если ближайшія точки кривой имѣютъ большія ординаты, чѣмъ точка A (фиг. 104), соотвѣтствующая данному значенію перемѣннаго. Тогда говорятъ, что ордината (функція) имѣетъ минимальное (наименьшее) значеніе при данномъ значеніи перемѣннаго. Или же параллельность касательной, напримѣръ въ B, можетъ случиться, когда ордината данной точки больше ординатъ ближайшихъ къ ней точекъ. Тогда говорятъ, что ордината имѣетъ въ этомъ мѣстѣ максимальное (наибольшее) значеніе.



Фиг. 104.

Отсюда видно, что производная служитъ сильнымъ орудіемъ для отысканія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ. Впослѣдствіи (§ 178) мы съ этимъ весьма важнымъ вопросомъ познакомимся ближе.

Если производная, при всякихъ значеніяхъ x, равна нулю, значитъ

$tg\varphi$ по всей длинѣ кривой $=0$. Значитъ имѣемъ дѣло уже не съ кривою а съ прямою параллельною къ оси x, въ каждой точкѣ которой касательная этой прямой (совпадающая съ нею) параллельна оси x. Слѣдовательно и ордината есть величина постоянная.

Итакъ: *если производная при всѣхъ значеніяхъ x равна нулю, то функція равна постоянной величинѣ.*

Производная постоянной величины.

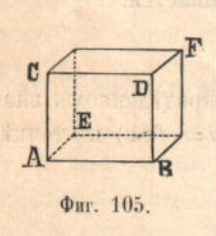
§ 121. Наоборотъ, слѣдовательно: производная постоянной величины равна нулю. Это мы выразимъ такъ:

$$f'(a)=0;\ \frac{da}{dx}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Показавъ на первыхъ же порахъ знакомства съ производною мощь этого орудія, и прежде чѣмъ перейти къ общему способу вычисленія производныхъ, познакомимся еще съ нѣкоторыми основными понятіями дифференціальнаго исчисленія. Прежде всего надо подойти къ двумъ теоремамъ о безконечно малыхъ.

Различные порядки безконечно большихъ величинъ.

§ 122. Прямолинейный отрѣзокъ AB (фиг. 105) содержитъ въ себѣ безконечно большое число точекъ. По первому, наивному, взгляду кажется, что же можетъ быть больше безконечно большаго числа? Но однако мы видимъ, что квадратъ $ABCD$ содержитъ безконечно большое число самыхъ отрѣзковъ AB (прямыхъ). На немъ можно помѣстить безконечно-большое число такихъ прямыхъ. Слѣдовательно квадратъ содержитъ въ себѣ безконечно-большое число безконечно-большихъ чиселъ точекъ. Принято выражаться проще: число точекъ въ отрѣзкѣ равно безконечности перваго порядка (безконечность перваго порядка обозначаютъ такъ ∞). Число точекъ въ квадратѣ равно безконечности 2-го порядка $=\infty^2$. Не трудно видѣть, что самыхъ то квадратовъ находится безконечное число въ кубѣ (фиг. 105). Говорятъ: число точекъ въ кубѣ равно безконечности 3-го порядка.



Фиг. 105.

Итакъ безконечности-то самыя бываютъ разныхъ порядковъ и безконечность $(m+1)$-го порядка больше безконечности m-го порядка въ безконечное число разъ, то есть:

$$\frac{(\infty)^{m+1}}{(\infty)^{m}}=\infty\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (200)$$

Различные порядки безконечно малыхъ величинъ.

§ 123. Возьмемъ какое-нибудь конечное число, напримѣръ 7 и будемъ составлять дроби съ числителемъ 7, а знаменатель все будемъ увеличи-

вать; получимъ такія дроби:

$$\frac{7}{8}, \frac{7}{9} \cdots \frac{7}{1000} \cdots \frac{7}{1000000} \cdots \frac{7}{1.000000000} \cdots$$

Чѣмъ больше знаменатель, тѣмъ меньше дробь. При такомъ увеличеніи знаменателя дробь съ числителемъ 7 совершенно подходитъ подъ опредѣленіе безконечно малой величины. Поэтому безконечно малую величину можно представить въ видѣ $\frac{m}{\infty}$, гдѣ m какая угодно конечная величина, или такъ $\frac{1}{\infty}$.

Но мы видѣли въ § 122, что безконечности бываютъ различныхъ порядковъ. Слѣдовательно, и безконечно малыя величины бываютъ различныхъ порядковъ: $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3} \cdots \frac{1}{(\infty)^n}$.

Основныя теоремы о безконечно малыхъ.

§ 124. Теорема I. *При вычисленіи предѣла отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ α и β, можно замѣнить, не вліяя на результатъ, эти безконечно малыя такими другими α' и β', предѣлы отношенія которыхъ къ прежнимъ равны единицѣ.*

Надо показать, что, если $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$; $\lim \frac{\beta}{\beta'} = 1$, то: $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Доказательство. Слѣдующее тожество очевидно:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (201)$$

откуда:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \lim \frac{\beta'}{\beta} \quad \ldots\ldots (202)$$

Но по сдѣланному предположенію $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$; $\lim \frac{\beta}{\beta'} = 1$. Слѣдовательно:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'},$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. *При вычисленіи имѣющей конечный предѣлъ суммы безконечно большаго числа безконечно малыхъ величинъ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ можно эти безконечно малыя, не вліяя на результатъ, замѣнить такими другими $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$, предѣлы отношенія которыхъ къ прежнимъ равны единицамъ.*

Надо показать, что, если $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1$; $\lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$; $\lim \frac{\alpha_3}{\beta_3} = 1 \ldots$,

$$\text{то } \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) = \lim (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots),$$

если $\lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$ конеченъ.

Доказательство. Если $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1$; $\lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$; $\lim \frac{\alpha_3}{\beta_3} = 1 \ldots$, то, до перехода къ предѣлу, отношенія новыхъ безконечно малыхъ къ преж-

нимъ будутъ отличаться отъ 1 на безконечно малыя величины ε_1; ε_2; ε_3... того же порядка какъ данныя, то есть будемъ имѣть:

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = 1 + \varepsilon_1; \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2; \quad \frac{\beta_3}{\alpha_3} = 1 + \varepsilon_3 \ldots; \quad . \; . \; . \; (203)$$

откуда: $\beta' = \alpha' + \alpha'\varepsilon_1$; $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_2\varepsilon_2$; $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_3\varepsilon_3 \ldots$

Складывая почленно эти равенства получимъ:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \ldots;$$

откуда:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \ldots \quad (204)$$

Назовемъ чрезъ δ самую большую по абсолютной величинѣ изъ величинъ ε_1; ε_2; ε_3... Очевидно, что:

$$\delta\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) > \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \ldots \quad . \; . \; . \; (205)$$

по абсолютной величинѣ и слѣдовательно, при существованіи равенства (204):

$$lim\,(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots) - lim\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) < lim\,\delta\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$$

по абсолютной величинѣ.

Но, по сдѣланному въ теоремѣ предположенію: $lim\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$ величина конечная; произведеніе же этой конечной величины на безконечно малую δ въ предѣлѣ равно нулю. Слѣдовательно:

$$lim\,(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots) - lim\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_3 + \ldots) = 0$$

или $$lim\,(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots) = lim\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots);$$

Обѣ эти теоремы могутъ быть выражены одною такою: *предѣлъ отношенія* $lim\,\frac{\alpha}{\beta}$ *двухъ безконечно малыхъ величинъ или предѣлъ* $lim\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$ *суммы безконечно малыхъ величинъ не измѣняется отъ замѣны этихъ безконечно малыхъ величинъ другими, отличающимися отъ нихъ на безконечно малую величину высшаго порядка,* потому что напримѣръ условіе $lim\,\frac{\alpha}{\alpha_1} = 1$ равносильно условію $\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \varepsilon$, гдѣ ε, есть безконечно малая величина того же порядка какъ α и α'. Но послѣднее условіе равносильно $\alpha = \alpha' + \alpha'\varepsilon_1$, итакъ α отличается отъ α' на величину 2-го порядка малости $\alpha'\varepsilon_1$.

Иначе, и въ наиболѣе удобной для приложеній формѣ, это можно выразить такими правилами:

Правило 1-е. *Когда ищемъ предѣлъ отношенія двухъ величинъ, представляющихъ собою суммы безконечно малыхъ различныхъ порядковъ, то можно, безъ малѣйшей погрѣшности, оставлять въ этихъ суммахъ только безконечно малыя величины наименьшаго порядка.*

Напримѣръ, будутъ совершенно вѣрными слѣдующія равенства:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x + \sin^2 x}{x + x^3} = \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x}.$$

Здѣсь въ числителѣ пренебрегаемъ безконечно малою величиною 2-го порядка передъ безконечно малою 1-го порядка, а въ знаменателѣ—безконечно малою величиною 3-го порядка передъ безконечно малою 1-го порядка. Такое, точно выраженное правиломъ 1-мъ, пренебреженіе нѣкоторыми величинами не дѣлаетъ вычисленія лишь приблизительнымъ. Вычисленіе остается совершенно точнымъ, потому что такія упрощенія основаны на строго доказанныхъ теоремахъ I и II.

Правило 2-е. Когда ищемъ предѣлъ суммы безконечно малыхъ, то можемъ, безъ малѣйшей погрѣшности, оставить въ суммѣ только безконечно малыя наименьшаго порядка.

Дифференціалъ.

§ 125. Разсмотримъ опять уравненіе

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

опредѣляющее производную. Только по взятіи предѣла, то есть при доведеніи Δx до нуля, дробь $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ обращается точно въ $f'(x)$. Но до взятія предѣла, эта дробь отличается отъ $f'(x)$ на нѣкоторую безконечно малую величину, которую мы назовемъ чрезъ ε, такъ что до взятія предѣла:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon;$$

откуда:
$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \varepsilon \,.\, \Delta x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (206)$$

Итакъ безконечно малое приращеніе Δy функціи состоитъ изъ двухъ величинъ: $f'(x) \,.\, \Delta x$, которая называется *дифференціаломъ* функціи и величины $\varepsilon \,.\, \Delta x$, которая, какъ произведеніе безконечно малыхъ величинъ ε и Δx, есть безконечно малая 2-го порядка сравнительно съ безконечно малою перваго порядка $f'(x) \,.\, \Delta x$. Этою величиною $\varepsilon \,.\, \Delta x$ можно, безъ погрѣшности, согласно со сказаннымъ въ § 123, пренебрегать при вычисленіи предѣловъ отношеній или суммъ. Дифференціалъ функціи, равный $f'(x) \,.\, \Delta x$, обозначается знакомъ d, поставленнымъ передъ функціею такъ:

$$f'(x) \,.\, \Delta x = d\, f(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (207)$$

Дифференціалъ независимаго перемѣннаго равенъ Δx. Дѣйствительно. если функція равна самому независимому перемѣнному, то производная будетъ

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

и уравненіе (207) обратится въ

$$\Delta x = dx.$$

Вслѣдствіе этого для всякой функціи уравненіе (207) можно представить такъ:

$$f'(x) \,.\, dx = d \,.\, f(x) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (208)$$

Если $y = f(x)$, то получимъ:

$$f'(x) \,.\, dx = dy; \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (209)$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (210)$$

Формула (210) показываетъ, что производная есть отношеніе дифференціала функціи къ дифференціалу перемѣннаго.

Какъ только научимся находить производныя, такъ найдемъ и дифференціалы функціи. Потому что по (209) стоитъ только помножить производную на dx, чтобы получить дифференціалъ функціи. Независимымъ перемѣннымъ мы распоряжаемся сами, а потому придаемъ ему постоянно одинаковыя приращенія, и потому dx есть величина постоянная, если x есть *независимое* перемѣнное.

Займемся теперь вычисленіемъ производныхъ. Дифференцировать функцію—значитъ найти ея производную.

Простыя функціи.

§ 126. Простыми функціями независимаго перемѣннаго x называются такія его функціи, которыя происходятъ отъ одного какого-нибудь дѣйствія надъ x. Таковы:

функціи алгебраическія:

функція сложенія съ постояннымъ количествомъ: $x + a$
функція умноженія на постоянное количество: ax
степень съ постояннымъ показателемъ: x^m

Вычитаніе, дѣленіе, извлеченіе корня суть дѣйствія обратныя сложенію, умноженію и возведенію въ степень, и могутъ быть приведены къ этимъ прямымъ дѣйстіямъ такимъ образомъ: $a - x = a + (-x)$; $\frac{x}{a} = x \,.\, \frac{1}{a}$; $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$, какъ это извѣстно изъ элементарной алгебры. Затѣмъ идутъ функціи, называемыя *трансцендентными*, а именно:

показательная функція: a^x,
логарифмъ: $lg\, x$,
тригонометрическія: $sin\, x$, $cos\, x$, $tg\, x$,
и круговыя: $arcsin\, x$, $arccos\, x$, $arctg\, x$.

Существуютъ еще высшія трансцендентныя функціи: эллиптическія ультраэллиптическія и проч., но о нихъ мы не будемъ говорить.

Изъ простыхъ функцій составляется безграничное число *сложныхъ*

функцій. Напримѣръ, изъ корня, суммы и синуса можно составить функцію: $\sqrt{a+x}+\sin x$; функція: $tg\,x\,.\,\sqrt{lg \sin x}$ составлена изъ тангенса, произведенія, корня, логариѳма и синуса, и такъ далѣе. Впослѣдствіи мы увидимъ, что, умѣя дифференцировать простыя функціи, или, лучше сказать, зная наизусть производныя простыхъ функцій, не трудно дифференцировать и сложныя функціи. Итакъ, прежде всего, найдемъ производныя простыхъ функцій. Мы будемъ писать результаты въ видѣ дифференціаловъ, по которымъ легко найти простымъ дѣленіемъ на dx производныя (см. (209)).

Производная отъ $(a+x)$.

§ 127. Пусть $f(x)=y=a+x$. По (193) имѣемъ:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{(a+x+\Delta x)-(a+x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Этотъ результатъ можно написать иначе такъ: $\frac{dy}{dx}=\frac{d\,(a+x)}{dx}=1$ и отсюда по (209) получить дифференціалъ данной функціи

$$d\,(a+x)=dx\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(211)$$

Производная отъ $(u+v+w+\ldots)$.

§ 128. Этотъ результатъ есть частный случай дифференцированія болѣе общей функціи сложенія: пусть $u, v, w\ldots$ суть какія-нибудь функціи отъ x; найдемъ производную отъ $(u+v+w+\ldots)$.

По (193); обозначая приращенія слагаемыхъ чрезъ $\Delta u, \Delta v, \Delta w\ldots$ имѣемъ:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\frac{(u+\Delta u+v+\Delta v+w+\Delta w+\ldots)-(u+v+w\ldots)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u+\Delta v+\Delta w+\ldots}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\ldots$$

Итакъ: $\frac{d\,(u+v+w+\ldots)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$: *производная суммы равна суммѣ производныхъ*. Помножая на dx, по (209), получимъ:

$$d\,(u+v+w+\ldots)=du+dv+dw+\ldots\quad\ldots\ldots\quad(212)$$

дифференціалъ суммы равенъ суммѣ дифференціаловъ.

Формула (211) выводится какъ частный случай формулы (212) слѣ-

дующимъ образомъ:

$$d\,(a + x) = da + dx \ldots\ldots\ldots (213)$$

Но по (199) производная отъ постоянной равна нулю: $\frac{da}{dx} = 0$. Слѣдовательно и $da = 0$. Слѣдовательно (213) обращается въ $d\,(a + x) = dx$, что и выражено формулою 211.

Запомнимъ кстати вытекающее изъ (199) правило: *дифференціалъ постояннаго равенъ нулю:*

$$da = 0 \ldots\ldots\ldots (214)$$

Производная отъ ax.

§ 129. Чтобы найти $\frac{d\,(ax)}{dx}$, воспользуемся опять формулою (193), помня, что въ данномъ случаѣ $f\,(x) = ax$. Получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{a\,(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{a\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} a = a.$$ Итакъ: $\frac{d\,(ax)}{dx} = a$;

или:

$$d\,(ax) = adx \ldots\ldots\ldots (215)$$

Значитъ: *постоянный множитель выходитъ за знакъ дифференціала.*

Производная отъ uv.

§ 130. Продифференцируемъ болѣе общее произведеніе $u\,.\,v$, гдѣ u и v судь двѣ какія-нибудь функціи отъ x. По (193) имѣемъ:

$$f'(x) = \frac{d\,(uv)}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{(u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{u\,.\,v + u\,.\,\Delta v + v\,.\,\Delta u + \Delta u\;\;\Delta v - u\,.\,v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{u\,.\,\Delta v + v\,.\,\Delta u + \Delta u\,.\,\Delta v}{\Delta x}.$$

Послѣдній членъ $\Delta u\,.\,\Delta v$ числителя здѣсь 2-го порядка, тогда какъ другіе два члена числителя 1-го порядка безконечно малыя поэтому, по сказанному въ § 123, членомъ $\Delta u\,.\,\Delta v$ можно, безъ малѣйшей погрѣшности, пренебречь; получимъ:

$$\frac{d\,(u\,.\,v)}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \left(u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}.$$

Отсюда:

$$d\,(u\,.\,v) = u\,.\,dv + v\,.\,du \ldots\ldots\ldots (216)$$

Отсюда: $d\,(uvw) = uvdw + w\,.\,d\,(uv) = uvdw + uwdv + vwdu$.

Производная степени.

§ 131. Продифференцируемъ $f(x) = x^m$. По (193) имѣемъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}.$$

Разлагая здѣсь $(x + \Delta x)^m$ по биному Ньютона, извѣстному изъ элементарной алгебры, получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{x^m + mx^{m-1} . \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-1} . (\Delta x)^2 + }{\Delta x}$$

$$\frac{+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} x^{m-2} . (\Delta x)^3 + \ldots + (\Delta x)^m - x^m}{\Delta x}.$$

Здѣсь первый и послѣдній члены числителя взаимно уничтожаются. Дѣля каждый изъ остальныхъ членовъ на Δx, вмѣсто указаннаго дѣленія всей суммы на Δx, получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \left[mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-1} . \Delta x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} x^{m-2} . (\Delta x)^2 + \ldots \right].$$

Здѣсь всѣ члены, стоящіе въ скобкахъ, кромѣ перваго, заключаютъ множитель Δx въ различныхъ степеняхъ, и слѣдовательно они суть величины безконечно малыя, а потому по § 124-му можно этими членами пренебречь въ сравненіи съ конечной величины членомъ mx^{m-1}. Получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} (mx^{m-1}) = mx^{m-1}. \text{ Итакъ } \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1},$$

откуда:

$$d(x^m) = m . x^{m-1} . dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (217)$$

Напримѣръ: $d(x^5) = 5x^4 dx$ и слѣдовательно: $\frac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$; выговаривается это такъ: *производная отъ* x^5 *равна* $5x^4$.

§ 132. При дифференцированіи тригонометрическихъ функцій $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ понадобится знаніе предѣла отъ $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$. Хотя онъ дается въ руководствахъ по тригонометріи, но мы здѣсь его выведемъ.

Не трудно видѣть, что:

$$\sin x < x < tg\, x.$$

Откуда:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tg\, x}$$

Помножая на $\sin x$, получимъ:

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{tg\, x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (218)$$

Когда x приближается къ нулю, то $\cos x$ приближается къ 1, и потому становятся болѣе тѣсными границы 1 и $\cos x$, между которыми въ (218) заключена величина $\frac{\sin x}{x}$. При $x = 0$ получимъ слѣдовательно:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (219)$$

Производная отъ $\sin x$.

§ 133. Продифференцируемъ теперь $f(x) = \sin x$. По (193) имѣемъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

По формулѣ синуса суммы получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{\sin x \,.\, \cos \Delta x + \cos x \,.\, \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}.$$

При $\Delta x = 0$ мы знаемъ, что $\cos \Delta x = \cos 0 = 1$. Поэтому:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{\sin x + \cos x \,.\, \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \cos x \,.\, \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Но по (219)

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Слѣдовательно:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \cos x = \cos x.$$

Итакъ:

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

Откуда:

$$d(\sin x) = \cos x \,.\, dx \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (220)$$

Производная отъ $\cos x$.

§ 134. Продифференцируемъ $f(x) = \cos x$. По (193) имѣемъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \frac{\cos x \,.\, \cos \Delta x - \sin x \ \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \frac{\cos x - \sin x \,.\, \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \left[-\sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} (-\sin x) = -\sin x.$$

Отсюда:

$$\frac{d\,(\cos x)}{dx} = -\sin x,$$

или:

$$d \cos x = -\sin x \,.\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (221)$$

Производная отъ $\frac{u}{v}$.

§ 135. Продифференцируемъ дробь $\frac{u}{v}$, числитель и знаменатель которой суть какія-нибудь функціи отъ x. По (193) имѣемъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v^2 + v \,.\, \Delta v)\,\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 \,.\, \Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Помножая на dx получимъ:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \,.\, du - u \,.\, dv}{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (222)$$

Производная отъ $tg\,x$.

§ 136. Формула (222), сама по себѣ очень полезная, поможетъ намъ вывести производную отъ $tg\,x$ по производнымъ отъ $\sin x$ и $\cos x$, которыя выведены были въ § 133 и 134. Имѣемъ:

$$d\,(tg\,x) = d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right),$$

далѣе по (222) получимъ:

$$d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \,.\, d \sin x - \sin x\, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \,.\, \cos x \,.\, dx + \sin^2 x\, dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Итакъ:

$$d\,tg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (223)$$

Отсюда, по (209) получимъ:

$$\frac{d\,(tg\,x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производная отъ $\arcsin x$.

§ 137. Дуга y, синусъ которой равенъ x, обозначается такъ: $\arcsin x$, выговаривается такъ: *аркусъ-синусъ* x. Поэтому $\arcsin x$ есть функція обратная синусу, такъ что если $x = \sin y$, то $y = \arcsin x$.

Продифференцируемъ *arcsin* x. Имѣемъ:

$$y = arcsin\, x; \qquad (224)$$

отсюда:

$$x = sin\, y \qquad (225)$$

Дифференцируя обѣ части этого равенства и пользуясь формулою (220), имѣемъ:

$$dx = cos\, y\, dy.$$

Отсюда

$$dy = \frac{dx}{cos\, y}.$$

Замѣняя здѣсь *cos* y его величиною, выводимою изъ (225), именно: $cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, получимъ:

$$d\,(arcsin\, x) = \frac{dx}{\pm \sqrt{1 - x^2}} \qquad (226)$$

Производная отъ *arccos* x.

§ 138. Функція обратная косинусу называется *аркусъ-косинусъ* и обозначается такъ: *arccos* x. Продифференцируемъ ее. Если $y = arccos\, x$, то

$$x = cos\, y \qquad (227)$$

Дифференцируя обѣ части этого равенства и пользуясь формулою (221), имѣемъ:

$$dx = -\, sin\, y\, dy.$$

Отсюда:

$$dy = -\frac{dx}{sin\, y}.$$

Но, согласно съ (227), имѣемъ: $sin\, y = \sqrt{1 - cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Итакъ:

$$d\,(arccos\, x) = \frac{dx}{\mp \sqrt{1 - x^2}} \qquad (228)$$

Производная отъ *arctg* x.

§ 139. Функція обратная тангенсу называется *аркусъ-тангенсъ* и обозначается такъ: *arctg* x. Продифференцируемъ ее.

$$y = arctg\, x,$$

$$x = tg\, y \qquad (229)$$

$$dx = \frac{dy}{cos^2 y}.$$

Отсюда:

$$dy = cos^2 y\, .\, dx.$$

Но

$$cos\, y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итакъ:

$$d\,(arctg\,x) = \frac{dx}{1+x^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(230)$$

Дифференцированіе сложныхъ функцій.

§ 140. Изъ простыхъ функцій мы не дифференцировали только a^x и $lg\,x$ (кромѣ высшихъ трансцендентныхъ). Но дифференцированіе a^x и $lg\,x$ требуетъ подготовительныхъ соображеній, и потому мы отложимъ пока ихъ дифференцированіе до § 148-го, а теперь займемся дифференцированіемъ сложныхъ функцій. Зная дифференціалы простыхъ функцій, весьма легко дифференцировать и сложныя: вычисленіе ведется *постепенно* такъ, какъ это всего лучше уясняется на слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1-ый. Продифференцировать $sin^3 x$. Значитъ дано $y = sin^3 x$.

Принимаемъ здѣсь сперва за независимое перемѣнное весь $sin\,x$. Видимъ, что онъ возведенъ въ третью степень. Поэтому прилагаемъ формулу (217) дифференціала степени: $dx^m = mx^{m-1}\,dx$. Получимъ:

$$dy = d\,(sin^3 x) = 3\,.\,sin^2 x\,.\,d\,sin\,x.$$

Здѣсь нужно еще взять $d\,sin\,x$ — дифференціалъ синуса. Дѣлая это по формулѣ (220), получимъ:

$$dy = 3\,.\,sin^2 x\,.\,cos\,x\,.\,dx.$$

Задача рѣшена. Если хотимъ получить производную, то остается только раздѣлить на dx, какъ это слѣдуетъ изъ сопоставленія формулъ (209) и (210), при чемъ получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(sin^3 x)}{dx} = 3\,sin^2 x\,.\,cos\,x.$$

Примѣръ 2-ой. $y = sin\,(x^2)$. Принимаемъ здѣсь сперва за независимое перемѣнное x^2. Видимъ, что отъ него берется синусъ. Поэтому прилагаемъ формулу (220) дифференціала синуса: $d\,(sin\,x) = cos\,x\,dx$. Получимъ:

$$dy = d\,sin\,(x^2) = cos\,(x^2)\,dx^2.$$

Здѣсь осталось еще взять дифференціалъ dx^2. Беремъ его по формулѣ (217) и получаемъ:

$$dy = d\,sin\,(x^2) = cos\,(x^2)\,.\,2x\,.\,dx.$$

Примѣръ 3-ій. $y = (x^2 + x^3)^5$. Принимаемъ здѣсь сперва за независимое перемѣнное всю стоящую въ скобкахъ величину $x^2 + x^3$. Видимъ, что она возведена въ 5-ую степень. Поэтому прилагаемъ формулу (217) дифференціала степени. Получимъ:

$$dy = 5\,(x^2 + x^3)^4\,d\,(x^2 + x^3).$$

Здѣсь еще осталось взять $d\,(x^2 + x^3)$. Прилагая формулу (212), получимъ:

$$dy = 5\,(x^2 + x^3)^4\,(dx^2 + dx^3).$$

Здѣсь еще осталось взять dx^2 и dx^3. Сдѣлавъ это опять по формулѣ (217), получимъ:

$$dy = 5\,(x^2 + x^3)^4\,(2x\,dx + 3x^2\,dx).$$

Выносся dx за скобку, получимъ:

$$dy = 5\,(x^2 + x^3)^4\,(2x + 3x^2)\,.\,dx.$$

Вообще dx всегда долженъ оказаться въ видѣ множителя.

Дифференцированіе сложныхъ функцій производится послѣдовательнымъ примѣненіемъ формулъ дифференціаловъ простыхъ функцій до тѣхъ поръ, пока знакъ d не окажется стоящимъ только надъ x. Прослѣдимъ ходъ дѣйствій въ настоящемъ примѣрѣ на слѣдующемъ рядѣ равенствъ:

$$dy = d\,(x^2 + x^3)^5 = 5\,(x^2 + x^3)^4\,.\,d\,(x^2 + x^3) = 5\,(x^2 + x^3)^4\,(dx^2 + dx^3) =$$
$$= 5\,(x^2 + x^3)^4\,(2x\,dx + 3x^2\,dx) = 5\,(x^2 + x^3)^4\,(2x + 3x^2)\,dx.$$

Въ результатѣ подъ знакомъ d остался только x.

При небольшомъ навыкѣ послѣдній результатъ, безъ затрудненія, можно написать прямо по заданію $d\,(x^2 + x^3)$, продѣлавъ промежуточныя вычисленія въ умѣ.

Примѣръ 4-ый. $y = \frac{x^3 + a}{x^7 + b}$. Дана дробь, поэтому дифференцируемъ ея по формулѣ (222), полагая $u = x^3 + a$; $v = x^7 + b$. Получимъ:

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{(x^7 + b)\,.\,d\,(x^3 + a) - (x^3 + a)\,.\,d\,(x^7 + b)}{(x^7 + b)^2}.$$

Остается взять еще въ числителѣ $d\,(x^3 + a)$ и $d\,(x^7 + b)$. Дѣлаемъ это по формулѣ (212). Получимъ:

$$dy = \frac{(x^7 + b)\,.\,(dx^3 + da) - (x^3 + a)\,.\,(dx^7 + db)}{(x^7 + b)^2}.$$

Здѣсь беремъ dx^3 и dx^7 по формулѣ (217), дифференціалы же da и db по (214) равны нулю. Итакъ:

$$dy = \frac{(x^7 + b)\,(3x^2\,dx) - (x^3 + a)\,(7x^6\,dx)}{(x^7 + b)^2}.$$

Выводя, наконецъ, dx за скобки, получимъ:

$$dy = \frac{(x^7 + b)\,3x^2 - (x^3 + a)\,7x^6}{(x^7 + b)^2}\,dx = \frac{3x^2\,(x^7 + b) - 7x^6\,(x^3 + a)}{(x^7 + b)^2}\,dx.$$

Прежде чѣмъ идти далѣе, совѣтуемъ продѣлать послѣдовательно задачи: 87—109, изъ числа приложенныхъ въ концѣ нашей книги.

Дифференцированіе радикаловъ.

§ 141. Пока еще не пріобрѣтенъ навыкъ, удобнѣе дифференцировать радикалы (напримѣръ $\sqrt{x}$), преобразуя ихъ предварительно въ дробныя

степени по извѣстной, изъ элементарной алгебры, формулѣ:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \ldots \ldots \ldots \ldots (231)$$

Примѣръ 1-ый. $y = \sqrt{x}$. По (231) получимъ: $y = x^{\frac{1}{2}}$. По формулѣ (217) получимъ:

$$dy = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Но по извѣстной формулѣ алгебры $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Слѣдовательно: $dy = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$.

Переходя опять отъ дробной степени къ радикалу, получимъ: $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Примѣръ 2-ой. $y = \sqrt{x^3}$. Надѣемся, что теперь будетъ понятно уже и безъ объясненій.

$$dy = d\,(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{x}\, dx.$$

Примѣръ 3-ій. $y = \sqrt{\sin x}$.

$$dy = d\,(\sin x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\sin x)^{\frac{1}{2}-1} d \sin x = \frac{1}{2} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} . \cos x\, dx = \frac{\cos x\, dx}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Понятіе о рядахъ.

§ 142. Безконечнымъ рядомъ называется сумма безконечнаго числа членовъ, составленныхъ по какому-нибудь опредѣленному закону. Сумму n членовъ мы будемъ обозначать такъ S_n. Положимъ, что имѣемъ слѣдующій рядъ, состоящій изъ n членовъ:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n \ldots \ldots (232)$$

Если, съ возрастаніемъ числа членовъ n, рядъ (232) приближается къ какому-нибудь опредѣленному предѣлу, то онъ называется *сходящимся*. Напримѣръ, извѣстная изъ алгебры безконечно-убывающая геометрическая прогрессія

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \ldots \ldots (233)$$

есть рядъ сходящійся, потому что, при безконечномъ числѣ членовъ, этотъ рядъ равенъ $\frac{a}{1-q}$, и чѣмъ большее число членовъ мы возьмемъ, тѣмъ ближе ихъ сумма подойдетъ къ этому предѣлу $\frac{a}{1-q}$.

Сумму n членовъ мы условились изображать чрезъ S_n. Будемъ изображать чрезъ S (безъ значка) сумму безконечнаго числа членовъ. Разность $S - S_n$ называется *остаткомъ* или остаточнымъ членомъ ряда и изображается чрезъ R_n. Остатки будутъ различные, смотря по тому, на какомъ членѣ мы обрываемъ рядъ. Значекъ n въ обозначеніи R_n показываетъ, что мы оборвали рядъ на n-омъ членѣ (что мы ограничиваемся разсмотрѣніемъ суммы n первыхъ членовъ).

Если, съ увеличенiемъ n до безконечности, рядъ S_n не приближается ни къ какому опредѣленному предѣлу, то такой рядъ называется *расходящимся.*

Признаки сходимости рядовъ.

§ 143. Чрезвычайно важно бываетъ знать, сходящiйся ли данный рядъ или нѣтъ. Для этого сравниваютъ данный рядъ съ какимъ-нибудь другимъ, въ сходимости котораго увѣрены, и если члены даннаго ряда не превышаютъ членовъ того, сходимость котораго уже раньше была доказана, то заключаютъ, что и данный рядъ сходящiйся. Очень удобно, напримѣръ, сравнивать данный рядъ съ безконечно-убывающею геометрическою прогрессiею, которая, какъ извѣстно, имѣетъ опредѣленную сумму $\frac{a}{1-q}$ и потому представляетъ собою рядъ сходящiйся. Докажемъ слѣдующее:

Теорема. *Рядъ, всѣ члены котораго положительны, оказывается сходящимся въ томъ случаѣ, если, начиная съ какого-нибудь члена, отношенiе всякаго послѣдующаго члена къ предыдущему* $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ *менѣе какой-нибудь правильной дроби* k.

Доказательство. Пусть это условiе выполняется, начиная съ члена U_n. Возьмемъ какое-нибудь число m, большее чѣмъ n. Согласно предположенiю будемъ имѣть: $\frac{U_{m+1}}{U_m} < k$; $\frac{U_{m+2}}{U_{m+1}} < k \ldots$ Откуда:

$$U_{m+1} < kU_m$$
$$U_{m+2} < kU_{m+1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

а слѣдовательно и подавно:

$$U_{m+1} < kU_m$$
$$U_{m+2} < k^2U_m$$
$$U_{m+3} < k^3U_m$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$U_{m+p} < k^pU_m.$$

Складывая эти неравенства, получимъ:

$$(U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \ldots + U_{m+p}) < (k + k^2 + k^3 + k^4 + \ldots + k^p)\,U_m. \quad (234)$$

Но сумма прогрессiи $k + k^2 + k^3 + \ldots + k^p$, число членовъ которой p, равна, какъ извѣстно изъ элементарной алгебры: $\frac{k-k^{p+1}}{1-k}$. Слѣдовательно, изъ (234) получаемъ:

$$U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \ldots + U_{m+p} < \frac{k-k^{p+1}}{1-k}\,.\,U_m \quad . \quad . \quad (235)$$

По предположенiю $k < 1$, какъ правильная дробь. Слѣдовательно, величина $\frac{k-k^{p+1}}{1-k}$ конечная, какъ бы ни было велико p. Величина U_m можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, если возьмемъ доста-

точно большое m, потому что, согласно предположенію, $U_m < k^{m-n} U_n$, такъ какъ было условлено, что отношеніе слѣдующаго члена къ предыдущему $< k$, а такихъ отношеній существуетъ между членами U_n и U_m всего $m - n$. Если-же $U_m < k^{m-n} U_n$, то всегда можно взять такое большое m, что $(m - n)$-ая степень отъ правильной дроби k будетъ достаточно мала для того, чтобы величина $k^{m-n} U_n$ сдѣлалась менѣе всякой данной величины. Итакъ, неравенство (235) показываетъ, что остатокъ

$$R_m = U_{m+1} + U_{m+2} + \ldots + U_{m+p}$$

можетъ быть сдѣланъ, выборомъ достаточно большаго m, менѣе всякой данной величины, какъ бы велико ни было p. Слѣдовательно, при высказанныхъ въ теоремѣ условіяхъ, рядъ оказывается сходящимся. Теорема доказана.

Напротивъ того, если $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, то рядъ окажется расходящимся, потому что тогда члены, начиная съ U_n, будутъ возрастать.

Примѣръ.

§ 144. Рядъ:

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1)} + \ldots \qquad (236)$$

сходящійся, потому что:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n\,(n+1)}\right) : \left(\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\right) = \frac{x}{n+1},$$

но $(n+1)$ все увеличивается и, начиная съ нѣкотораго n, величина $\frac{x}{n+1}$ сдѣлается менѣе правильной дроби k. Слѣдовательно, по теоремѣ § 143-го, рядъ (236) сходящійся.

Число e.

§ 145. Если въ рядѣ (236) сдѣлаемъ $x = 1$, то получимъ рядъ:

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots \qquad (237)$$

Это рядъ сходящійся, потому что представляетъ собою частный случай ряда (236). Предѣлъ, котораго онъ достигаетъ при безконечномъ числѣ членовъ, представляетъ собою несоизмѣримое число, называемое буквою e и играющее въ анализѣ весьма важную роль (это есть основаніе Неперовскихъ логариѳмовъ). Число e, какъ не трудно видѣть, больше чѣмъ 2 и меньше чѣмъ три. Дѣйствительно оно больше чѣмъ 2, потому что, для его составленія, нужно, по формулѣ (237), къ 2 прибавить еще безконечное число членовъ. Что оно меньше трехъ можно видѣть изъ сравненія ряда (237) съ рядомъ:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \qquad (238)$$

Рядъ (238) есть безконечно-убывающая геометрическая прогрессія, сумма которой равна $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$. Поэтому:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 3, \quad (239)$$

а по (237):

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots = e. \quad (240)$$

Какъ видно изъ сравненія (239) съ (240), члены ряда (240) соотвѣтственно менѣе членовъ ряда (239). Слѣдовательно, $e < 3$.

§ 146. Теорема. *Число e есть предѣлъ величины* $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *при возрастаніи m до безконечности.*

Доказательство. Разложимъ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ по биному Ньютона. Получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{m^3} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{1}{m^n} + \ldots$$

Это равенство можно написать въ такомъ видѣ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2 + \frac{1-\frac{1}{m}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots +$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots \quad (241)$$

При $m = \infty$ дроби $\frac{1}{m}, \frac{2}{m} \ldots \frac{n-1}{m}$ обратятся въ нули, и рядъ (241) обратится въ рядъ (237), равный e. Итакъ:

$$\lim_{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e. \quad (242)$$

Числовая величина e.

§ 147. Подобно тому какъ Архимедово число π можно вычислить только приблизительно, точно такъ же и e можно вычислить только приблизительно. Вычисляется оно помощью ряда (240), ограничиваясь какимъ-нибудь конечнымъ числомъ его членовъ. Чтобы знать, какую ошибку мы при

этомъ дѣлаемъ, разсмотримъ остатокъ R_n ряда (240). Имѣемъ:

$$R_n = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n\,.\,(n+1)} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n+1)\,(n+2)} + \ldots$$

Очевидно, что:

$$R_n < \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right).$$

Но стоящая въ скобкахъ величина есть геометрическая прогрессія сумма которой по правиламъ элементарной алгебры

$$= \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)\,(n+1-1)} = \frac{1}{n}.$$

Итакъ:

$$R_n < \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Значитъ, если ограничимся, напримѣръ, только четырьмя членами ряда (240), то сдѣлаемъ ошибку

$$R_4 < \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cdot \frac{1}{4}$$

меньшую чѣмъ $\frac{1}{96}$.

При 5 членахъ ошибка будетъ меньше $\frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{5}$, то есть меньше $\frac{1}{600}$. Значитъ рядъ (240) быстро сходящійся. Такимъ образомъ, если вычислимъ e съ ошибкою меньшею, чѣмъ 0,0000001, то найдемъ:

$$e = 2{,}7182818\ldots \qquad (243)$$

Производная отъ логариѳма.

§ 148. Найдемъ производную отъ $log_a\,x$, взятаго при основаніи, равномъ a. Имѣемъ: $y = log_a\,x$. Это значитъ (см. элементарную алгебру), что $x = a^y$. Имѣемъ: $y + \Delta y = log_a\,(x + \Delta x)$, откуда:

$$\Delta y = log_a\,(x + \Delta x) - log_a\,x = log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Полагая $\frac{x}{\Delta x} = m$, получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\,log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{m}{x}\,log_a\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\,log_a\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \ldots \qquad (244)$$

При уменьшеніи Δx до нуля, $m = \frac{x}{\Delta x}$ возрастаетъ до безконечности.

Но, по (242), $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$. Слѣдовательно, равенство (244) даетъ:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a e,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e \, . \, dx. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (245)$$

Если же логариѳмъ брался бы въ такой системѣ, въ которой основаніемъ было бы не a, но e, то $\log_a e = 1$ и (245) обратилось бы въ:

$$d \, lg \, x = \frac{dx}{x} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (246)$$

Несравненно большая простота формулы (246) сравнительно съ формулою (245) заставляетъ предпочесть въ анализѣ употребленіе Неперовскихъ логариѳмовъ, имѣющихъ основаніе e. Переходъ же отъ логариѳмовъ, взятыхъ при основаніи 10, къ Неперовскимъ дѣлается по извѣстнымъ изъ алгебры формуламъ:

$$\log_{10} x = lg \, x \, . \, \log_{10} e,$$

гдѣ $\log_{10} e = 0{,}4342945$.

Неперовскіе логариѳмы будемъ обозначать двумя только буквами lg.

Производная отъ a^x.

§ 149. Продифференцируемъ показательную функцію a^x. Дано $y = a^x$; логариѳмируя, получимъ: $lg\, y = x \, lg\, a$. Дифференцируя обѣ части этого равенства и пользуясь формулою (246), получимъ:

$$\frac{dy}{y} = lg\, a \, . \, dx,$$

откуда:

$$dy = y \, . \, lg\, a \, . \, dx.$$

Подставляя вмѣсто y его величину a^x, получимъ:

$$dy = d(a^x) = a^x \, . \, lg\, a \, . \, dx. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (247)$$

По этой формулѣ получимъ:

$$d(e^x) = e^x \, dx. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (248)$$

Дѣля на dx, получимъ, какъ извѣстно по (209) и (210), производную:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (249)$$

Это замѣчательное свойство функціи e^x, что ея производная равна ей же самой.

Употребленіе логариѳмированія при дифференцированіи нѣкоторыхъ функцій.

§ 150. Весьма часто бываетъ удобнѣе сначала прологариѳмировать данную функцію, а потомъ уже дифференцировать. Напримѣръ, пусть намъ дано $y = x^x$. Она и не показательная и не степень съ постояннымъ показателемъ. Но намъ нечего и входить въ разборъ того, каковы ея отличія отъ этихъ функцій, а мы просто беремъ логариѳмы отъ обѣихъ частей равенства $y = x^x$. Получимъ: $lg\, y = x\, lg\, x$. Дифференцируя здѣсь обѣ части равенства, и пользуясь формулами (216) и (246), получимъ:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\, dx}{x} + lg\, x\, .\, dx = (1 + lg\, x)\, dx,$$

откуда:
$$dy = y\,(1 + lg\, x)\, dx = x^x\,(1 + lg\, x)\, dx.$$

Частныя производныя функціи многихъ перемѣнныхъ.

§ 151. Если функція зависитъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, напримѣръ $f\,(x,\ y,\ z)$, то можно измѣнять въ ней одно какое-нибудь перемѣнное, не измѣняя остальныхъ. Производная, взятая отъ такой функціи по одному изъ перемѣнныхъ въ предположеніи, что другія перемѣнныя не измѣняются, называется *частною производною*. Напримѣръ, отъ $f\,(x, y, z)$ можно взять частную производную по x, предполагая, что y и z остаются постоянными. Эта частная производная обозначается такъ $\frac{\partial f\,(x, y, z)}{\partial x}$ или такъ $f_x'\,(x, y, z)$. Отъ той же $f\,(x, y, z)$ можно взять частную производную по y въ предположеніи, что только y измѣняется, а x и z остаются постоянными; эта производная обозначается такъ $\frac{\partial f\,(x, y, z)}{\partial y}$ или такъ $f_y'\,(x, y, z)$. Въ такомъ же смыслѣ можно взять частную производную по z, обозначаемую такъ $\frac{\partial f\,(x, y, z)}{\partial z}$ или такъ $f_z'\,(x, y, z)$. При обозначеніи частныхъ производныхъ, пользуются не прямыми d, а круглыми ∂, для указанія на то, что стоящая въ числителяхъ частныхъ производныхъ величина $\partial f\,(x,\ y,\ z)$ не одна и та же, такъ какъ и самое дифференцированіе производится при разныхъ предположеніяхъ: въ $\frac{\partial f\,(x, y, z)}{\partial x}$ одно x предполагается измѣняющимся, въ $\frac{\partial f\,(x, y, z)}{\partial y}$ одно y измѣняется, и такъ далѣе.

Примѣръ 1-ый. Опредѣлимъ частныя производныя отъ $f\,(x, y, z) = xyz^2$. Полагая y и z постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2.$$

Полагая x и z постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz^2.$$

Полагая x и y постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\,2z = 2xyz.$$

Примѣръ 2-ой. Опредѣлить частныя производныя отъ

$$f(x, y, z) = x \,.\, lg\, y + z.$$

Получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = lg\, y;\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y};\ \ \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

Замѣчаніе: Здѣсь уже нельзя разсматривать частную производную какъ отношеніе одного и того же ∂f къ ∂x, къ ∂y и къ ∂z, потому что въ каждой частной производной ∂f берется при особыхъ предположеніяхъ о постоянности остальныхъ перемѣнныхъ.

Полный дифференціалъ.

§ 152. Посмотримъ теперь, каково будетъ приращеніе функціи, если всѣ перемѣнныя будутъ измѣняться—если всѣ онѣ получатъ приращеніе. Для простоты разсмотримъ функцію z отъ двухъ перемѣнныхъ x и y, такъ что: $z = f(x, y)$. Если x получитъ приращеніе Δx, а y — приращеніе Δy, то z получитъ приращеніе Δz:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y). \ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (250)$$

Вычтемъ и приложимъ сюда $f(x + \Delta x, y)$. Получимъ:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x). \ .\ .\ .\ (251)$$

Здѣсь разность $f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y)$ можно разсматривать какъ приращеніе, полученное функціею при постоянномъ значеніи икса: $x + \Delta x$ и при измѣненіи одного игрека. Примѣняя къ этому приращенію формулу (207) и пользуясь понятіемъ о *частной производной* $f_y'(x + h, y)$, получимъ:

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y) = f_y'(x + \Delta x,\ y) \,.\, dy. \ .\ .\ .\ (252)$$

Точно такъ же:

$$f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y) = f_x'(x, y) \,.\, dx. \ \ .\ .\ .\ .\ .\ (253)$$

Складывая почленно (252) и (253) и сравнивая эту сумму съ (251), получимъ:

$$\Delta z = f_y'(x + \Delta x, y)\, dy + f_x'(x, y)\, dx. \ .\ .\ .\ .\ .\ (254)$$

Но $f_y'(x + \Delta x, y)$ отличается отъ $f_y'(x, y)$ на безконечно-малую величину и слѣдовательно, $f_y'(x + \Delta x, y)\, dy$ отличается отъ $f_y'(x, y)\, dy$ на безконечно-малую величину 2-го порядка, которою можно пренебречь при сложеніи съ безконечно-малою $f_x'(x, y) \,.\, dx$ 1-го порядка. Поэтому въ (254) можно вмѣсто $f_y'(x + \Delta x, y)\, dy$ поставить $f_y'(x, y)\, dy$. Тогда получимъ:

$$\Delta z = f_y'(x, y) \,.\, dy + f_x'(x, y) \,.\, dx. \ \ .\ .\ .\ .\ .\ (255)$$

Эту величину называютъ полнымъ дифференціаломъ функцій $f(x, y)$; обозначаютъ ее такъ: dz или $df(x, y)$. Производная, полученная отъ такого дифференцированія $f(x, y)$ по x, при которомъ y принимается за постоянное, обозначается круглыми ∂ такъ $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$. Производная, полученная отъ $f(x, y)$ при дифференцированіи ея по y принимая x за постоянное обозначается, такъ $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$. Эти производныя называются:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{частная производная отъ } z \text{ по } x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{частная производная отъ } z \text{ по } y$$

Вводя эти обозначенія въ (255), получимъ:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (256)$$

Примѣръ. Найти полный дифференціалъ отъ $x^2y = z$. Вычисляемъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad dz = 2xy\,dx + x^2dy.$$

Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что для $w = f(x, y, z, u \ldots v)$ полный дифференціалъ равенъ:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial u}du + \ldots + \frac{\partial w}{\partial v}dv \quad \ldots (257)$$

Производныя сложныхъ функцій.

§ 153. Если u, v суть функціи икса, и изъ нихъ еще составлено $f(u, v) = y$, то по (256):

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv,$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} \quad \ldots (258)$$

Примѣръ: $\qquad y = u\,.\,v\,.\,w.$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = vw; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = uw; \quad \frac{\partial y}{\partial w} = uv.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = v\,.\,w\,\frac{du}{dx} + uw\,\frac{dv}{dx} + uv\,.\,\frac{dw}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (259)$$

Производныя неявныхъ функцій.

§ 154. Бываетъ иногда нужно вычислить $\frac{dy}{dx}$ при томъ, что y не выраженъ чрезъ x, но дано уравненіе

$$f(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (260)$$

которое мы не хотимъ, или не умѣемъ, рѣшить относительно y. Можно, и не опредѣляя изъ него y, вычислить $\frac{dy}{dx}$. А именно, по (256) имѣемъ:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (261)$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что y есть неявная функція икса.

Примѣръ: Опредѣлить $\frac{dy}{dx}$, если дано: $x^5 - sin^3 y = 0$. Мы не умѣемъ рѣшить это уравненіе, но вычисливъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3\, sin^2 y\, cos\, y,$$

по формулѣ (261) пишемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{3\, sin^2 y\, cos\, y}.$$

Если имѣемъ $f(x, y, u, v)$, гдѣ x, y независимыя перемѣнныя, u, v ихъ функціи, то по (258) получимъ:

$$\frac{df(x, y, u, v)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Но $$\frac{dx}{dx} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Поэтому:

$$\frac{df(x, y, u, v)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (262)$$

— полная производная отъ $f(x, y, u, v)$ по x получается, слѣдовательно дифференцируя ее по x, по сколько онъ явно въ нее входитъ, дифференцируя ее затѣмъ по x принимая въ разсчетъ зависимости функцій u и v отъ x, и складывая результаты.

Примѣръ:

$$\frac{d\left[\frac{x^2}{\varphi(x)} + \psi(x)\right]}{dx}.$$

Здѣсь $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)}\, 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{x^2}{\varphi(x)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 1$$

$$\frac{d\left[\frac{x^2}{\varphi(x)} + \psi(x)\right]}{dx} = \frac{1}{\varphi(x)}\, 2x + \psi'(x) - \frac{x^2}{[\varphi(x)]^2}\, \varphi'(x).$$

Производныя высшихъ порядковъ.

§ 155. Первую производную можно опять дифференцировать. Получимъ производную отъ производной, называемую *второю* производною, и такъ далѣе. Приняты для высшихъ производныхъ такія обозначенія:

$$y = f(x); \quad y' = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \text{первая производная.}$$

$$y'' = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \text{вторая производная.}$$

$$y''' = \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \text{третья производная.}$$

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = n\text{-ая производная.}$$

Примѣръ 1-й. $y = x^3$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad \frac{d^4y}{dx} = 0.$$

Примѣръ 2-й. $y = x^m$.

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}; \frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dy^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} \quad . \; . \; . \; (263)$$

Въ случаѣ функціи многихъ перемѣнныхъ можно такую функцію дифференцировать сначала по x, потомъ по y.

Если $z = f(x, y)$, то можно вычислить

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Напримѣръ

$$z = x^2 \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial(2x \, . \sin y)}{\partial y} = 2x \cos y.$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 \, . \cos y}{\partial x} = 2x \, . \cos y.$$

Мы видимъ, что здѣсь

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Эта независимость второй производной отъ порядка дифференцированія всегда существуетъ и доказывается въ подробныхъ курсахъ для всякихъ функцій. Поэтому принято такимъ производнымъ давать общее обозначеніе $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Такъ что:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \,.\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \,.\, \partial x} \quad . \;.\; .\; .\; . \; (264)$$

Дифференціалы отъ функцій многихъ перемѣнныхъ тоже можно опять дифференцировать. Такъ если данъ:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy,$$

то, дифференцируя его, получимъ:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,(dy)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, dy^2. \quad . \;.\; .\; .\; . \; (265)$$

Весьма похоже на $a^2 + 2ab + b^2$. Дифференцируя еще разъ, получили бы величину сходную съ $(a + b)^3$. Вообще, если $u = f(x, y, z)$, то:

$$d^n u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{dy}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz\right]^{(n)} \quad . \;.\; .\; .\; . \; (266)$$

Здѣсь n поставленъ во второй части въ скобки, потому что, продѣлавъ вычисленіе по биному Ньютона, надо въ правой части вездѣ замѣнить $(\partial u)^n$ чрезъ $\partial^n u$, такъ что въ формулѣ (266) величина n не есть показатель.

Замѣна одного независимаго перемѣннаго другимъ.

§ 156. Когда мы принимаемъ за *независимое* перемѣнное вмѣсто x какое-нибудь другое u, то уже разсматриваемъ du какъ постоянное, а dx дѣлается перемѣннымъ. При dx постоянномъ, $d^2x = 0$; при du постоянномъ $d^2u = 0$.

Итакъ, для замѣны независимаго перемѣннаго другимъ, нужно только помнить, что dx дѣлается перемѣннымъ, когда x перестаетъ быть независимымъ и потому дифференцировать $\frac{dy}{dx}$ приходится по (222) какъ дробь, въ которой и числитель и знаменатель перемѣнныя (зависимыя). Слѣдовательно, чтобы, зная первую производную $\frac{dy}{dx}$, получить изъ нея вторую при новомъ независимомъ перемѣнномъ u, нужно взять дифференціалъ отъ $\frac{xd}{yd}$ какъ отъ дроби и полученный результатъ раздѣлить на dx. Вто-

рая производная получится слѣдовательно въ видѣ:

$$\frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{(dx)^2 \cdot dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (267)$$

Будемъ отличать дифференціалы, взятые въ предположеніи, что независимымъ остается x, значками, такъ: $d_x{}^2y$. Дифференціалы же, взятые въ предположеніи, что за независимое перемѣнное принято U, будемъ обозначать по прежнему. (Примемъ только на время такое обозначеніе). Вторая производная (267) замѣняетъ $\frac{d_x{}^2y}{dx^2}$. Слѣдовательно:

$$\frac{d_x{}^2y}{dx^2} \text{ замѣняется выраженіемъ } \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^2 \cdot dx} \ldots (268)$$

Умноживъ на dx^2, получимъ:

$$d_x{}^2y = \frac{dx \cdot d^2y - dy\, d^2x}{dx} \quad \ldots\ldots (269)$$

Примѣръ. Пусть, напримѣръ, въ выраженіи:

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d_x{}^2y}{dx^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (270)$$

Нужно замѣнить прямоугольныя координаты x, y полярными r, φ, связанными съ прежними перемѣнными равенствами $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$. (Именно такое преобразованіе формулы (270) намъ потомъ понадобится). Прямо подставить, вмѣсто x, y, ихъ выраженія въ (270) мы не имѣемъ права, потому что замѣняется независимое перемѣнное. Необходимо сначала замѣнить въ (270) вторую производную $\frac{d_x{}^2y}{dx^2}$ ея выраженіемъ по формулѣ (267). Получимъ:

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d_x{}^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 \cdot dx}} = \frac{[dx^2 + dy^2]^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x} \quad \ldots (271)$$

Теперь изъ данныхъ соотношеній: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ вычисляемъ (не столь важно продѣлать эти вычисленія самому, какъ понять смыслъ перехода отъ x, y къ r, φ):

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos\varphi \cdot dr - r\sin\varphi \cdot d\varphi;\ dy = \sin\varphi \cdot dr + r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \\ d^2x &= \cos\varphi \cdot d^2r - 2\sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi - r\cos\varphi\, d\varphi^2 \\ d^2y &= \sin\varphi \cdot d^2r + 2\cos\varphi \cdot dr \cdot d\varphi - r\sin\varphi \cdot d\varphi^2 \end{aligned}\right\} . (272)$$

Вставляя эти величины въ (271), получимъ:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d_x^2y}{dx^2}} = \frac{[dr^2 + r^2\, d\varphi^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2\, d\varphi^3 + 2dr^2\, d\varphi - rd^2 r\,.\, d\varphi} = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\,\frac{dr}{d\varphi^2} - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}}\,.$$

Опять повторяемъ, что продѣлывать всѣ вычисленія въ этомъ примѣрѣ было бы слишкомъ долго, но главное надо понять слѣдующее. Въ параграфѣ 192-мъ мы увидимъ, что формула (270) имѣетъ весьма важно геометрическое значеніе. Эта формула выводится сравнительно просто въ координатахъ (x, y), является необходимость получить ее и въ полярныхъ координатахъ (r, φ), при чемъ, не смотря на довольно длинное вычисленіе для подстановки въ (270) дифференціаловъ (272), всетаки этотъ путь много удобнѣе непосредственнаго вывода формулы въ полярныхъ координатахъ. Вотъ именно въ такихъ-то случаяхъ и необходима формула (267).

Собственно механизмъ дефференціальнаго исчисленія, въ предѣлахъ нашихъ цѣлей, уже достаточно выясненъ. Рекомендуемъ продѣлать задачи.

Намъ предстоитъ теперь ознакомиться съ приложеніемъ дифференціальнаго исчисленія къ теоріи рядовъ, изслѣдованію функцій и геометріи; тутъ-то и обнаружится вся сила этого метода.

Аналитическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

1) Ряды.

Рядъ Тайлора для цѣлой раціональной алгебраической функціи.

§ 157. Познакомимся съ однимъ рядомъ, имѣющимъ первостепенное значеніе въ математикѣ и являющимся орудіемъ изслѣдованія другихъ рядовъ, функцій, главнѣйшимъ орудіемъ приближенныхъ вычисленій и краеугольнымъ камнемъ теоріи функцій. Это такъ называемый рядъ Тайлора.

Возьмемъ сначала алгебраическую раціональную цѣлую функцію m-го порядка самаго общаго вида:

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3^{m-3} + \ldots$$
$$+ A_{m-3}x^3 + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \quad . \; . \; . \; . \; (273)$$

и посмотримъ, во что обратится эта функція, если мы дадимъ иксу *конечное* приращеніе h. Другими словами по данной формулѣ (273) функціи $f(x)$, опредѣлимъ $f(x+h)$.

Вставляя въ (273), вмѣсто x, величину $x+h$, получимъ:

$$f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + A_3(x+h)^{m-3} + \ldots$$
$$+ A_{m-2}(x+h)^2 + A_{m-1}(x+h) + A_m \quad . \; . \; . \; . \; (274)$$

Разложимъ теперь, находящіяся въ правой части, степени двучлена $(x+h)$ по биному Ньютона. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) = A_0 \Big[& x^m + mx^{m-1} \cdot h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot h^2 + \ldots \\ & + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 h^{m-2} + mxh^{m-1} + h^m \Big] \\ + A_1 \Big[& x^{m-1} + (m-1) x^{m-2} \cdot h \\ & + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^{m-3} \cdot h^2 + \ldots \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} & x^2 h^{m-3} + (m-1)\, x \cdot h^{m-2} + h^{m-1} \Big] \\ + A_2 \Big[& x^{m-2} + (m-2) x^{m-3} \cdot h \\ & + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} x^{m-4} \cdot h^2 + \ldots \\ + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} & x^2 \cdot h^{m-4} + (m-2)\, x \cdot h^{m-3} + h^{m-2} \Big] \\ + \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + A_{m-2} & [x^2 + 2 \cdot xh + h^2] \\ + A_{m-1} & [x + h] \\ + A_m & \end{aligned}\right\} \ldots (275)$$

Отбирая первые члены этихъ строкъ, получимъ, какъ видимъ, самую $f(x)$:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-3} x^3 +$$
$$+ A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = f(x).$$

Отбирая въ (275) члены, имѣющіе множители h, получимъ:

$$h\,[A_0\, mx^{m-1} + A_1 (m-1)\, x^{m-2} + A_2 (m-2)\, x^{m-3} + \ldots +$$
$$+ A_{m-3} \cdot 3 \cdot x^2 + A_{m-2} \cdot 2x + A_{m-1}] = hf'(x).$$

Если бы мы взяли отъ (273) производную, то получили бы эту самую строку. Мы и написали, что она $= f'(x)$.

Отбирая члены, содержащіе одинаковыя степени h, получимъ слѣдующія строки, которыя окажутся равными тѣмъ величинамъ, которымъ они и показаны приравненными:

$$\frac{h^2}{1 \cdot 2}\,[A_0\, m(m-1)\, x^{m-2} + A_1 (m-1)(m-2)\, x^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2}]$$
$$= \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x)$$

$$\frac{h^3}{1.2.3}[A_0 m(m-1)(m-2)x^{m-2} + A_1(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} + \ldots]$$
$$= \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x)$$

. . . .

$$\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}[A_0 m(m-1)\ldots 3.2.1.x + (m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.A_1] =$$
$$= \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} f^{(m-1)}(x)$$

$$\frac{h^m}{1.2\ldots(m-1)m} A_0 m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1 =$$
$$= \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x)$$

Итакъ:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x)$$
$$+ \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x) \quad . \ . \ . \ . \ (276)$$

Вотъ какое замѣчательное соотношеніе существуетъ между $f(x+h)$ и производными отъ $f(x)$ въ томъ случаѣ, если $f(x)$ есть алгебраическая, раціональная, цѣлая функція вида (273). Вопросъ о томъ, во что обратится $f(x)$, если x получитъ приращеніе h, разрѣшается формулою (276) для функцій вида (273). Этотъ рядъ (276) и есть рядъ Тайлора для алгебраическихъ, раціональныхъ, цѣлыхъ функцій. Ниже увидимъ, что онъ примѣнимъ, съ нѣкоторыми измѣненіями, и къ трансцендентнымъ функціямъ; главная разница окажется въ томъ, что для алгебраической функціи вида (273) этотъ рядъ имѣетъ конечное число членовъ, именно $(m+1)$, для трансцендентныхъ же функцій онъ имѣетъ безконечно большое число членовъ.

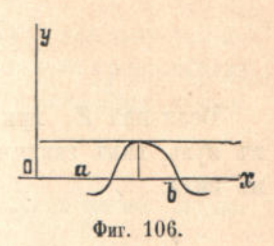
Рядъ Тайлора для какой-либо $f(x)$.

§ 158. *Лемма:* (вспомогательная теорема). *Если непрерывная функція $f(x)$ обращается въ нуль при $x=a$ и при $x=b$ и производная $f'(x)$ непрерывна при измѣненіи икса въ предѣлахъ отъ a до b, то эта производная обращается въ нуль по крайней мѣрѣ при одномъ изъ значеній икса, заключающихся между a и b.*

Доказательство. Если бы $f'(x)$ не обращалась въ нуль ни при какомъ значеніи x, лежащемъ между a и b (то есть большемъ одного изъ нихъ и меньшимъ другого), то $f'(x)$ оставалась бы или положительною или отрицательною при измѣненіи икса отъ a до b. Но тогда $f(x)$, при измѣненіи x отъ a до b, или все время возрастала бы (см. § 119) или бы все время уменьшалась; тогда она не могла бы быть равною нулю при обоихъ предѣлахъ: при $x=a$ и при $x=b$, такъ какъ, возрастая

отъ нуля, она не могла бы опять дойти до нуля и, уменьшаясь отъ нуля, не могла бы опять дойти до нуля. Лемма доказана.

Геометрическое значенiе этой леммы таково: если кривая $y = f(x)$ пересѣкаетъ ось абсциссъ при $x = a$ и при $x = b$, то при какомъ-нибудь промежуточномъ значенiи x (фиг. 106) касательная должна сдѣлаться параллельною оси абсциссъ.



Фиг. 106.

Разсмотримъ теперь формулу:

$$f(X) = f(x) + \frac{X-x}{1} \cdot f'(x) + \frac{(X-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \ldots + R \quad . \; . \; (277)$$

въ которой X и x суть какiя-нибудь два числа. Постараемся наити такую величипу R, которая дѣлала бы эту формулу вѣрною. Замѣнимъ число x перемѣнною величиною z и перенесемъ всѣ члены равенства (277) въ одну сторону. Получимъ:

$$f(X) - f(z) - (X-z) f'(z) - \frac{(X-z)^2}{1 \cdot 2} f''(z) - \ldots$$
$$- \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(z) - R = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (278)$$

Вмѣсто того, чтобы искать R, дѣлающее равенство (277) вѣрнымъ, будемъ искать величину P, удовлетворяющую этому условiю и находящуюся съ R въ такомъ соотношенiи

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n(n+1)} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (279)$$

Подставляя въ (278) вмѣсто R его величину изъ (279), замѣтимъ, что лѣвая часть равенства (278) обратится въ:

$$f(X) - f(z) - (X-z) \cdot f'(z) - \frac{(X-z)^2}{1 \cdot 2} f''(z) - \ldots$$
$$- \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot f^{(n)} z - \frac{(X-z)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; (280)$$

Если равенство (277) было бы вѣрно, то величина (280) обратилась бы въ нуль при $z = x$. Она кромѣ того, очевидно обращается въ нуль при $z = X$. Поэтому, согласно леммѣ, доказанной въ началѣ настоящаго параграфа, производная по z отъ величины (280) должна обратиться въ нуль при какомъ-нибудь значенiи z, заключащемся между числами x и X. Возьмемъ производную отъ (280). Получимъ:

$$-f'(z) - (X-z) f''(z) + f'(z) - \frac{(X-z)}{1 \cdot 2} f'''(z)$$
$$+ (X-z) f''(z) \ldots - \frac{(X-z)^n}{1 \ldots n} f^{(n+1)}(z) + \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} P.$$

Здѣсь, какъ мы видимъ, всѣ члены попарно уничтожаются кромѣ двухъ послѣднихъ. Итакъ производная отъ (280) по z будетъ:

$$-\frac{(X-z)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(z) + \frac{(X-z)^n}{1.2\ldots n} P \quad \ldots\ldots (281)$$

Величина Z, при которой эта производная обращается, по леммѣ, въ нуль, какъ заключающаяся между x и X, можетъ быть представлена въ видѣ:

$$x + \text{дробная часть отъ } (X-x) \quad \ldots\ldots (282)$$

Называя чрезъ θ дробь меньшую единицы (ближе мы не хотимъ опредѣлять значеніе θ) можно представить величину (282) такъ:

$$x + \theta\,(X-x) \quad \ldots\ldots (283)$$

По леммѣ слѣдуетъ, что существуетъ такое значеніе дроби θ, при которомъ, полагая $z = x + \theta\,(X-x)$ въ производной (281), обратимъ эту производную въ нуль. Но производная эта равна, по выносѣ общаго множителя $\frac{(X-z)^n}{1.2\ldots n}$ за скобки, величинѣ:

$$\frac{(X-z)^n}{1.2\ldots n}\left[P - f^{(n+1)}(z)\right] \quad \ldots\ldots (284)$$

которая обращается въ нуль, или при $z = X$ или при

$$P = f^{(n+1)}(z) \quad \ldots\ldots (285)$$

Но величина (283), обращающая въ нуль производную (284), должна, по леммѣ, заключаться въ промежуткѣ между X и x, а не быть равною X. Слѣдовательно, должно удовлетворяться (285) при z равномъ величинѣ (283). Итакъ:

$$P = f^{(n+1)}\left[x + \theta\,(X-x)\right].$$

Подставляя эту величину вмѣсто P въ (279) получимъ:

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x)\left[x + \theta\,(X-x)\right] \quad \ldots\ldots (286)$$

Подставляя эту величину n въ (277) и полагая $X - x = h$, получимъ:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{(n+1)}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad \ldots (287)$$

Если остатокъ этого ряда (послѣдній членъ):

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad \ldots\ldots (288)$$

обращается въ нуль, при возрастаніи n до безконечности, то рядъ (287)

сходящійся и формула (287) вѣрна при безконечно большомъ числѣ членовъ ряда.

Рядъ (287) и есть рядъ Тайлора, годный не только для алгебраической, но и для трансцендентныхъ функцій, лишь бы онѣ не претерпѣвали перерыва. Остаточный членъ въ видѣ (288) былъ опредѣленъ Лагранжемъ.

Рядъ Макъ-Лорена.

§ 159. Вставляя въ рядъ (287) Тайлора x вмѣсто h, o вмѣсто x, получимъ рядъ Макъ-Лорена:

$$f(x) = f(o) + xf'(o) + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} f''(o) + \ldots + \frac{x^n}{1 \,.\, 2 \ldots n} f^{(n)}(x)$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{1 \,.\, 2 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\theta x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (289)$$

Этимъ рядомъ удобнѣе всего пользоваться при разложеніи функцій въ ряды. Для этого опредѣляемъ послѣдовательно $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \ldots$, потомъ полагаемъ въ нихъ $x = 0$ и получимъ такимъ образомъ $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o) \ldots$ Вставляя затѣмъ эти величины въ (289), получимъ разложеніе данной функціи въ рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ икса.

Разложеніе функціи e^x.

§ 160. Разложимъ e^x въ такой рядъ. По (249) вычисляемъ:

$$f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x; \quad f''(x) = e^x \ldots$$

Полагая въ нихъ $x = 0$ находимъ:

$$f(o) = 1; \quad f'(o) = 1; \quad f''(o) = 1 \ldots$$

Вставляя въ (289) получимъ:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \,.\, 2 \ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1 \,.\, 2 \ldots (n+1)} e^{\theta x} \quad . \, (290)$$

Этотъ рядъ мы уже встрѣтили въ (236).

Разложеніе $\sin x$.

§ 161. Для $\sin x$ вычисляемъ:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= \sin x; & f\ (o) &= 0 \\
f'\ (x) &= \cos x; & f'\ (o) &= 1 \\
f''\ (x) &= -\sin x; & f''\ (o) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x; & f'''(o) &= -1 \\
f^{IV}(x) &= \sin x; & f^{IV}(o) &= 1.
\end{aligned}$$

. . . .

Вставляя въ (289), получимъ:

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots$$

$$\mp \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\, cos\,(\theta x) \quad \ldots\ldots\ldots (291)$$

Разложеніе *cos x*.

§ 162. Для *cos x* вычисляемъ:

$f\ (x) = cos\,x;\ \ f'(x) = -\,sin\,x;\ \ f''(x) = -\,cos\,x;\ \ f'''(x) = +\,sin\,x;$

$f^{IV}(x) = cos\,(x);\ f(o) = 1;\ f'(o) = 0;\ f''(o) = -1;\ f'''(o) = 0;\ f^{IV}(o) = 1.$

Поэтому:

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1.2\ldots4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots$$

$$\mp \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\, cos\,(\theta x) \quad \ldots\ldots\ldots (292)$$

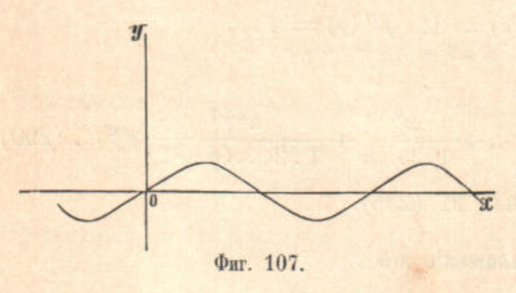
Аргументы тригонометрическихъ функцій въ анализѣ.

§ 163. Величина x, стоящая подъ знакомъ *sin*, *cos*, *tg*, называется *аргументомъ* этихъ функцій. Въ тригонометріи аргументомъ служитъ уголъ, измѣряемый градусами. Въ анализѣ этотъ уголъ замѣняется дугою, его измѣряющею и описанною радіусомъ $= 1$; при чемъ дуга эта выражается въ частяхъ длины 2π. Напримѣръ:

$$sin\,30^\circ = sin\left(\frac{2\pi}{12}\right);\ \ cos\,60^\circ = cos\left(\frac{2\pi}{6}\right);\ \ cos\,17^\circ = cos\,\frac{2\pi\,.\,17}{360}\cdots$$

Такое опредѣленіе аргумента даетъ возможность разсматривать напримѣръ такую кривую *синусоиду* (фиг. 107), уравненіе которой есть:

$$y = sin\,x.$$



Фиг. 107.

Здѣсь абсциссы x выражаются не градусами, но величинами линейными, выраженными въ частяхъ π.

Ряды (291) и (292) служатъ для составленія тригонометрическихъ таблицъ.

Разложеніе *lg* $(1 + x)$.

§ 164. Для *lg* $(1 + x)$ вычисляемъ:

$$f\ (x) = lg\,(1 + x); \qquad f\ (o) = lg\,1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}; \qquad f'(o) = 1^{-1} = 1$$

$$f''\quad (x) = -1\,.\,(1+x)^{-2}; \qquad f''\quad (o) = -1$$

$$f'''\quad (x) = 1\,.\,2\,.\,(1+x)^{-3}; \qquad f'''\quad (o) = +2$$

. . . .

$$f^{(n+1)}(x) = \mp 1.2\ldots n\,(1+x)^{-n-1}; \quad f^{n+1}(o) = \mp 1.2\ldots n\,.$$

$$lg\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1+\theta x)^{n+1}} \quad . (293)$$

Ряды Тайлора и Макъ-Лорена для функцій многихъ перемѣнныхъ.

§ 165. Въ случаѣ функціи $u = f\,(x,\,y)$ двухъ перемѣнныхъ опредѣлимъ $f\,(x+h,\,y+k)$. Для этого мы опредѣлимъ $f\,(x+ht,\,\,y+kt)$ и въ конечномъ выводѣ сдѣлаемъ $t=1$. Введемъ сокращенныя обозначенія:

$$f\,(x+ht,\,y+kt) = \varphi\,(t) = U; \quad x+ht = p; \quad y+kt = q.$$

Такъ что:

$$U = f\,(p,\,q) = \varphi\,(t).$$

По формулѣ (289) имѣемъ:

$$\varphi\,(t) = \varphi\,(o) + t\,.\,\varphi'\,(o) + \frac{t^2}{1\,.\,1}\,\varphi''\,(o) + \ldots + \frac{t^n}{1\,.\,2\ldots n}\,\varphi^n\,(o) + R\,.\;(294)$$

Но $\varphi\,(t) = U$ по условію. Слѣдовательно:

$$\varphi'\,(t)\,dt = \frac{\partial U}{\partial p}\,dp + \frac{\partial U}{\partial q}\,dq = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\,h + \frac{\partial U}{\partial q}\,k\right)dt; \text{ ибо } dp = hdt;\, dq = kdt.$$

Слѣдовательно:

$$\varphi'\,(t) = \frac{\partial U}{\partial p}\,h + \frac{\partial U}{\partial q}\,k.$$

$$\varphi''\,(t) = \frac{\partial U'}{\partial p}\,h + \frac{\partial U'}{\partial q}\,k = \frac{\partial^2 U}{\partial p^2}\,h^2 + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial p\,.\,\partial q}\,kh + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\,k^2.$$

Согласно введенному символическому обозначенію § 155 видимъ, что:

$$\varphi''\,(t) = \left[\frac{\partial U}{\partial p}\,h + \frac{\partial U}{\partial q}\,k\right]^{(2)}.$$

Точно такъ же увидѣли бы вообще что:

$$\varphi^{(n)}\,(t) = \left[\frac{\partial U}{\partial p}\,h + \frac{\partial U}{\partial q}\,k\right]^{(n)}.$$

При $t = o$ получимъ: $p = x + h\,.\,o = x$; $q = y + k\,.\,o = y$; $U = u$. Слѣдовательно:

$$f\,\;(o) = f\,(x,\,y) = u$$

$$f'\,(o) = \frac{\partial u}{\partial x}\,h + \frac{\partial u}{\partial y}\,k$$

$$f''(o) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k\right]^{(2)}.$$

. . . .

Вставляя въ (294) получимъ:

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k\right]^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k\right]^{(3)} \dots \dots \dots \quad (295)$$

Такой видъ принимаетъ рядъ Тайлора для $f(x, y)$.

Рядъ Макъ Лорена для $f(x, y)$ будетъ (полагая $f(x, y) = u$):

$$f(x, y) = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y\right]^{(2)} + \dots \dots \dots \quad (296)$$

Здѣсь значки o показываютъ, что въ тѣхъ величинахъ, при которыхъ они поставлены, надо сдѣлать $x = o$; $y = o$.

Подобныя же формулы существуютъ для функцій большаго числа перемѣнныхъ.

Формула Эйлера для однородныхъ функцій.

§ 166. Приложимъ формулу (296) къ выводу одной замѣчательной теоремы Эйлера объ однородныхъ функціяхъ. Однородною функціею m-го порядка называется такая функція, которая, по умноженіи всѣхъ входящихъ въ нее перемѣнныхъ на какой-нибудь множитель t, равна произведенію первоначальнаго своего вида (до умноженіи перемѣнныхъ на t) на t^m, такъ что $f(x, y, z)$ однородна, если $f(xt, yt, zt) = t^m f(x, y, z)$.

Теорема Эйлера. *Сумма произведеній частныхъ производныхъ однородной функціи на соотвѣтственныя перемѣнныя = произведенію самой функціи на показатель порядка однородности, такъ что:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = m f(x).$$

Положимъ $t = 1 + \alpha$. Изъ уравненія $f(xt, yt, zt) = t^m f(x, y, z)$ получимъ:

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = (1 + \alpha)^m f(x, y, z).$$

По (296) имѣемъ:

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = f + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z\right)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z\right)^{(2)} + \dots$$

По биному Ньютона имѣемъ:

$$(1+\alpha)^m f. = f + mf.\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 f + \dots$$

Слѣдовательно имѣемъ тожество:

$$f + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z\right) + \dots = f + m\alpha f + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 f + \dots$$

Въ этомъ тожествѣ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ α должны быть равны между собою. Слѣдовательно:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z = mf(x, y, z) \quad \dots\dots \quad (297)$$

Эта теорема вѣрна для какого угодно числа перемѣнныхъ.

Примѣръ:

$$f(x, y, z) = 4xyz + 2x^2y;\ \frac{\partial f}{\partial x} = 4yz + 4xy;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4xz + 2x^2;\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z = (4yz + 4xy)x + (4xz + 2x^2)y + 4xyz$$

$$= 12xyz + 6x^2y = 3(4xyz + 2x^2y).$$

Слѣдовательно здѣсь:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z = 3f(x, y, z).$$

2) Истинное значеніе величинъ, выраженныхъ въ неопредѣленной формѣ.

Величина $\frac{0}{0}$.

§ 167. Встрѣчаются такія дробныя функціи $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, которыя принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$ при нѣкоторомъ значеніи перемѣннаго x, напримѣръ при $x = a$; если же x не сразу дѣлать равнымъ a, но постепенно приближать къ a, то $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ приближается къ предѣлу опредѣленному. Этотъ предѣлъ называется *истиннымъ* значеніемъ дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ при $x = a$. Дифференціальное исчисленіе даетъ общій способъ опредѣленія такихъ истинныхъ значеній по слѣдующимъ соображеніямъ.

Пусть данная дробь есть $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ и пусть x_0 есть то значеніе икса, при которомъ:

$$\varphi(x_0) = 0;\ f(x_0) = 0. \quad \dots\dots \quad (294)$$

Пользуясь рядомъ Тайлора (287) и прерывая его на 1-омъ членѣ, мы должны сдѣлать въ остаточномъ членѣ $n = 0$. Получимъ:

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi'(x_0 + \theta h);$$
$$f(x_0 + h) = f'(x_0 + \theta h).$$

Поэтому, приращая x въ данной дроби на h, получимъ:

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{\varphi'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}.$$

Уменьшая здѣсь h постепенно до нуля, получимъ:
Истинное значеніе $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ при $x=x_0$ равно

$$lim\,\frac{\varphi(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(295)$$

Если бы оказалось, что $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}$ тоже равно $\frac{0}{0}$, то искали бы истинное значеніе отъ $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}$; по (295) оно было бы равно $\frac{\varphi''(x_0)}{f''(x_0)}$. Вообще если $\varphi^{(p)}(x_0)$ и $f^{(p)}(x_0)$ суть производныя наименьшаго порядка изъ *необращающихся* въ 0, то истинное значеніе $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ равно:

$$\frac{\varphi^{(p)}(x_0)}{f^{(p)}(x_0)}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(296)$$

Итакъ. *Если дробь* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ *имѣетъ видъ* $\frac{0}{0}$ *при* $x=x_0$, *то истинное значеніе этой дроби равно* $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}$. *Если* $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}=\frac{0}{0}$, *то истиннымъ значеніемъ* $\frac{\varphi(x_0)}{f(x_0)}$ *можетъ быть* $\frac{\varphi''(x_0)}{f''(x_0)}$, *и такъ далѣе разсуждаемъ, пока не дойдемъ до такихъ производныхъ отъ* $\varphi(x)$ *и отъ* $f(x)$, *которыя, будучи одного и того же порядка, не равны нулю при* $x=x_0$. *Отношеніе этихъ производныхъ при* $x=x_0$ *и есть искомая истинная величина дроби* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ *при* $x=x_0$.

Примѣръ 1-ый. Опредѣлить истинное значеніе дроби $\frac{\sin x}{x}$ при $x=0$. Имѣемъ:

$$f_x'(\sin x)=\cos x;\; f_x'(x)=1;$$

слѣдовательно, искомое значеніе будетъ:

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\cos o}{1}=1.$$

Примѣръ 2-ой. Опредѣлить истинное значеніе дроби $\frac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a}$ при $x=a$. Имѣемъ:

$$\varphi(x)=x^2-\sqrt{a^3x};\quad f(x)=\sqrt{ax}-a;$$

$$\varphi'(x)=2x-\frac{a^3}{2\sqrt{a^3x}};\; f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax}};$$

$$\lim_{x=a}\left[\frac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a}\right]=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}=\frac{2a-\frac{a^3}{2\sqrt{a^4}}}{\frac{a}{2\sqrt{aa}}}=\frac{4a-a}{1}=3a.$$

Примѣръ 3-ій. Опредѣлить $\lim\limits_{x=a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$.

$$\varphi(x) = x^2 - a^2;\quad f(x) = x - a;$$

$$\varphi'(x) = 2x;\qquad f'(x) = 1.$$

$$\lim_{x=a}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}\right) = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = \frac{2a}{1} = 2a.$$

Этотъ результатъ можно было бы получить и помощью элементарной алгебры слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a.$$

Полагая $x = a$ въ $x + a$, получимъ $2a$.

Примѣръ 4-ый. Опредѣлить: $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}\right)$.

$$\varphi(x) = e^x - e^{-x} - 2x;\quad f(x) = x - \sin x;$$

$$\varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 2;\quad f'(x) = 1 - \cos x.$$

Итакъ

$$\lim_{x=0}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - \cos 0} = \frac{0}{0}.$$

Значитъ надо брать отношеніе вторыхъ производныхъ; но и оно:

$$\lim_{x=0}\frac{\varphi''(x)}{f''(x)} = \frac{e^0 - e^{-0}}{\sin 0} = \frac{0}{0}.$$

Беремъ отношеніе третьихъ производныхъ:

$$\lim_{x=0}\frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos 0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Итакъ

$$\lim_{x=0}\left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}\right) = 2.$$

Величины: $\frac{\infty}{\infty}$.

§ 168. Если въ дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ и числитель и знаменатель обращаются въ безконечность при $x = a$, такъ что:

$$\varphi(a) = \infty;\quad f(a) = \infty;\quad \frac{\varphi(a)}{f(a)} = \frac{\infty}{\infty};$$

то, для опредѣленія $\lim\limits_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, преобразуемъ данную дробь въ такую $\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, которая равна данной, потому что дѣля $\frac{1}{f(x)}$ на $\frac{1}{\varphi(x)}$, получимъ $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$.

Но если

$$f(a) = \infty; \quad \varphi(a) = \infty, \quad \text{то} \quad \frac{1}{f(a)} = 0; \quad \frac{1}{\varphi(a)} = 0;$$

и дробь $\dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ принимаетъ при $x = a$ изученный въ § 167 видъ $\frac{0}{0}$.

Итакъ случай $\frac{\infty}{\infty}$ приводится къ разсмотрѣнному въ предыдущемъ параграфѣ случаю $\frac{0}{0}$.

Величины: ∞^0; 1^∞; 0^0; $0 . \infty$.

§ 169. Величины, обращающіяся при какомъ-нибудь значеніи перемѣннаго въ ∞^0; 1^∞; 0^0 или $0 . \infty$, могутъ быть опредѣлены посредствомъ ихъ логариѳмовъ (логариѳмируя ихъ предварительно), имѣющихъ видъ $0 . \infty$, который приводится къ видамъ $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, уже разсмотрѣннымъ въ § 167 и 168. Приведеніе же вида $0 . \infty$ къ виду $\frac{0}{0}$ явствуетъ изъ формулы $\infty = \frac{1}{0}$, по которой:

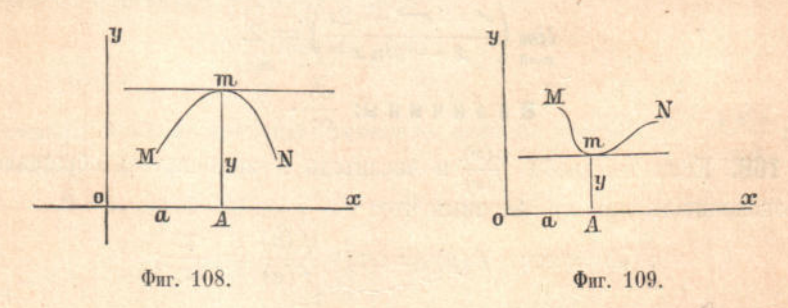
$$0 . \infty = 0 . \frac{1}{0} = \frac{0}{0}.$$

3) Наибольшія и наименьшія значенія функцій.

О максимумахъ и минимумахъ функціи одного перемѣннаго.

§ 170. Если $f(x)$, при $x = a$, получаетъ наибольшую величину сравнительно съ тѣми, какія она имѣетъ при безконечно-близкихъ къ a значеніяхъ икса, то $f(a)$ называется *наибольшимъ значеніемъ* функціи $f(x)$ или ея *максимумомъ*. Напримѣръ на чертежѣ (фиг. 108) ордината Am кривой $y = f(x)$ есть *максимумъ* игрека или максимумъ $f(x)$.

Если $f(x)$ получаетъ при $x = a$ наименьшую величину сравнительно съ тѣми, какія она имѣетъ при безконечно-близкихъ къ a значеніяхъ икса,



Фиг. 108. Фиг. 109.

то $f(a)$ называется *наименьшимъ значеніемъ* $f(x)$ или ея *минимумомъ*. Напримѣръ на чертежѣ (фиг. 109) ордината Am кривой $y = f(x)$ есть *минимумъ* игрека или минимумъ $f(x)$.

Мы уже видѣли, въ § 120, что при тѣхъ значеніяхъ $f'(x)$, при ко-

торыхъ она обращается въ нуль, $f(x)$ имѣетъ максимумъ или минимумъ. Необходимо этотъ результатъ пополнить.

Замѣтимъ прежде всего, что по самому опредѣленію того, что называется максимумомъ и минимумомъ $f(x)$, явствуетъ слѣдующее:

Правило I. *Величина $f(a+h)-f(a)$ всегда отрицательна, если при $x=a$ функція $f(x)$ достигаетъ* ***максимума****, и положительна, если при $x=a$ функція $f(x)$ достигаетъ* ***минимума****, каковъ бы ни былъ знакъ приращенія h, то есть будетъ ли это приращеніе положительно или отрицательно.*

По формулѣ (287) Тайлора имѣемъ:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a)+\ldots$$

Отсюда:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a)+\ldots\ldots\ldots \quad (297)$$

Величина h безконечно-мала. Поэтому высшія степени h весьма малы, сравнительно съ низшими. Слѣдовательно, знакъ 2-ой части равенства (297) зависитъ отъ знака (положительности или отрицательности) величины h. Но, по правилу I-ому этого параграфа, знакъ лѣвой части равенства (297) не долженъ зависѣть отъ h. Чтобы это условіе соблюдалось, необходимо и достаточно, чтобы:

$$f'(a)=0\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (298)$$

Тогда, благодаря положительности h^2 (четныя степени всегда положительны), знакъ лѣвой части таковъ, какъ знакъ $f''(a)$. Если же $f''(a)=0$, то, для независимости знака лѣвой части отъ знака h, нужно соблюденіе условія $f'''(a)=0$. При соблюденіи же его, знакъ лѣвой части такой же, какъ у $f^{\text{IV}}(a)$, и такъ далѣе. Эти разсужденія вмѣстѣ съ правиломъ I-мъ этого параграфа приводятъ къ слѣдующему:

Правило II. *Для того, чтобы $f(x)$ была максимумомъ или минимумомъ при $x=a$, нужно чтобы $f'(a)=0$ и чтобы въ ряду производныхъ: $f'(a)$; $f''(a)$; $f'''(a)$; $f^{\text{IV}}(a)\ldots$ первая изъ нихъ, которая не обращается въ нуль, была бы четнаго порядка. Если эта производная отрицательна, то имѣется* ***максимумъ****; если она положительна, то имѣется* ***минимумъ****.*

Способъ нахожденія максимумовъ и минимумовъ.

§ 171. Требуется найти максимумъ или минимумъ $f(x)$. Согласно съ правиломъ II предыдущаго параграфа поступаемъ такъ: вычисляемъ $f'(x)$;

приравнивая ее нулю, получаемъ уравненіе:

$$f'(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (299)$$

Изъ него опредѣляемъ x. Положимъ получили $x = a$. Если, при подстановкѣ этой величины въ $f''(x)$, она не обращается въ нуль, то $f(a)$ есть или максимумъ или минимумъ; а именно—минимумъ, если $f''(a)$ положительна; максимумъ, если $f''(a)$ отрицательна.

Если же $f''(a) = 0$, то пробуемъ подставлять a въ другія производныя четныхъ порядковъ отъ $f(x)$. Знакъ первой изъ нихъ, которая при $x = a$ не обращается въ нуль, покажетъ намъ, по правилу II-ому предыдущаго параграфа, есть ли $f(a)$ *максимумъ* или *минимумъ*.

Примѣръ 1-ый. Найти максимумъ или минимумъ функціи

$$f(x) = y = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$$
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45.$$

Приравнивая ее нулю, получимъ уравненіе:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0.$$

Сокращая на 3, получимъ:

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

откуда:

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1;$$
$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3.$$

(Одинъ изъ этихъ корней принимаемъ за a).

$$f''(x) = 6x - 24.$$

Подставляя сюда 5, получимъ:

$$f''(5) = 6 \,.\, 5 - 24 = +1$$

Значитъ $f(5)$ есть минимумъ данной функціи. Для опредѣленія его полагаемъ $x = 5$ въ самой $f(x)$. Находимъ:

минимумъ $f(x) = 5^3 - 12 \,.\, 5^2 + 45 \,.\, 5 + 30 = 125 - 300 + 225 + 30 = 80.$

Подставимъ теперь въ $f''(x) = 6x - 24$ другой корень, 3, уравненія $f'(x) = 0$, получимъ:

$$f''(3) = 6 \,.\, 3 - 24 = -6.$$

Значитъ $f(3)$ есть максимумъ данной $f(x)$. Для опредѣленія его полагаемъ $x = 3$ въ самой $f(x)$. Находимъ:

максимумъ $f(x) = 3^3 - 12 \,.\, 3^2 + 45 \,.\, 3 + 30 = 27 - 108$
$+ 135 + 30 = 84.$

Примѣръ 2-ой. $y = e^x + 2\cos x + e^{-x} = f(x)$

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}.$$

Полагаемъ $f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0$. Замѣчаемъ, что $x = o$ удовлетворяетъ этому уравненію. Полагая $x = o$ въ $f(x)$, получимъ:

$$f(o) = e^o + 2\cos o + e^o = 4.$$

Чтобы узнать будетъ ли это максимумъ или минимумъ, полагаемъ $x = o$ въ $f''(x)$; получимъ:

$$f''(o) = e^o - 2\cos o + e^o = 0.$$

Значитъ надо пробовать слѣдующія производныя. Имѣемъ:

$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x}; \quad f'''(o) = e^o + 2\sin o - e^o = 0;$$

$$f^{IV}(x) = e^x + 2\cos x + e^x; \quad f^{IV}(o) = e^o + 2\cos o + e^o = +4.$$

Первая изъ необратившихся въ нуль производныхъ оказалась $f^{IV}(o)$. Она оказалась положительною. Слѣдовательно, $f(o) = 4$ есть минимумъ функціи $f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}$.

Примѣръ 3-ій. $y = \frac{x}{lg\,x} = f(x)$.

$$f'(x) = \frac{lg\,x - 1}{(lg\,x)^2} = 0.$$

Отсюда $lg\,x = 1$ или $x = e$

$$f''(x) = \frac{\frac{(lg\,x)^2}{x} - (lg\,x - 1)\frac{2\,lg\,x}{x}}{(lg\,x)^4} = \frac{\frac{2\,lg\,x}{x} - \frac{(lg\,x)^2}{x}}{(lg\,x)^4} = \frac{2 - lg\,x}{x\,(lg\,x)^3}.$$

$$f''(e) = \frac{2-1}{e\,.\,1^3} = \frac{1}{e}\cdot$$

Положительность величины $f''(e)$ показываетъ, что $f(e) = \frac{e}{lg\,e} = e$ есть минимумъ данной функціи: $\frac{x}{lg\,x}\cdot$

Максимумы и минимумы функцій многихъ перемѣнныхъ.

§ 172. Въ подробныхъ курсахъ дифференціальнаго исчисленія доказывается, что $f(x, y, z)$ имѣетъ максимумъ или минимумъ при:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

то есть когда всѣ три частныя производныя отъ данной $f(x, y, z)$ одновременно равны нулю.

Геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

1) Теорія касательныхъ.

Уравненіе касательной къ кривой $f(x, y) = 0$.

§ 173. Положимъ, что намъ дана въ плоскихъ координатахъ кривая

$$f(x, y) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (300)$$

Опредѣлимъ уравненіе касательной, проведенной въ точкѣ (x, y) этой кривой. Назовемъ координаты какой-либо точки касательной чрезъ (X, Y). По формулѣ (15) уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x, y), таково:

$$Y - y = k(X - x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (301)$$

гдѣ k есть тангенсъ угла наклоненія прямой къ оси x. Но тангенсъ угла наклоненія касательной къ оси x равенъ, по § 117-ому, производной $\frac{dy}{dx}$. Слѣдовательно, уравненіе касательной таково:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (302)$$

гдѣ (x, y) суть координаты точки касанія; X, Y—координаты касательной.

Однако кривая задана у насъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$. Здѣсь y есть неявная функція отъ x. По (261) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (261)$$

Поэтому, и по (302), уравненіе касательной можетъ быть представлено такъ:

$$Y - y = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x - X). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (303)$$

Если y выражено явно чрезъ x, то пользуются уравненіемъ (302); если дано уравненіе $f(x, y) = 0$, то пользуются уравненіемъ (303).

Примѣръ. Найти уравненіе касательной, проведенной къ окружности $x^2 + y^2 = 25$ въ ея точкѣ (3, 4). Имѣемъ:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Слѣдовательно, уравненіе касательной къ данной окружности въ точкѣ (x, y) будетъ:

$$Y - y = \frac{2x}{2y}(x - X).$$

Но дано, что точка (x, y) есть точка $(3, 4)$. Слѣдовательно, уравненіе касательной въ точкѣ $(3, 4)$ будетъ:

$$Y - 4 = \frac{3}{4}(3 - X),$$

или:

$$3X + 4Y - 25 = 0.$$

Уравненіе (303) удобно запомнить въ такой формѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) = 0.$$

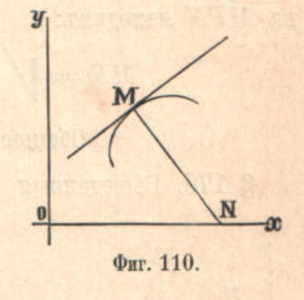
Это уравненіе касательной получается умноженіемъ членовъ уравненія (303) на $\frac{\partial f}{\partial y}$ и перенесеніемъ всего въ лѣвую часть.

Уравненіе нормали.

§ 174. Нормалью называется перпендикуляръ, возставленный къ касательной изъ точки касанія, напримѣръ MN (фиг. 110).

Если k есть тангенсъ угла наклоненія касательной и k' тангенсъ угла наклоненія нормали, то, вслѣдствіе перпендикулярности этихъ прямыхъ, должно быть удовлетворено условіе (36), именно:

$$k' = -\frac{1}{k}; \text{ но } k = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$



Фиг. 110.

Слѣдовательно:

$$k' = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Поэтому уравненіе нормали, проведенной чрезъ точку (x, y) кривой, будетъ:

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (304)$$

или

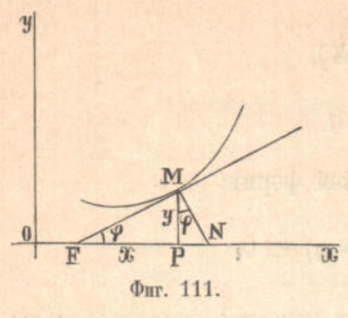
$$(Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} - (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (305)$$

Здѣсь X, Y суть координаты какой-либо точки нормали.

Длина подкасательной.

§ 175. Отрѣзокъ FP (фиг. 111) оси абсциссъ, между точкою F ея пересѣченія съ касательною и основаніемъ P ординаты y точки (x, y), на-

зывается *подкасательною*. Назовемъ уголъ наклоненія касательной къ оси x чрезъ φ, такъ что $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$. Изъ треугольника FMP имѣемъ:



Фиг. 111.

$$FP = y\,.\,tg\,(90 - \varphi)$$

$$= y\,.\,cotg\,\varphi = \frac{y}{tg\,\varphi} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Итакъ

$$FP = y\,\frac{dx}{dy}\,.\;.\;.\;.\;.\;(306)$$

Длина поднормали.

§ 176. Отрѣзокъ PN оси абсциссъ, между точкою N ея пересѣченія съ нормалью и основаніемъ P ординаты точки (x, y), называется *поднормалью*. Изъ треугольника PMN имѣемъ: $PN = y\,.\,tg\,\varphi$. Итакъ:

$$PN = y\,.\,\frac{dy}{dx}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(307)$$

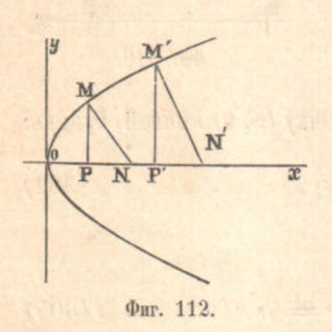
Длина нормали.

§ 177. Длиною нормали называется ея отрѣзокъ MN отъ пересѣченія M съ кривою до пересѣченія N съ осью абсциссъ. Изъ треугольника MPN находимъ:

$$MN = \sqrt{y^2 + \left(y\,\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\;.\;.\;.\;(308)$$

Общность дифференціальныхъ формулъ.

§ 178. Выведенныя нами дифференціальныя уравненія касательной, нормали и формулы подкасательной и проч., какъ и тѣ дифференціальныя уравненія и формулы, которыя намъ встрѣтятся впослѣдствіи, отличаются удивительною общностью: какая бы ни была намъ дана кривая, разъ мы знаемъ ея уравненіе $f(x, y) = 0$, мы сейчасъ же можемъ по этимъ формуламъ найти касательную, нормаль и длины подкасательной и проч. для этой кривой.



Фиг. 112.

Примѣръ. Опредѣлить величину поднормали параболы $y^2 = 2px$. Изъ этого уравненія параболы имѣемъ:

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2p}\,x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}}.$$

Подставляя отсюда величину y и $\frac{dy}{dx}$ въ (307), получимъ:

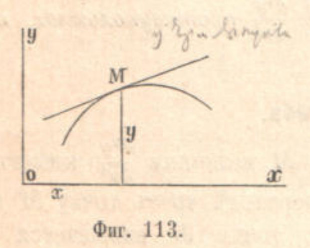
$$\text{поднормаль параболы} = y\,\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2px}\cdot\sqrt{p}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = p.$$

Итакъ (фиг. 112), въ какой бы точкѣ данной параболы мы ни проводили нормаль, длина PN поднормали остается одна и та же, равная p. *Длина поднормали данной параболы есть величина постоянная.*

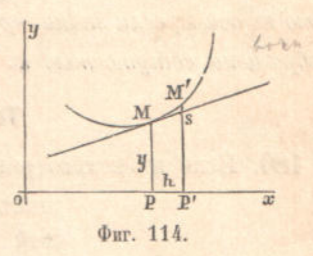
О вогнутости и выпуклости кривыхъ.

§ 179. Если кривая (фиг. 113) вблизи разсматриваемой ея точки (x, y) расположена по ту же сторону отъ касательной какъ и ось x, то говорятъ, что кривая въ этомъ мѣстѣ *обращена вогнутостью* къ оси x или просто—*вогнута*.

Если кривая (фиг. 114) вблизи разсматриваемой точки (x, y) расположена по другую сторону отъ касательной, чѣмъ ось x, то говорятъ, что



Фиг. 113.



Фиг. 114.

кривая *обращена* въ этомъ мѣстѣ къ оси x *выпуклостью* или просто — *выпукла*.

Найдемъ аналитическій признакъ выпуклости и вогнутости кривыхъ. Придадимъ для этого иксу приращеніе $h = PP'$ (фиг. 114). По формулѣ (287) Тайлора получимъ:

$$P'M' = f(x + h) = y + h\,\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + R, \quad . \; . \quad (309)$$

гдѣ R остаточный членъ. Уравненіе касательной по формулѣ (302) таково:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\,(X - x). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (302)$$

Примѣняя его къ точкѣ S, абсцисса которой $X = x + h$, получимъ:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\,(x + h - x) = \frac{dy}{dx}\,h. \; . \; . \; . \; . \quad (310)$$

Отсюда ордината Y точки S будетъ:

$$Y = y + \frac{dy}{dx}\,h = P'S. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (311)$$

Слѣдовательно:

$$M'S = P'M' - P'S = y + h\,\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + R - y - \frac{dy}{dx}\,h,$$

или

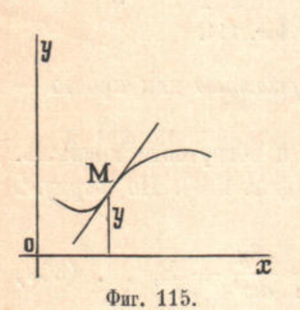
$$M'S = \frac{h^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + R. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (312)$$

Вслѣдствіе малости содержащихся въ R высшихъ степеней h знакъ 2-ой части равенства (312) зависитъ отъ знака $\frac{d^2y}{d^2x}$ (такъ какъ h^2 положительно). Точка M' будетъ лежать по другую сторону касательной отъ оси x, если $M'S$ положительно и это независимо отъ знака h, но, по доказанному, $M'S$ положительно, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительно. Итакъ, кривая выпукла, какъ на фиг. 114, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительно; вогнута, какъ на фиг. 113, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательно. При отрицательныхъ y дѣло будетъ происходитъ наоборотъ. Получаемъ правило:

Если знаки при y и при $\frac{d^2y}{dx^2}$ одинаковы, то кривая обращена выпуклостью къ оси x; если знаки при y и при $\frac{d^2y}{dx^2}$ противуположны, то кривая обращена вогнутостью къ оси x.

Точки перегиба.

§ 180. Если нѣсколько ранѣе точки M величина $\frac{d^2y}{dx^2}$ имѣетъ одинъ знакъ, а при переходѣ чрезъ точку M мѣняетъ свой знакъ, то точка M называется *точкою перегиба*. Такая точка (фиг. 115) отдѣляетъ выпуклую часть кривой отъ вогнутой. Перемѣнить свой знакъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ можетъ только перейдя чрезъ значеніе, равное нулю или безконечности. Итакъ, въ точкахъ перегиба $\frac{dy^2}{dx^2}$ равно нулю или безконечности. Касательная въ точкѣ перегиба пересѣкаетъ кривую.



Фиг. 115.

Направленіе элемента кривой.

§ 181. Кривую можно разсматривать какъ многоугольникъ съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ сторонъ. Безконечно-малая часть кривой называется ея элементомъ. По опредѣленію касательной, данному въ § 117-омъ, направленіе касательной совпадаетъ съ направленіемъ элемента кривой.

Элементъ кривой.

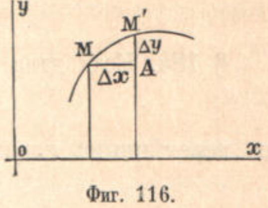
§ 182. Если придадимъ иксу приращеніе Δx, то y получитъ приращеніе Δy, и мы перейдемъ изъ точки M кривой съ координатами (x, y) въ точку M' съ координатами $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$. Чѣмъ менѣе Δx, тѣмъ

большее право мы имѣемъ разсматривать отрѣзокъ MM' кривой, какъ прямолинейный, какъ гипотенузу треугольника $MM'A$ (фиг. 116). Называя дугу MM' кривой чрезъ Δs, имѣемъ по Пиѳагоровой теоремѣ:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Въ предѣлѣ получимъ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$



Фиг. 116.

Величина ds называется дифференціаломъ дуги кривой или элементомъ кривой.

Уголъ φ, составляемый элементомъ дуги съ осью x, равенъ углу, составляемому съ осью x касательною (§ 181), такъ что, согласно съ § 117:

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Поэтому:

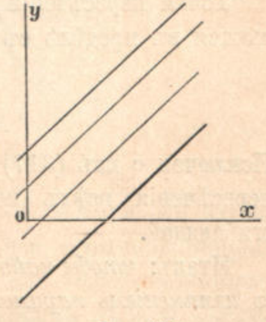
$$\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds}. \quad (314)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}. \quad (315)$$

Параметры кривой.

§ 183. Въ уравненіи кривой кромѣ координатъ заключаются еще и различныя другія величины, которыя для данной кривой постоянны, напримѣръ коэффиціенты. Эти величины называются *параметрами* кривой. Напримѣръ a и b суть параметры эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Если непрерывно измѣнять одинъ какой-нибудь параметръ кривой, то кривая непрерывно будетъ измѣнять или свой видъ, или свое положеніе, или и видъ и положеніе одновременно. Напримѣръ, если въ уравненіи эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ будетъ измѣнять параметръ a, непрерывно его увеличивая, то эллипсъ будетъ вытягиваться. Если въ уравненіи прямой $y = kx + b$ будемъ измѣнять b, то прямая будетъ двигаться, оставаясь параллельной своему начальному положенію; получимъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ одна другой (фиг. 117).



Фиг. 117.

Итакъ: *при измѣненіи одного какого-нибудь параметра кривой, она*

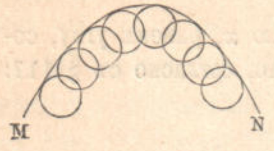
движется по плоскости, измѣняя свою форму. Можетъ случиться, что кривая будетъ только двигаться, не измѣняя формы; это будетъ частный случай. Измѣняемый параметръ называется *перемѣннымъ параметромъ.*

Огибающія.

§ 184. Если дана кривая

$$f(x, y, c) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (316)$$

съ перемѣннымъ параметромъ c, то кривая (316) съ измѣненіемъ c принимаетъ, какъ мы видѣли въ § 183, различныя положенія.



Фиг. 118.

На чертежѣ (фиг. 118) представлено, напримѣръ, нѣсколько положеній окружности, измѣняющей свою величину и положеніе. Кривая MN (фиг. 118), касательная ко всѣмъ положеніямъ движущейся кривой, называется *огибающею* этой кривой. Движущаяся же кривая по отношенію къ ея огибающей, называется *огибаемою.*

Посмотримъ, какъ по уравненію *огибаемой* найти уравненіе *огибающей.*

Пусть
$$f(x, y, c) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (317)$$

есть уравненіе огибаемой, заключающее въ себѣ перемѣнный параметръ c. Измѣнимъ c на Δc. Уравненіе кривой (317) въ положеніи безконечно-близкомъ къ прежнему, будетъ:

$$f(x, y, c + \Delta c) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (318)$$

Координаты точки пересѣченія (317) съ (318) будутъ удовлетворять уравненіямъ (317) и (318), а потому и уравненію:

$$\frac{f(x, y, c + \Delta c) - f(x, y)}{\Delta c} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (319)$$

Точки пересѣченія двухъ сосѣднихъ положеній движущейся кривой сольются въ предѣлѣ съ огибающею, уравненіе же (319) обратится въ

$$\frac{df(x, y, c)}{dc} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (320)$$

Исключая c изъ (317) и (320), получимъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія всѣхъ попарно сосѣднихъ положеній, то есть уравненіе огибающей.

Итакъ: *чтобы найти огибающую кривой* $f(x, y, c) = 0$, *измѣняющейся съ измѣненіемъ параметра* c, *нужно исключить* c *изъ уравненій:*

$$f(x, y, c) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (321)$$

$$\frac{df(x, y, c)}{dc} = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (322)$$

полученное, по исключеніи с, уравненіе будетъ искомымъ уравненіемъ огибающей.

Примѣръ 1-ый. Найти огибающую эллипсовъ, произведеніе полуосей которыхъ постоянно, направленія же осей совпадаютъ съ осями координатъ.

Уравненіе одного изъ такихъ эллипсовъ есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условію:

$$a \, . \, b = m, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (323)$$

гдѣ m нѣкоторое постоянное. Опредѣляя изъ (323) b и вставляя найденное такимъ образомъ выраженіе его въ уравненіи эллипса, получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{a}\right)^2} = 1$$

или:

$$f(x, y, a) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{m^2} - 1 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (324)$$

Принимая здѣсь a за перемѣнный параметръ и дифференцируя по a, получимъ:

$$\frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2ay^2}{m^2} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (325)$$

По предыдущей теоріи надо исключить изъ (324) и (325) параметръ a.

Изъ (325) имѣемъ:

$$\frac{a^4 y^2}{m^2} = x^2,$$

откуда:

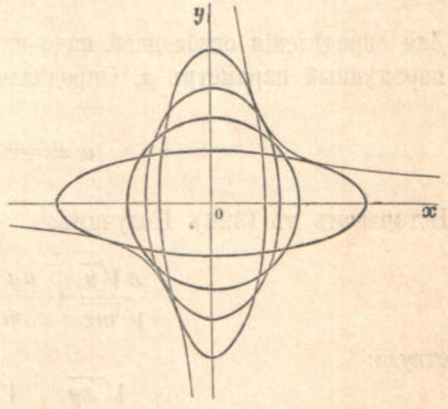
$$a = \pm \frac{\sqrt{x}\sqrt{m}}{\sqrt{y}}.$$

Вставляя эту величину въ (324), получимъ:

$$\frac{x^2 y}{mx} + \frac{mxy^2}{m^2 y} = 1$$

или:

$$xy = \frac{m}{2}.$$



Фиг. 119.

Это уравненіе гиперболы (см. § 60, формулу 96), для которой оси координатъ служатъ ассимптотами (фиг. 119). При $a > b$ большія оси эллипсовъ направлены по оси x-овъ, при $a < b$ большія оси эллипсовъ направлены по оси y. На чертежѣ (фиг. 119) изображены только нѣкоторые изъ безконечнаго множества эллипсовъ, разсматриваемыхъ въ этой задачѣ. Съ измѣненіемъ параметра a въ уравненіи (324), эллипсъ, представляемый этимъ уравненіемъ, измѣняетъ свой видъ (деформируется), оставаясь касательнымъ къ гиперболѣ $xy = \frac{m}{2}$.

Въ подобнаго рода задачахъ надо поступать, какъ мы сдѣлали въ этомъ примѣрѣ: нельзя оставлять въ уравненіи двухъ перемѣнныхъ параметровъ a и b. Мы исключили сначала b помощью условія $ab = m$, послѣ чего въ уравненіи (324) остался только одинъ *перемѣнный* параметръ a; величина же m по условію задачи остается постоянною.

Примѣръ 2-ой. Найти огибающую прямыхъ, отсѣкающихъ отъ осей координатъ такіе отрѣзки a и b, произведеніе которыхъ есть величина постоянная.

Уравненіе одной изъ такихъ прямыхъ будетъ по формулѣ (12) таково:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Исключимъ отсюда b при помощи условія $ab = m$, изъ коего слѣдуетъ:

$$b = \frac{m}{a}.$$

Получимъ:

$$f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{ya}{m} - 1 = 0 \ldots \ldots \ldots (326)$$

$$\frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{y}{m} = 0 \ldots \ldots \ldots (327)$$

Для опредѣленія огибающей надо изъ этихъ двухъ уравненій исключить перемѣнный параметръ a. Опредѣляемъ a изъ (327)

$$a = \pm \frac{\sqrt{mx}}{\sqrt{y}}.$$

Вставляемъ въ (326). Получимъ:

$$\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{mx}} + \frac{ay\sqrt{mx}}{m\sqrt{y}} = 1,$$

откуда:

$$\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{m}} = 1;$$

или

$$xy = \frac{m}{4}.$$

Опять получили гиперболу вида (96).

Примѣръ 3-ій. Найти огибающую прямыхъ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, *если сумма отрѣзковъ a и b, отсѣкаемыхъ ими на осяхъ, равна постоянной величинѣ m.*

По условію $a + b = m$. Отсюда $b = m - a$. Вставляя эту величину

вмѣсто b въ уравненіе $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, получимъ:

$$f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{y}{m-a} - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (328)$$

$$\frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{y}{(m-a)^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (329)$$

Изъ (329) имѣемъ:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{m-a}{a},$$

откуда:

$$a\sqrt{y} = m\sqrt{x} - a\sqrt{x},$$

откуда:

$$a = \frac{m\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Вставляя эту величину въ (328), получимъ:

$$\frac{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{m\sqrt{x}} + \frac{y}{m - \frac{m\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = 1,$$

откуда:

$$\frac{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{m\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,y}{m\sqrt{y}} = 1.$$

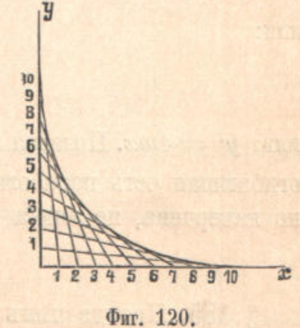
откуда:

$$x\sqrt{xy} + xy + xy + y\sqrt{xy} = m\sqrt{xy},$$

или:

$$2xy + x + y = m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (330)$$

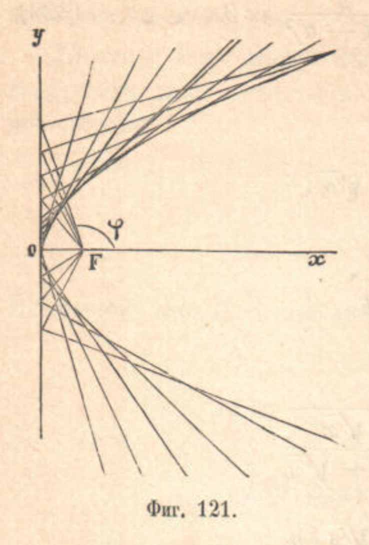
Это уравненіе 2-го порядка. По сказанному въ § 62-мъ, чтобы узнать, какую кривую представляетъ это уравненіе, надо посмотрѣть, какой знакъ окажется у выраженія $B^2-4AC=$ квадратъ коэффиціента при xy безъ учетвереннаго произведенія коэффиціентовъ при x^2 и при y^2. Въ (330) не имѣется членовъ съ x^2 или y^2, при xy стоитъ коэффиціентъ 2. Слѣдовательно $A=0$; $B=2$; $C=0$. Поэтому $B^2-4AC=4>0$. Слѣдовательно (330) представляетъ собою гиперболу (фиг. 120). На этомъ чертежѣ гипербола даже и не начерчена но она вырисовывается сама собою какъ огибающая прямыхъ.



Фиг. 120.

Примѣръ 4-ый. Изъ точки F (фиг. 121), находящейся на оси x въ разстояніи m отъ начала, проводимъ прямыя и возставляемъ къ этимъ прямымъ, изъ точекъ пересѣченія ихъ съ осью y, перпендикуляры. Найти огибающую этихъ перпендикуляровъ.

Сначала найдемъ уравненіе одного изъ такихъ перпендикуляровъ. Обозначимъ тупой уголъ, составляемый съ осью x прямою, проведенною изъ F, чрезъ φ. Разстояніе b точки пересѣченія этой прямой съ осью y отъ начала будетъ $b = m tg\,(180 - \varphi) = -m \,.\, tg\varphi$; полагая, для краткости, $tg\,\varphi = k'$, получимъ: $b = -mk'$. Уравненіе перпендикуляра, проведеннаго къ этой прямой изъ точки пересѣченія ея съ осью y, будетъ, по формулѣ (7):



Фиг. 121.

$$y = k'x + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331)$$

гдѣ, какъ мы сейчасъ видѣли $b = -mk'$: что же касается до k', то по условію (36) перпендикулярности $k' = -\frac{1}{k}$. Вставляя эти величины въ (33), получимъ искомое уравненіе перпендикуляра въ видѣ:

$$y = -\frac{x}{k} - mk\,,$$

или

$$f\,(x, y, k) = x + ky + mk^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (332)$$

Принимая k за перемѣнный параметръ и дифференцируя, получимъ:

$$\frac{\partial f\,(x, y, k)}{\partial k} = y + 2mk = 0,$$

откуда:

$$k = -\frac{y}{2m}\,;$$

вставляя въ (332) получимъ:

$$x - \frac{y^2}{2m} + \frac{my^2}{4m^2} = 0\,;$$

или:

$$x - \frac{y^2}{2m} + \frac{y^2}{4m} = 0\,;$$

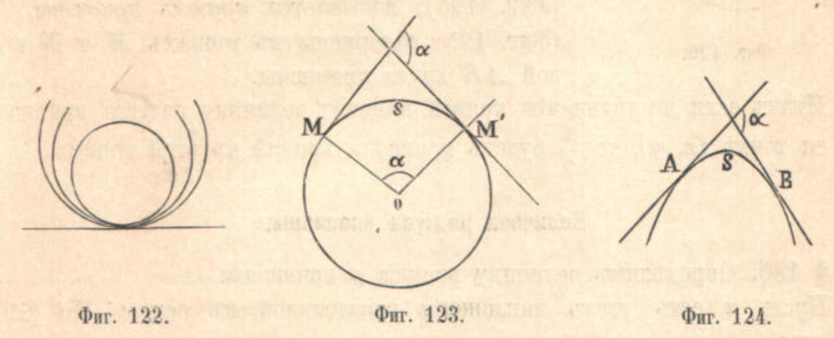
или: $y^2 = 4mx$. Полагая здѣсь $m = \frac{p}{2}$, получимъ $y^2 = 2px$. Итакъ искомая огибающая есть парабола съ фокусомъ въ F. На чертежѣ (фиг. 121) она не начерчена, но видна какъ огибающая.

Кривизна кривыхъ.

§ 185. Прежде чѣмъ дать точное опредѣленіе того, что называется въ математикѣ кривизною, замѣтимъ что въ общежитіи если говорятъ: одна линія кривѣе другой, то хотятъ этимъ показать, что первая линія болѣе уклоняется отъ прямолинейнаго направленія чѣмъ вторая. Остановимся сначала на кривизнѣ окружности. Окружность, описанная большимъ

радіусомъ не такъ круто отклоняется отъ прямой (фиг. 122) какъ окружность, описанная меньшимъ радіусомъ. Можно сказать: чѣмъ меньше радіусъ, тѣмъ болѣе искривлена окружность, — тѣмъ больше ея кривизна. Въ математикѣ *кривизною окружности радіуса R называется величина* $\frac{1}{R}$ *обратно пропорціональная радіусу.* Кривизна кривыхъ опредѣляется, какъ ниже увидимъ, по сравненію ихъ съ окружностью.

Кривизну окружности можно иначе выразить. Возьмемъ на окружности (фиг. 123) двѣ точки M и M' и обозначимъ чрезъ s дугу MM'; чрезъ α уголъ MOM'. Углы съ взаимно перпендикулярными сторонами равны между собою; касательныя же перпендикулярны къ радіусамъ. Слѣдова-



Фиг. 122. Фиг. 123. Фиг. 124.

тельно уголъ, составляемый касательными, проведенными въ M и M' тоже равенъ α. Извѣстно что дуга равна произведенію радіуса на соотвѣтствующій центральный уголъ:

$$s = R \cdot \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (333)$$

Слѣдовательно кривизна $\frac{1}{R}$ окружности равна:

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (334)$$

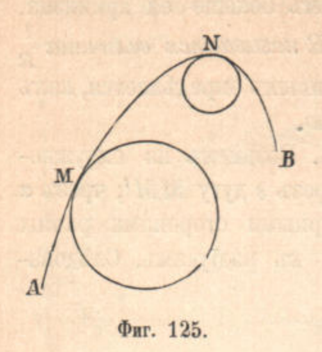
По аналогіи съ этимъ *среднею кривизною дуги AB* какой бы то ни было кривой (фиг. 124) называютъ отношеніе

$$\frac{\alpha}{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (335)$$

угла, составляемаго крайними касательными къ длинѣ дуги. Отсюда уже переходятъ къ опредѣленію кривизны кривой въ данной ея точкѣ: *кривизною кривой въ данной ея точкѣ называется средняя кривизна элемента кривой начинающагося въ данной точкѣ.*

Изъ этого опредѣленія и изъ сказаннаго выше (формула 335) слѣдуетъ, что *кривизна кривой въ данной ея точкѣ равна отношенію угла, составляемаго проведенными въ концахъ элемента касательными, къ длинѣ элемента кривой.* Этотъ уголъ называется *угломъ смежности.* Уголъ смежности и элементъ кривой безконечно малы, но отношеніе ихъ, выражающее кривизну, можетъ быть конечною величиною.

Для каждой точки кривой можно подъискать такую окружность, кривизна которой равнялась бы кривизнѣ кривой въ этой точкѣ. Радіусъ такой окружности называется *радіусомъ кривизны.* Мы будемъ его обозначать греческою буквою ρ (произносится ро). По самому опредѣленію радіуса кривизны, и изъ того что кривизна окружности равна $\frac{1}{R}$, слѣдуетъ, что кривизна кривой въ данной ея точкѣ равна $\frac{1}{\rho}$.



Фиг. 125.

Окружность, описанная радіусомъ кривизны (фиг. 125), называется *кругомъ кривизны.* На (фиг. 125) начерчены въ точкахъ M и N кривой AB круги кривизны.

Итакъ если по уравненію кривой найдемъ величину радіуса кривизны въ ея точкѣ (x, y), то $\frac{1}{\rho}$ будетъ кривизна кривой въ этой точкѣ.

Величина радіуса кривизны.

§ 186. Опредѣлимъ величину радіуса ρ кривизны.

Пусть α есть уголъ наклоненія касательной къ оси x. По (196) имѣемъ:

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (336)$$

Потому:

$$\alpha = artg\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (337)$$

Безконечно малое приращеніе этого угла и есть то, что мы въ предъидущемъ параграфѣ назвали угломъ смежности. Поэтому уголъ смежности, по (337) и по (230), равенъ

$$d\alpha = d\left[artg\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; . \; . \; (338)$$

Но въ предъидущемъ параграфѣ мы видѣли, что кривизна равна отношенію угла смежности къ элементу кривой. Элементъ ds кривой по (313) равенъ:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}\,.$$

Итакъ кривизна $\frac{1}{\rho}$ равна:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{\left[1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Но, вынося dx изъ подъ корня, можно написать

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \text{кривизнѣ} \;.\; (339)$$

Изъ этой формулы выводимъ:

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (340)$$

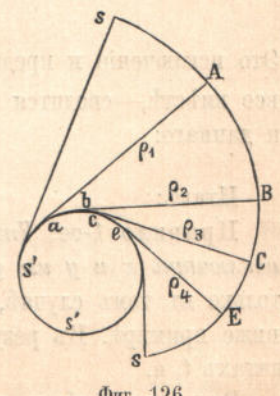
Это чрезвычайно важная формула, потому что въ вопросахъ о кривизнѣ пользуются обыкновенно не самою кривизною, но радіусомъ кривизны, опредѣляемымъ этою формулою (340).

Если желаемъ, при опредѣленіи радіуса кривизны, принимать за независимое перемѣнное не x, но какую нибудь другую величину, то необходимо произвести преобразованіе формулы (340) для замѣны независимаго перемѣннаго. Но такое преобразованіе нами уже произведено было въ примѣрѣ данномъ въ § 156-омъ. По выведенной тамъ формулѣ (271) заключаемъ, что радіусъ кривизны можетъ быть выраженъ такъ:

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x} \quad \ldots\ldots\ldots (341)$$

Развертки и развертывающія.

§ 187. Если s' такова, что касательныя ея служатъ нормалями другой кривой s (фиг. 126), то кривая s' называется *разверткою* кривой. Кривая же s называется развертывающею кривою s' *Касательныя развертки суть нормали развертывающей.* Наоборотъ: *нормали развертывающей суть касательныя развертки.* Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что *развертка* s' кривой s есть геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ безконечно близкихъ нормалей кривой s. Отсюда слѣдуетъ, что *развертка* есть геометрическое мѣсто *центровъ кривизны* (центровъ круговъ кривизны) развертывающей. Такъ на чертежѣ (фиг. 126): a, b, c, e суть центры кривизны развертывающей s. Прямыя же: ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 суть радіусы кривизны соотвѣтствующіе точкамъ A, B, C, E, развертывающей.



Фиг. 126.

Изъ чертежа (фиг. 126) усматривается (а въ подробныхъ курсахъ строго доказывается), что по данной *разверткѣ* легко начертить развертывающую слѣдующимъ способомъ. Приготовимъ кусокъ изъ твердаго матеріала; краю этого куска дадимъ видъ развертки s'; закрѣпивъ нить aA (фиг. 126) въ точкѣ a, будемъ наматывать ее на развертку, оставляя ее натянутою; тогда конецъ A начертитъ развертывающую s. Обратно: *если нить, изъ положенія $abclE$, будемъ развертывать съ развертки, то конецъ ея a опишетъ развертывающую s.* Отсюда и названіе: «развертывающая». Развертывающую называютъ иногда *эвольвентою*, а развертку *эволютою.*

По данному уравненію развертывающей найти уравненіе развертки.

§ 188. Согласно данному въ § 187 опредѣленію развертки, можно сказать что она есть огибающая (см. § 184) нормалей развертывающей. Пусть t и u суть координаты какой либо точки нормали данной кривой (развертывающей). По (304) уравненіе нормали будетъ:

$$(x-t)+(y-u)\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots\ldots \quad (342)$$

Изъ уравненія $f(x,y)=0$, опредѣляемъ y и $\frac{dy}{dx}$ въ видѣ нѣкоторыхъ функцій икса и вставляемъ ихъ въ (342). Послѣ этого въ (342) останется одинъ только x (кромѣ t и u). Разсматриваемъ x какъ перемѣнный параметръ. Развертка кривой, какъ мы видѣли, есть огибающая нормалей (342). Чтобы найти огибающую, нужно (см. § 184) исключить перемѣнный параметръ x изъ уравненія нормали (342) и изъ того, которое изъ него получится дифференцированіемъ по перемѣнному параметру x; такое уравненіе будетъ:

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-u)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad (343)$$

Это исключеніе и предварительная замѣна y и $\frac{dy}{dx}$ чрезъ функціи икса,— все вмѣстѣ,—сводится къ исключенію x и y изъ уравненій (342), (343) и даннаго:

$$f(x,y)=0 \quad \ldots\ldots \quad (344)$$

Итакъ:

Правило 1-ое: *Чтобы найти развертку кривой $f(x,y)=0$, нужно исключить x и y изъ уравненій (342), (343) и (344).* Сдѣлать это можно только въ томъ случаѣ, если $f(x,y)$ дана явно, какъ въ помѣщенномъ ниже примѣрѣ. Въ результатѣ получимъ уравненіе развертки въ координатахъ t, u.

Развертки имѣютъ важное значеніе, какъ геометрическія мѣста центровъ кривизны.

Правило 2-ое: *Координаты центра кривизны получаются, если опре-*

дѣлимъ изъ уравненій (342) и (343) t и u, потому что центръ кривизны есть пересѣченіе двухъ безконечно близкихъ нормалей.

Примѣръ. Опредѣлить развертку и радіусъ кривизны параболы:

$$y^2 = 2x\,,$$

параметръ p которой равенъ единицѣ.

Вычисляемъ:

$$y = \sqrt{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{(2x)^3}} = -\frac{1}{y^3}$$

Слѣдовательно уравненія (344), (342) и (343) будутъ въ данномъ случаѣ

$$y^2 = 2x$$

$$(x - t) + (y - u)\frac{1}{y} = 0$$

$$1 + \frac{1}{y^2} - (y - u)\frac{1}{y^3} = 0$$

или

$$y^2 = 2x$$

$$(x - t) + 1 - \frac{u}{y} = 0$$

$$1 + \frac{u}{y^3} = 0$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій имѣемъ:

$$x = t - 1 + \frac{u}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (345)$$

$$y^3 = -u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (346)$$

Дѣля уравненіе (346) почленно на y, и соображаясь съ даннымъ уравненіемъ $y^2 = 2x$, получимъ:

$$\frac{u}{y} = -y^2 = -2x\,.$$

Вставляя эту величину, вмѣсто $\frac{u}{y}$, въ (345), получимъ $x = t - 1 - 2x$, откуда:

$$x = \frac{t-1}{3}\,.$$

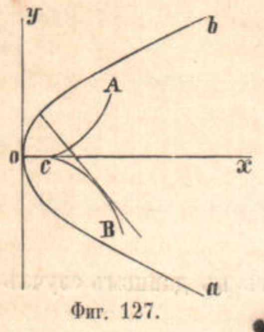
Подставляемъ, вмѣсто x, въ данное уравненіе параболы эту величину, получимъ:

$$y^2 = \frac{t-1}{3}\,.$$

Возведемъ обѣ части этого уравненія въ кубъ; получимъ:

$$y^6 = \frac{(t-1)^3}{27}.$$

Подставляя сюда, вмѣсто y^3, его величину изъ (346), получимъ наконецъ:



Фиг. 127.

$$u^2 = \frac{(t-1)^3}{27}.$$

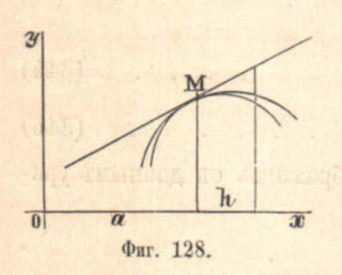
Это уравненіе 3-го порядка и есть искомое уравненіе развертки параболы. Видъ этой развертки *ACB* показанъ на чертежѣ (фиг. 127). Это кривая съ двумя вѣтвями простирающимися въ безконечность. Вѣтвь *AC* служитъ разверткою части *oa* параболы; вѣтвь *BC* служитъ разверткою части *ob* параболы.

Вставляя найденныя выше величины производныхъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ формулу (340), получимъ радіусъ кривизны (параболы $y^2 = 2x$) въ видѣ:

$$\rho = \frac{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{y^3}} = -\frac{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} y^3}{1} = (y^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Порядокъ соприкосновенія двухъ кривыхъ.

§ 189. Двѣ кривыя (фиг. 128) взаимно касаются въ точкѣ (x, y) въ томъ случаѣ, если онѣ имѣютъ въ этой точкѣ общую касательную.



Фиг. 128.

Пусть

$$y = f\,(x)$$

$$y = \varphi\,(x)$$

будутъ уравненія этихъ кривыхъ. Назовемъ чрезъ *a* абсциссу ихъ точки соприкосновенія *M*. Эта точка принадлежитъ обѣимъ кривыхъ, и потому $f(a) = \varphi(a)$. Ординаты обѣихъ кривыхъ въ точкѣ *M* одинаковы, но измѣняя абсциссу *a* на безконечно малое приращеніе *h*, получимъ разныя ординаты для кривыхъ. Опредѣлимъ помощью ряда Тайлора разность $f(a+h) - \varphi(a+h)$ этихъ ординатъ, чтобы судить о томъ, сколь быстро удаляется одна кривая отъ другой, выходя изъ общей точки соприкосновенія. По формулѣ (287) имѣемъ:

$$f(a+h) = f(a) + \text{в}f'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}\,a + \theta h).$$

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(a)+$$

$$+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(a+\theta h).$$

Вслѣдствіе этихъ соотношеній и равенства ординатъ $\varphi(a)$ и $f(a)$ въ точкѣ M, получимъ, что искомая разность будетъ:

$$f(a+h)--\varphi(a+h)=h\,tf'(a)-\varphi'(a)t+\frac{h^2}{1.2}tf''(a)-\varphi''(a)t+\ldots.$$

Если $f'(a)) = \varphi'(a)$ то первый членъ 2-ой части этого равенства уничтожается и вся 2-ая часть, а слѣдовательно и изслѣдуемая разность, будетъ содержать h въ степеняхъ бо́льшихъ единицы и потому будетъ 2-го порядка малости. Говорятъ, что въ этомъ случаѣ имѣется *соприкосновеніе 1-го порядка* данныхъ кривыхъ. Если и $f''(a)=\varphi''(a)$, то соприкосновеніе называется соприкосновеніемъ 2-го порядка. Вообще, если при $x=a$ всѣ производныя начиная отъ 1-ой и до m-ой одинаковы для $\varphi(x)$ и $f(x)$, то говорятъ, что кривыя $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ имѣютъ соприкосновеніе m-го порядка.

Если $f'(a)$ не равна $\varphi'(a)$, то при $x=a$ кривыя не касаются одна другой, потому что онѣ въ этомъ случаѣ не могутъ имѣть *общей* касательной, такъ какъ $f'(a)$ и $\varphi'(a)$ суть тангенсы угла наклоненія касательныхъ обѣихъ кривыхъ при $x=a$.

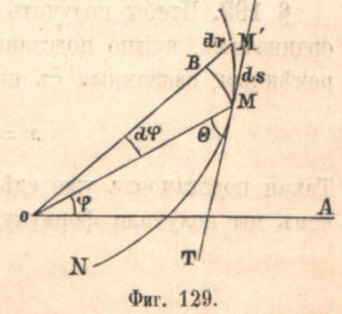
Изъ изложеннаго въ настоящемъ параграфѣ видно, что кривыя тѣмъ тѣснѣе соприкасаются одна съ другою и сосѣднія съ точкою прикосновенія части ихъ тѣмъ менѣе уклоняются одна отъ другой, чѣмъ выше порядокъ соприкосновенія кривыхъ.

Дифференціалъ дуги въ полярныхъ координатахъ.

§ 190. Въ § 51-омъ и послѣдующихъ мы уже познакомились съ полярными координатами на плоскости. Выведемъ нѣкоторыя, особенно важныя, дифференціальныя формулы въ полярныхъ координатахъ.

Положимъ, что кривая MN (фиг. 129) отнесена къ такимъ полярнымъ координатамъ, въ которыхъ O есть полюсъ, oA—полярная ось. Пусть r есть радіусъ-векторъ нѣкоторой точки m данной кривой и слѣдовательно, moA = полярному углу φ. Кривая, положимъ, задана уравненіемъ

$$f(r,\varphi)=0. \quad \ldots \quad (347)$$



Фиг. 129.

Опредѣлимъ дифференціалъ ds дуги кривой. Для этого дадимъ углу φ безконечно-малое приращеніе $d\varphi$; вслѣдствіе этого r получитъ прираще-

ніе dr и точка перейдетъ въ положеніе m' безконечно-близкое къ m. Дуга mm' и будетъ ds. Опишемъ изъ O радіусомъ OM дугу окружности и назовемъ чрезъ B точку ея пересѣченія съ OM' (фиг. 129). Чѣмъ меньше $d\varphi$, тѣмъ болѣе треугольникъ $BM'M$ приближается къ прямолинейному и кромѣ того онъ, вслѣдствіе перпендикулярности радіуса OB къ окружности BM, прямоуголенъ при B. По сдѣланнымъ предположеніямъ имѣемъ: $BM' = dr$; $MM' = ds$; $BM = r \, . \, d\varphi$ (дуга = произведенію радіуса на уголъ). Изъ безконечно-малаго прямоугольнаго треугольника $BM'M$ имѣемъ:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2 \, (d\varphi)^2} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (348)$$

Такова формула дифференціала (или элемента) дуги.

Уголъ, составляемый радіусомъ-векторомъ съ касательною.

§ 191. Когда M' приближается безконечно-близко къ M, то уголъ $MM'M$ обращается въ предѣлѣ въ уголъ OMT, составляемый радіусомъ-векторомъ съ касательною. Поэтому изъ безконечно-малаго треугольника $BM'M$ имѣемъ:

$$tg\,\theta = \frac{r\,d\varphi}{dr}; \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (349)$$

$$sin\,\theta = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2\,(d\varphi)^2}}; \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (350)$$

$$cos\,\theta = \frac{r\,d\varphi}{ds} = \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2\,(d\varphi)^2}} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (351)$$

Формулы (348), (349), (350) и (351) доказываются болѣе строго въ подробныхъ курсахъ; представленія безконечно-малаго треугольника $BM'M$ со сторонами dr, ds и $r\,d\varphi$ помогаютъ запоминать эти формулы.

Выраженіе радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ.

§ 192. Чтобы получить выраженіе радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ, нужно подставить въ формулу (340), вмѣсто x, y, новыя перемѣнныя, связанныя съ ними (§ 52) уравненіями:

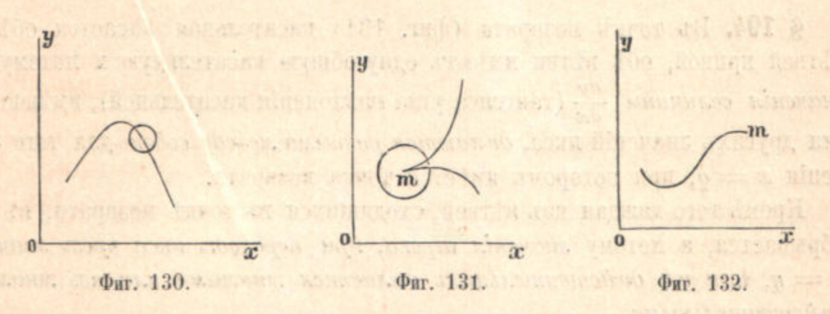
$$x = r\,cos\,\varphi;\; y = r\,sin\,\varphi.$$

Такая подстановка уже сдѣлана была нами въ «примѣрѣ» § 156-го, причемъ мы получили формулу, по сравненіи которой съ (340), получимъ:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (352)$$

Особыя точки кривыхъ.

§ 193. Окружность, описанная изъ какой-нибудь точки кривой безконечно-малымъ радіусомъ, пересѣкаетъ кривую, вообще говоря, въ двухъ точкахъ (фиг. 130). При этомъ радіусы, проведенные изъ центра безконечно-малой окружности къ ея точкамъ пересѣченія съ кривою, составляютъ между собою уголъ, безконечно-мало отличающійся отъ 180°. Если описанная изъ точки кривой, какъ изъ центра, безконечно-малая окружность не пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ, или радіусы, проведенные въ точки пересѣченія, составляютъ уголъ, отличаются на конечную



Фиг. 130. Фиг. 131. Фиг. 132.

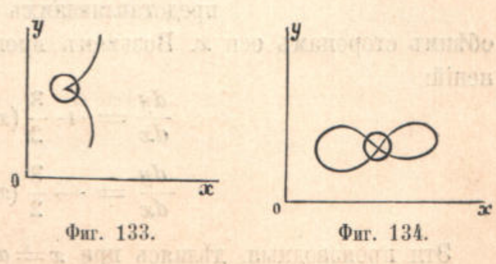
величину отъ угла въ 180°, то точка кривой называется *особою*. Наиболѣе важныя особыя точки суть слѣдующія:

1) *Точка возврата* m (фиг. 131)—такая, въ которой радіусы, проведенные изъ нея въ точки пересѣченія кривой съ безконечно-малою окружностью, имѣющею центръ въ m, составляютъ безконечно-малый уголъ. (На чертежѣ нельзя нарисовать безконечно-малую окружность, поэтому надо представлять себѣ, что будетъ, если та окружность, которая нарисована, сдѣлается безконечно-малою. Но, впрочемъ, характеръ особыхъ точекъ ясенъ изъ вида начерченной кривой).

2) *Точка остановки* (фиг. 132). Въ такой точкѣ m кривая не идетъ дальше. Безконечно-малая окружность, описанная изъ точки остановки, пересѣкаетъ кривую только въ одной (а не въ двухъ) точкахъ.

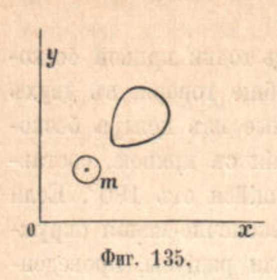
3) *Угловая точка* m (фиг. 133). Радіусы, проведенные изъ этой точки въ точки пересѣченія кривой съ безконечно-малою окружностью, составляютъ уголъ, отличный отъ 180°.

4) *Кратная точка* m (фиг. 134) такая, въ которой кривая сама себя пересѣкаетъ. Безконечно-малая окружность, описанная изъ такой точки, пересѣкаетъ кривую болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ.



Фиг. 133. Фиг. 134.

5) *Отдѣльная точка* m (фиг. 135). Случается такъ, что данному уравненію удовлетворяютъ не только координаты кривой AB, но и координаты нѣкоторой точки m, расположенной совершенно отдѣльно. Безконечно малая окружность, описанная изъ такой *отдѣльной* точки, вовсе не пересѣкаетъ кривую.



Фиг. 135.

Разсмотримъ нѣсколько подробнѣе особыя точки и пояснимъ сказанное на примѣрахъ.

Точка возврата.

§ 194. Въ точкѣ возврата (фиг. 131) касательная касается обѣихъ вѣтвей кривой, обѣ вѣтви имѣютъ одну общую касательную и потому *два значенія величины* $\frac{dy}{dx}$ (тангенса угла наклоненія касательной), имѣющіяся для другихъ значеній икса, *дѣлаются равными между собою* для того значенія $x = q$, при которомъ имѣется точка возврата.

Кромѣ того каждая изъ вѣтвей, сходящихся въ точкѣ возврата, въ ней обрывается, а потому *значенія игрека, при переходѣ икса чрезъ значеніе* $x = q$, *или изъ дѣйствительныхъ дѣлаются мнимыми или изъ мнимыхъ дѣйствительными.*

Примѣръ. Разсмотримъ кривую (фиг. 136):

$$y^2 = (x - a)^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353)$$

Отсюда

$$y = \pm \sqrt{(x - a)^3} = \pm (x - a)^{\frac{3}{2}}.$$

Каждому положительному значенію игрека соотвѣтствуетъ равное, но противуположное по знаку, отрицательное значеніе. Слѣдовательно, кривая симметрична относительно оси x. Послѣднее, написанное выше уравненіе, разбивается на два:

$$\left.\begin{aligned} y &= +(x - a)^{\frac{3}{2}} = +\sqrt{(x - a)^3} \\ y &= -(x - a)^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{(x - a)^3} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (354)$$

Фиг. 136.

представляющихъ двѣ части кривой, идущія по обѣимъ сторонамъ оси x. Возьмемъ производныя отъ обоихъ этихъ уравненій:

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{3}{2}(x - a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}(x - a)^{\frac{1}{2}}.$$

Эти производныя, дѣлаясь при $x = a$ равными нулю, становятся равными между собою. При этомъ значеніи $x = a$, и обѣ величины y дѣ-

лаются равными между собою. Значитъ, при $x = a$, обѣ части сливаются въ одной точкѣ и имѣютъ въ ней общую касательную. Остается испытать только, не будутъ ли обѣ величины y переходить изъ мнимыхъ въ дѣйствительные при переходѣ икса чрезъ $x = a$. Въ самомъ дѣлѣ уравненія (354) показываютъ, что для $x < a$ игреки имѣютъ мнимое, а для $x > a$ дѣйствительное значеніе. Итакъ: кривая $y^2 = (x - a)^3$, (фиг. 136), имѣетъ точку возврата при $x = a$.

Точка остановки.

§ 195. Разсмотримъ кривую:

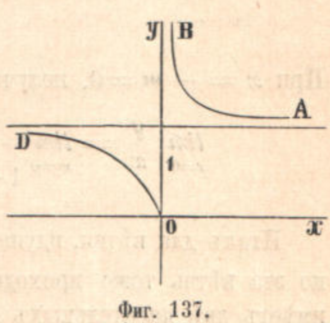
$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

При $x = 0$ игрекъ $= \infty$. Если будемъ x увеличивать отъ 0 до ∞, то y будетъ уменьшаться отъ ∞ до $e^{\frac{1}{\infty}}$, то есть до e^0 равнаго 1. Итакъ, *при положительныхъ* x имѣемъ вѣтвь AB (фиг. 137), и только ее, потому что для каждаго значенія икса изъ даннаго уравненія получается по одному только значенію игрека. Будемъ теперь разсматривать отрицательныя значенія икса. Положимъ для этого $x = - m$. Тогда

$$y = e^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{m}}},$$

гдѣ m есть абсолютная величина икса. При $m = 0$; получимъ:

$$y = \frac{1}{e^{\frac{1}{0}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$



Фиг. 137.

слѣдовательно, кривая имѣетъ точку въ началѣ (0, 0). Съ возрастаніемъ же абсолютной величины m икса знаменатель дроби $\frac{1}{e^{\frac{1}{m}}}$ уменьшается, и потому $y = \frac{1}{e^{\frac{1}{m}}}$ увеличивается. Итакъ, кромѣ вѣтви AB, имѣется еще вѣтвь OD, обрывающаяся въ началѣ координатъ, такъ какъ мы видѣли, что при положительныхъ x получается только вѣтвь AB. Итакъ вѣтвь OD имѣетъ точку остановки въ началѣ координатъ.

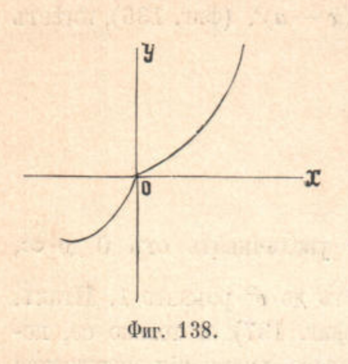
Угловыя точки.

§ 196. Примѣръ угловой точки видимъ въ кривой (фиг. 138):

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

При $x = 0$ получимъ: $y = \frac{0}{1 + \infty} = 0$. Значитъ кривая проходитъ

чрезъ начало (0, 0). Раздѣливъ обѣ части уравненія кривой на x, получимъ: $\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. Имѣемъ $\frac{dy}{dx} = \lim_{x=0} \frac{y}{x}$ въ точкахъ, весьма близкихъ къ началу, потому что въ нихъ y и x безконечно-малы, такъ какъ кривая проходитъ чрезъ начало. Итакъ



Фиг. 138.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0.$$

Значитъ, при положительныхъ x получается часть кривой, проходящая чрезъ начало. Касательная къ этой части въ началѣ координатъ совпадаетъ съ осью x, такъ какъ, при $x = 0$, производная $\frac{dy}{dx} = 0$.

Разсмотримъ отрицательныя значенія икса. Для этого назовемъ абсолютныя значенія икса чрезъ m во второй части уравненія кривой, такъ что $m = -x$; и:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{m}}}.$$

При $x = -m = 0$, получимъ:

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{m=0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Итакъ для вѣтви, идущей въ области отрицательныхъ иксовъ, $\frac{dy}{dx} = 1$, но эта вѣтвь тоже проходитъ чрезъ начало. Значитъ въ началѣ кривая имѣетъ двѣ касательныхъ къ двумъ сходящимся здѣсь вѣтвямъ; одна изъ касательныхъ направлена по оси x; другая же наклонена къ оси x подъ угломъ φ, для котораго $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = 1$; то есть $\varphi = 45°$. Кривая имѣетъ видъ, изображенный на (фиг. 138), съ *угловою* точкою въ началѣ.

Кратныя точки.

§ 197. Какъ примѣръ кривой, имѣющей кратную точку, разсмотримъ кривую (фиг. 139):

$$y^2 = (x - a)(x - b)^2,$$

въ которой $a < b$.

Изъ уравненія кривой находимъ:

$$y = \pm \sqrt{(x - a)}\,(x - b) = (x - a)^{\frac{1}{2}}(x - b). \quad . \; . \; . \; (355)$$

Это уравненіе показываетъ слѣдующее: ордината y имѣетъ 2 значенія для каждаго x; слѣдовательно, кривая симметрична относительно оси x. При $x < a$ для y получаются мнимыя значенія. При $x = a$ ордината $y = 0$.

Значитъ, кривая начинается отъ точки, для которой $x = a$ (фиг. 139) и идетъ отъ этой точки двумя вѣтвями по обѣимъ сторонамъ оси x. При измѣненіи икса отъ $x = a$ до $x = b$ кривая идетъ по обѣ стороны оси x. Но при $x = b$ оба значенія игрека обращаются въ нуль. Такимъ образомъ получается овалъ. При дальнѣйшемъ увеличеніи x, то есть при $x > b$, множитель $(x - b)$, въ уравненіи (355), дѣлается отрицательнымъ, вслѣдствіе чего знакъ второй части уравненія (355) изъ $\pm$ обращается въ $\mp$, значитъ вѣтви овала переходятъ, каждая, съ одной стороны оси x на другую и затѣмъ y все увеличивается, не дѣлаясь мнимымъ. Видъ кривой уже опредѣлился этимъ изслѣдованіемъ. Нужно еще изслѣдовать, какъ идутъ касательныя въ точкѣ B при $x = b$.

Дифференцируя уравненіе (355), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = (x - a)^{\frac{1}{2}} + \frac{(x - b)(x - a)^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$

При $x = b$ второй членъ правой части уничтожается и остается:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x - a}.$$

Фиг. 139.

То есть въ точкѣ B (при $x = b$) производная $\frac{dy}{dx}$ (равная тангенсу угла наклоненія касательной) имѣетъ 2 значенія:

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{b - a};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{b - a}.$$

Итакъ въ точкѣ B имѣются двѣ отличныя одна отъ другой касательныя. Кривая представляетъ фигуру (фиг. 139) съ кратною точкою въ B.

Отдѣльная точка.

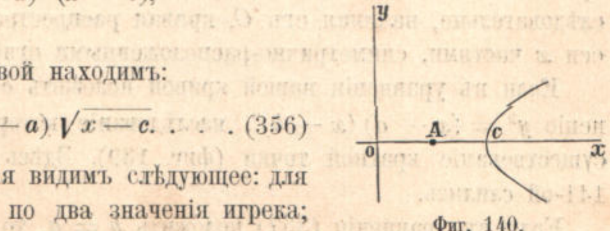
§ 198. Существованіе отдѣльной точки мы покажемъ на кривой:

$$y^2 = (x - a)^2 (x - c),$$

въ которой $a < c$.

Изъ уравненія кривой находимъ:

$$y = \pm (x - a)\sqrt{x - c}. \quad . \quad . \quad . \quad (356)$$



Фиг. 140.

Изъ этого уравненія видимъ слѣдующее: для каждаго x получается по два значенія игрека; слѣдовательно, кривая симметрична относительно оси x. При $x < c$ кривая не имѣетъ дѣйствительныхъ точекъ, кромѣ той, которая получается на оси x при $x = a$. При $x = c$ кривая имѣетъ на оси x точку c и при дальнѣйшемъ увеличеніи икса расходится изъ c по

обѣимъ сторонамъ оси x. Итакъ кривая имѣетъ вѣтвь MN (фиг. 140) и совершенно *отдѣльную* точку A, для которой $x = a$; $y = 0$.

Вліяніе параметровъ.

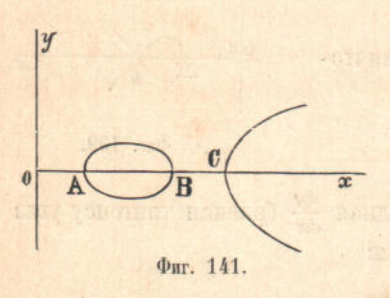
§ 199. Въ настоящемъ параграфѣ мы покажемъ вліяніе величины параметровъ на такомъ примѣрѣ, который охватываетъ примѣры, данные въ §§ 194, 197 и 198; а именно: разсмотримъ строеніе кривой:

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c),$$

въ которой $a < b < c$. Изъ уравненія кривой имѣемъ:

$$y = \pm \sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (357)$$

Два знака передъ радикаломъ показываютъ, что для каждаго икса ордината y имѣетъ два равныхъ и противуположныхъ значенія; слѣдовательно, кривая симметрична относительно оси x. Ордината y обращается въ нуль, всякій разъ, какъ стоящій въ правой части уравненія (357) радикалъ обращается въ нуль, то есть: при $x = a$, при $x = b$, при $x = c$. Значитъ: кривая пересѣкаетъ ось x въ точкахъ A, B, C (фиг. 141). При $x < a$ для y получаются мнимыя значенія, потому что всѣ три множителя $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$ при $x < a$ и при $a < b < c$ отрицательны, а слѣдовательно и произведеніе, стоящее подъ радикаломъ, отрицательно; значитъ кривая не имѣетъ точекъ при $x < a$. При $x = a$ она, какъ сказано выше, имѣетъ точку A на оси x. При $a < x < b$ кривая распространяется по обѣ стороны оси x и замыкается въ точкѣ B, лежащей на оси x; значитъ кривая имѣетъ овалъ AB. При $b < x < c$ множители $(x - a)$, $(x - b)$ положительны, но множитель $(x - c)$ отрицателенъ; значитъ кривая отъ $x = b$ до $x = c$ опять не имѣетъ точекъ. При $x = c$ она, какъ сказано выше, имѣетъ точку c на оси x. Съ дальнѣйшимъ возрастаніемъ икса y все время имѣетъ два равныя и противуположныя дѣйствительныя значенія: слѣдовательно, начиная отъ C, кривая распространяется по обѣ стороны оси x частями, симметрично-расположенными относительно оси x.



Фиг. 141.

Если въ уравненіи нашей кривой положить $b = c$, то получимъ уравненіе $y^2 = (x - a)(x - b)^2$, изслѣдованіе котораго въ § 197 показало существованіе кратной точки (фиг. 139). Здѣсь точки B и C фигуры 141-ой слились.

Если въ уравненіи (357) положить $b = a$, то получимъ уравненіе:

$$y^2 = (x - a)^2 (x - b),$$

изслѣдованіе котораго въ § 198 показало существованіе отдѣльной точки (фиг. 140). Здѣсь овалъ AB фигуры 141 слился въ одну точку A.

Если въ уравненіи (357) положить $a = b = c$, то получимъ уравненіе:

$$y^2 = (x - a)^3,$$

изслѣдованіе котораго въ § 194 показало существованіе точки возврата (фиг. 136). Здѣсь овалъ AB фигуры 141-ой слился въ одну точку A, и съ этою точкою слилась точка C.

Такъ изъ одной фигуры 141-ой получаются ея разновидности, благодаря только измѣненію параметровъ a, b и c.

Изслѣдованіе свойствъ нѣкоторыхъ кривыхъ.

Вступленіе.

§ 200. Съ запасомъ свѣдѣній, полученныхъ въ предъидущихъ параграфахъ, приступимъ къ изслѣдованію нѣкоторыхъ кривыхъ: это послужитъ къ расширенію нашихъ геометрическихъ свѣдѣній и будетъ, съ другой стороны, упражненіемъ въ примѣненіи изложенной теоріи.

Сначала пополнимъ геометрію коническихъ сѣченій, изложенную въ I-ой части.

Касательная эллипса.

§ 201. Приложимъ дифференціальное исчисленіе къ эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 = f(x, y).$$

По (263) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Изъ уравненія эллипса получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

Слѣдовательно, по (261):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

По § 173-му уравненіе касательной таково:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) = 0.$$

Вставляя сюда полученныя выше величины частныхъ производныхъ, получимъ:

$$\frac{2x}{a^2}(X - x) + \frac{2y}{b^2}(Y - y) = 0$$

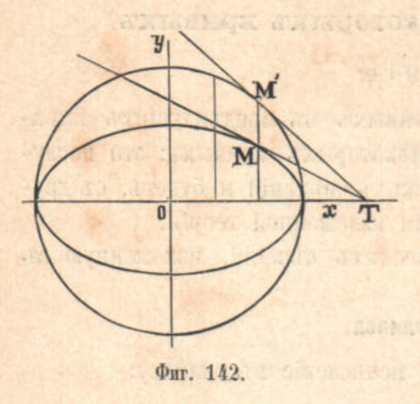
или

$$\frac{2Xx}{a^2} + \frac{2Yy}{b^2} = \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2}.$$

Сокращая на 2 и зная изъ уравненія эллипса, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, получимъ уравненіе касательной къ эллипсу въ такой формѣ:

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1 \ldots \ldots \ldots \ldots (358)$$

Если въ этомъ уравненіи сдѣлать $Y=0$, то получимъ $X=\frac{a^2}{x}$ величину, независящую ни отъ y, ни отъ b. Значитъ касательныя (фиг. 131), проведенныя при одномъ и томъ же x къ эллипсамъ, имѣющимъ то же направленіе осей и ту же большую ось a, пересѣкаютъ ось x въ одной и той же точкѣ. Къ такимъ эллипсамъ принадлежитъ и окружность, описанная изъ центра эллипса радіусомъ a. Отсюда вытекаетъ такое *построеніе касательной къ эллипсу въ данной его точкѣ* m (фиг. 142): проводимъ чрезъ точку M перпендикуляръ къ оси x; въ точкѣ M' его пересѣченія съ упомянутою окружностью, проводимъ, по извѣстному правилу, касательную къ этой окружности; прямая TM, соединяющая точку пересѣченія касательной къ окружности и оси x съ точкою M и будетъ искомая касательная.

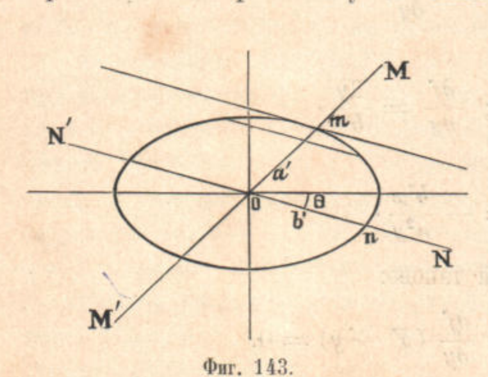


Фиг. 142.

Сопряженные діаметры эллипса.

§ 202. Мы видѣли въ § 37-омъ, что каждый діаметръ дѣлитъ хорды параллельныя сопряженному съ нимъ діаметру пополамъ. Касательная, проведенная въ концѣ діаметра MM', есть предѣлъ такихъ хордъ и потому тоже параллельна діаметру NN', сопряженному съ MM' (фиг. 143). Пусть (x', y') суть координаты конца m діаметра MM'. Уравненіе касательной по (358) будетъ:

$$\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}=1.$$



Фиг. 143.

Уравненіе сопряженнаго съ MM' діаметра NN', какъ уравненіе прямой, параллельной къ касательной $\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}=1$, будетъ по условію $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ параллельности (формула (35)) таково:

$$\frac{Xx'}{a^2}+\frac{Yy'}{b^2}=0; \ldots \ldots \ldots \ldots (359)$$

оно отличается отъ уравненія касательной въ точкѣ m только отсутствіемъ постояннаго члена. Назовемъ чрезъ θ уголъ наклоненія этого діаметра NN' къ оси x. Изъ его уравненія слѣдуетъ:

$$tg\,\theta = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Уравненіе діаметра MM' по (3) таково:

$$y' = x' . \, tg\,\theta',$$

гдѣ θ' есть уголъ наклоненія MM' къ оси x. Отсюда:

$$tg\,\theta' = \frac{y'}{x'}.$$

Найдемъ по даннымъ координатамъ (x', y') конца m діаметра MM' координаты (x'', y'') конца n сопряженнаго ему діаметра NN'. Точка n есть пересѣченіе линіи:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ эллипсъ,}$$

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0 \text{ сопряженный діаметръ по формулѣ (359).}$$

Рѣшая совмѣстно эти два уравненія, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \pm \frac{ay'}{b} \\ y'' &= \pm \frac{bx'}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (360)$$

1-ая теорема Аполлонія.

§ 203. По формулѣ (21) разстояніе om (фиг. 143), которое мы назовемъ чрезъ a', будетъ удовлетворять равенству: $a'^2 = x'^2 + y'^2$. Точка (x', y') лежитъ на эллипсѣ; поэтому:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

откуда:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2).$$

Вставляя эту величину y'^2 въ найденное уравненіе:

$$a'^2 = x'^2 + y'^2,$$

получимъ:

$$a'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'^2 = b^2 + e^2 x'^2, \quad \ldots \ldots \quad (361)$$

гдѣ эксцентриситетъ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ разстояніе on, которое назовемъ чрезъ b'. Именно:

$$b'^2 = x''^2 + y''^2.$$

Вставляя сюда вмѣсто (x'', y'') ихъ величины изъ (360), получимъ:

$$b'^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 = (a^2 - x'^2) + \frac{b^2}{a^2} x'^2 = a^2 -$$

$$- \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'^2 = a^2 - e^2 x'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (362)$$

Складывая (361) съ (362) получимъ теорему Аполлонія:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Сумма квадратовъ сопряженныхъ полудіаметровъ одинакова для всѣхъ паръ сопряженныхъ полудіаметровъ и равна суммѣ квадратовъ полуосей эллипса.

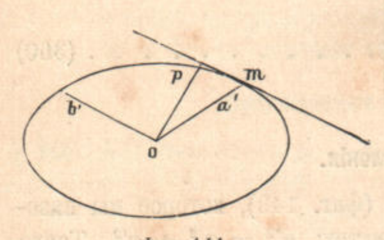
Разстояніе центра эллипса отъ касательной.

§ 204. Уравненіе (358) касательной къ эллипсу въ точкѣ (x', y') таково:

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1.$$

Координаты центра суть (0, 0). Для опредѣленія разстоянія центра (0, 0) эллипса отъ касательной слѣдуетъ поэтому положить въ (45):

$$A = \frac{x'}{a^2}; \quad B = \frac{y'}{b^2}; \quad C = -1.$$



Фиг. 144.

Получимъ:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}. \quad . \quad . \quad . \quad (363)$$

Знакъ беремъ $+$ потому, что разстояніе считаемъ положительнымъ (фиг. 144). Помноживъ числителя и знаменателя второй части уравненія (363) на ab, получимъ:

$$p = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2 x'^2}{a^2} + \frac{a^2 y'^2}{b^2}}}.$$

Но, по (362), стоящая подъ радикаломъ величина $= b'^2$. Слѣдовательно:

$$p = \frac{ab}{b'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (364)$$

Уголъ φ, составляемый двумя сопряженными діаметрами эллипса.

§ 205. Опредѣлимъ уголъ φ, заключенный между сопряженными діаметрами a' и b' (фиг. 145).

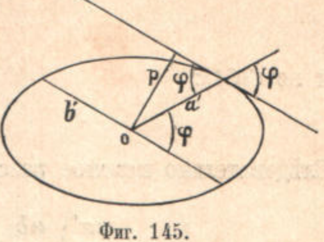
Этотъ уголъ равенъ углу, составляемому касательною, проведенною

въ концѣ a' съ a'. Опустивъ (фиг. 145) изъ центра перпендикуляръ на эту касательную, получимъ изъ образуемаго при этомъ прямоугольнаго треугольника:

$$\sin\varphi = \frac{p}{a'}.$$

Вставляя сюда величину p изъ (364), получимъ:

$$\sin\varphi = \frac{ab}{a'b'} \; . \; . \; . \; . \; . \; (365)$$



Фиг. 145.

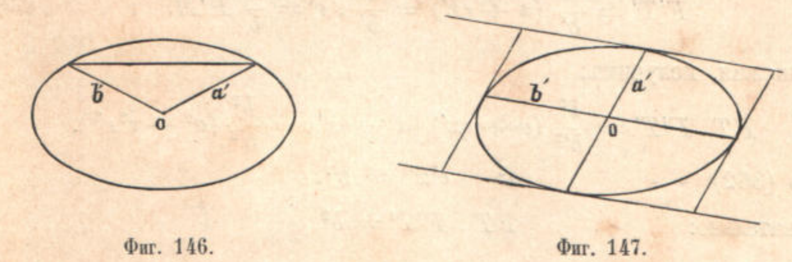
2-ая теорема Аполлонія.

§ 206. Изъ (365) непосредственно получимъ 2-ую теорему Аполлонія:

$$a'b' \,.\, \sin\varphi = ab \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (366)$$

Площадь треугольника, образованнаго двумя сопряженными полудіаметрами эллипса и хордою, стягивающею ихъ концы, одинакова для всѣхъ паръ сопряженныхъ діаметровъ и равна $\frac{ab}{2}$ (фиг. 146).

Эта теорема можетъ быть выражена и такъ: *площадь параллелограмма, построеннаго на парѣ какихъ бы то ни было сопряженныхъ діаметровъ есть, для даннаго эллипса, величина постоянная и равна площади прямо-*



Фиг. 146. Фиг. 147.

угольника, построеннаго на осяхъ, потому что эти параллелограммы слагаются изъ треугольниковъ, о которыхъ говорится въ первой редакціи этой теоремы (фиг. 147).

Знаменитый греческій геометръ Аполлоній, жившій въ началѣ III-го столѣтія по Р. Х. въ Александріи, доказалъ обѣ теоремы § 203, 206 элементарнымъ путемъ.

Разстоянія касательной эллипса отъ фокусовъ.

§ 207. По формулѣ (45) получимъ для разстоянія отъ фокуса эллипса (c, o) до касательной $\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1$ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}.$$

Но по (363):

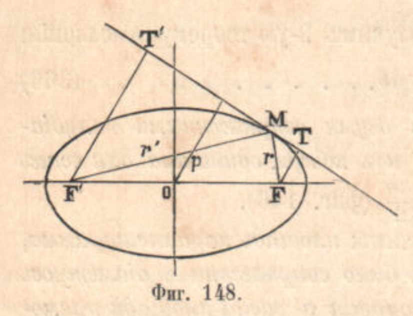
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}=p,$$

и по (364):

$$p=\frac{ab}{b'}.$$

Слѣдовательно искомое разстояніе =

$$\left(1-\frac{cx'}{a^2}\right)\frac{ab}{b'}=\frac{b}{b'}\left(a-\frac{c}{a}x'\right)=\frac{b}{b'}(a-ex').$$



Фиг. 148.

По (81) формулѣ, называя радіусъ-векторъ чрезъ r, имѣемъ: $a-ex'=r$ Итакъ искомое разстояніе $=\frac{b}{b'}r=FT$ (фиг. 148) или:

$$FT=\frac{b}{b'}FM=\frac{b}{b'}(a-ex'). \quad (367)$$

Точно такъ же найдемъ:

$$F'T'=\frac{b}{b'}(a+ex')=\frac{b}{b'}\cdot r'=\frac{b}{b}F'M. \quad . \ . \ . \ . \ (368)$$

Перемножая, получимъ:

$$FT\,.\,F'T'=\frac{b^2}{b'^2}(a+ex')(a-ex')=\frac{b^2}{b'^2}(a^2-e^2x'^2).$$

Но по (362): $a^2-e^2x'^2=b'^2$.

Слѣдовательно: $FT\,.\,F'T'=b^2$

произведеніе разстояній фокусовъ эллипса отъ касательной равно квадрату малой полуоси.

Равенство угловъ, составляемыхъ касательною эллипса съ радіусами-векторами точки касанія.

§ 208. Прямоугольные треугольники FTM и $F'T'M$ (фиг. 148) и формулы (367) и (368) даютъ:

$$\sin FMT=\frac{FT}{r}=\frac{b}{b'},$$

$$\sin F'MT'=\frac{F'T'}{r'}=\frac{b}{b'}.$$

Слѣдовательно: $\sin FMT=\sin F'MT'$

Итакъ: *углы, образуемые касательною съ радіусами-векторами, равны между собою.*

Радiусъ кривизны эллипса.

§ 209. Изъ уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получаемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Вставляя найденныя величины $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy^2}{dx^2}$ въ (340), получимъ:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{d^2x}} = \frac{\left[1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{[b^4x^2 + a^4y^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Координаты центра кривизны эллипса.

§ 210. По правилу 2-ому § 188-го для нахожденія координатъ t и u центра кривизны нужно опредѣлить t и u изъ уравненій:

$$(x - t) + (y - u)\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (342)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - u)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (343)$$

Внося сюда опредѣленныя въ предъидущемъ 209-мъ параграфѣ величины $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получимъ изъ уравненія (343):

$$1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2} - (y - u)\frac{b^4}{a^2y^3},$$

откуда:

$$y - u = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}.$$

Замѣняя здѣсь x^2 по формулѣ

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2),$$

выводимой изъ уравненія эллипса, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получимъ:

$$y - u = \frac{[a^4y^2 + b^2a^2(b^2 - y^2)]\,y}{a^2b^4} = \frac{(a^2 - b^2)\,y^2 + b^4}{b^4}\,.\,y.$$

Полагая $a^2 - b^2 = c^2$, получимъ:

$$y - u = y + \frac{c^2 y^3}{b^4},$$

откуда:

$$u = -\frac{c^2 y^3}{b^4}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (369)$$

вотъ ордината центра кривизны эллипса. Найдемъ теперь абсциссу. Для этого, благодаря симметріи уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, достаточно замѣнить въ (369): a чрезъ b, b чрезъ a, x чрезъ y, y чрезъ x, помня только, что тогда вмѣсто $c^2 = a^2 - b^2$ придется поставить $-c^2 = b^2 - a^2$. Получимъ:

$$t = \frac{c^2 x^3}{a^4}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (370)$$

Такова абсцисса центра кривизны эллипса.

Развертка эллипса.

§ 211. Въ (369) и (370) даны координаты центра кривизны эллипса, соотвѣтствующаго его точкѣ (x, y). Исключая x, y изъ этихъ уравненій (369) и (370) и изъ уравненія эллипса, получимъ геометрическое мѣсто всѣхъ его центровъ кривизны. Для такого исключенія достаточно внести въ уравненіе эллипса величины x и y, опредѣляемыя изъ (369) и (370). Получимъ сначала эти величины:

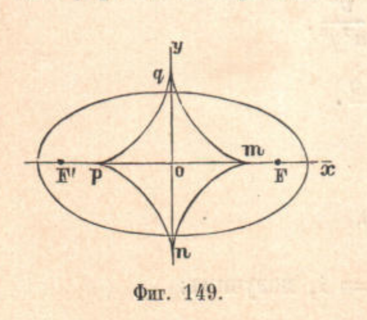
$$y = -\left(\frac{b^4}{c^2} u\right)^{\frac{1}{3}}; \quad x = \left(\frac{a^4}{c^2} t\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Внося ихъ въ уравненіе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получимъ:

$$\frac{\left(\frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}}{a^2} + \frac{\left(\frac{b^4}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} u^{\frac{2}{3}}}{b^2} = 1.$$

Для упрощенія выразимъ постоянныя части одною буквою. Получимъ:

$$At^{\frac{2}{3}} + Bu^{\frac{2}{3}} = 1.$$



Фиг. 149.

Изслѣдуя это уравненіе развертки эллипса, можно было бы замѣтить, что она имѣетъ видъ *mnpq* (фиг. 149). Съ каждой ея четверти развертывается четверть (квадрантъ) эллипса.

Мы нашли уравненіе развертки подстановкою въ уравненіе эллипса величинъ x, y, опредѣленныхъ изъ (369) и (370). Но не трудно видѣть, что этотъ способъ тождественъ съ общимъ способомъ исключенія x, y, предложен-

нымъ въ § 188. Мы здѣсь опредѣлили x и y изъ (369) и (370), но для этого пользовались уравненіями (342) и (343), а затѣмъ подставили x, y въ данное уравненіе; въ § 188 мы исключали x, y изъ уравненій (342), (343) и даннаго. Очевидно это одно и тоже.

Касательная гиперболы.

§ 212. Изъ уравненія: $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ гиперболы вычисляемъ:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f(x, y)}{b^2} = -\frac{2y}{b^2}.$$

Слѣдовательно по (261):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = +\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Вставляя эту величину въ общее уравненіе (302) касательной:

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

получимъ:

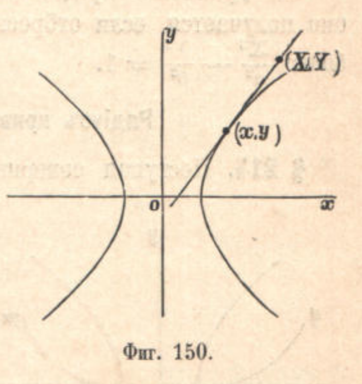
$$Y - y = \frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x), \quad \text{или:} \quad (Y - y)\, a^2 y = b^2 x (X - x),$$

$$\text{или:} \quad \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Но по уравненію гиперболы величина, стоящая здѣсь, во второй части $= 1$. Слѣдовательно, уравненіе касательной гиперболы таково:

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1.$$

Здѣсь X, Y суть текущія координаты касательной, x, y — координаты точки касанія (фиг. 150).



Фиг. 150.

Ассимптоты гиперболы.

§ 213. Выведенное нами уравненіе $\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$ касательной къ гиперболѣ показываетъ слѣдующее: касательная можетъ быть проведена и чрезъ центръ гиперболы (0, 0), если только положить координаты точки прикосновенія (x, y) равными безконечности. Дѣйствительно, если касательная проходитъ чрезъ начало координатъ (взятое въ центрѣ), то уравненіе касательной должно быть удовлетворено при $X = 0$; $Y = 0$. Тогда оно будетъ:

$$\frac{0 \cdot x}{a^2} - \frac{0 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если $x = \infty$; $y = \infty$, потому что тогда получимъ: $\frac{0 . \infty}{a^2} - \frac{0 . \infty}{b^2} = 1$, что, по неопредѣленности выраженій $0 . \infty$, можетъ быть вѣрнымъ. Но мы видѣли уже въ § 45-омъ, что прямыя, наклоненныя подъ угломъ φ, для котораго $tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}$, встрѣчаютъ гиперболу въ безконечности и что онѣ называются ассимптотами; теперь мы видимъ, что ассимптоты касаются гиперболы въ безконечности. Уравненія ассимптотъ будутъ таковы:

$$Y = + \frac{b}{a} X,$$

$$Y = - \frac{b}{a} X,$$

потому что онѣ проходятъ чрезъ начало и $tg\,\varphi = \pm \frac{b}{a}$.

Перенося члены этихъ уравненій въ одну сторону, получимъ:

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0; \quad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0;$$

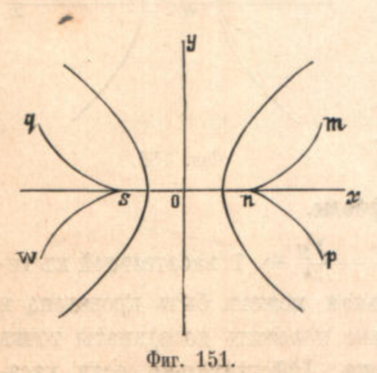
перемножая ихъ, получимъ:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0.$$

Это уравненіе представитъ собою совокупность обѣихъ ассимптотъ; оно получается, если отбросимъ постоянный членъ въ уравненіи гиперболы: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$.

Радіусъ кривизны и развертка гиперболы.

§ 214. Поступая совершенно такъ съ уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболы, какъ мы дѣлали съ уравненіемъ эллипса въ §§ 209—211, получимъ для гиперболы:



Фиг. 151.

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \text{ — радіусъ кривизны;}$$

$$At^{\frac{3}{2}} - Bu^{\frac{3}{2}} = 1 \text{ — уравненіе развертки.}$$

Развертка гиперболы состоитъ изъ вѣтвей *mnp* и *qsw* (фиг. 151), распространяющихся въ безконечность.

Касательная параболы.

§ 215. Найдемъ уравненіе касательной параболы: $y^2 = 2px$. Напишемъ его такъ:

$$f(x, y) = y^2 - 2px = 0.$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2p;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y;\quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Вставляя эту величину въ общее уравненіе касательной (302), получимъ:

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x);$$

или:

$$Yy - y^2 = pX - px.$$

Подставляя сюда вмѣсто px его выраженіе $\frac{y^2}{2}$, взятое изъ уравненія параболы, получимъ:

$$Yy - y^2 = pX - \frac{y^2}{2},$$

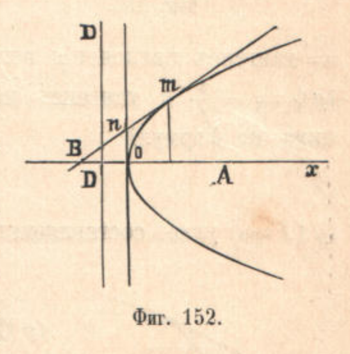
или:

$$Y = \frac{p}{y}X + \frac{y}{2}.$$

Сравнивая это уравненіе касательной параболы съ уравненіемъ

$$y = kx + b$$

прямой, пересѣкающей ось y на разстояніи b отъ начала (7), заключаемъ, что касательная параболы отсѣкаетъ отъ оси y отрѣзокъ $\frac{y}{2}$ вдвое меньшій ординаты точки касанія (фиг. 152), именно: $\overline{on} = \frac{\overline{Am}}{2}$. Изъ треугольниковъ onB и AmB, оказавшихся при этомъ подобными, слѣдуетъ, что $OA = OB$. Итакъ: *касательная параболы пересѣкаетъ ось x на разстояніи отъ начала равномъ абсциссѣ точки касанія.*



Фиг. 152.

Отсюда вытекаетъ простой способъ построенія касательной къ параболѣ въ точкѣ m. Для такого построенія надо опустить изъ m ординату, отложить въ сторону отрицательныхъ иксовъ абсциссу $OB = OA$ и соединить точку B съ m прямою, которая и будетъ касаться параболы въ точкѣ m.

Равенство угловъ, составляемыхъ нормалью параболы съ радіусомъ-векторомъ и съ прямыми, параллельными ея оси.

§ 216. Мы видѣли, что для параболы $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; такова величина тангенса угла наклоненія касательной. Тангенсъ угла наклоненія нормали будетъ, по условію (36) перпендикулярности, таковъ: $tg\,\psi = -\frac{y}{p}$, гдѣ ψ уголъ наклоненія нормали mn (фиг. 153). Такой же тангенсъ будетъ у угла $\theta = (180 - \psi)$, составляемаго нормалью съ прямою mA параллельною оси параболы. Найдемъ теперь $tg\,(Fmn)$, гдѣ $Fmn =$ углу, состав-

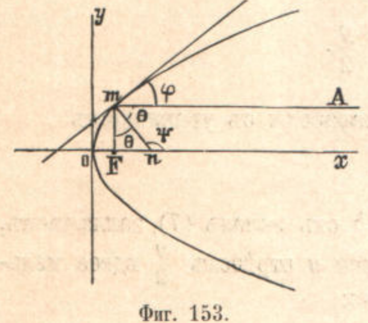
ляемому нормалью съ радіусомъ-векторомъ Fm, проведеннымъ въ точку m изъ фокуса F. Координаты m суть (x, y); координаты F суть $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Слѣдовательно, уравненіе радіуса-вектора Fm по формулѣ (18):

$$y = \frac{(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

будетъ:

$$y = \frac{y}{x - \frac{p}{2}} x - \frac{y \frac{p}{2}}{x - \frac{p}{2}} \quad \dots \dots \dots (371)$$

Извѣстно изъ (6), что здѣсь коэффиціентъ при иксѣ есть тангенсъ угла наклоненія прямой, выражаемой этимъ уравненіемъ (371). Итакъ:



Фиг. 153.

$$tg\,(mFn) = \frac{y}{x - \frac{p}{2}};$$

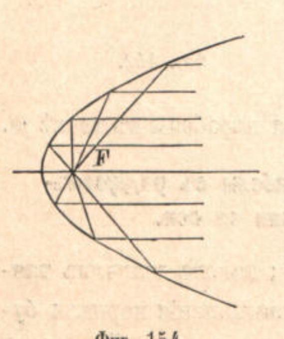
исключивъ отсюда при помощи уравненія параболы x, получимъ:

$$tg\,(mFn) = \frac{2y}{\frac{y^2}{p} - p} = \frac{2py}{y^2 - p^2}$$

$=$ тангенсъ наклоненія вектора Fm. Зная тангенсъ наклоненія нормали $tg\,\psi = -\frac{y}{p}$ и тангенсъ наклоненія вектора $tg\,(mFn) = \frac{2py}{y^2 - y^2}$, получимъ по формулѣ:

$$\frac{k - k'}{1 + kk'} \quad \dots \dots \dots (28)$$

$tg\,(Fmn)$ угла, составляемаго нормалью съ векторомъ:



Фиг. 154.

$$tg\,(Fmn) = \frac{\frac{2py}{y^2 - p^2} + \frac{y}{p}}{1 - \frac{2y^2}{y^2 - p^2}} = \frac{2p^2y + y^3 - p^2y}{p\,(y^2 - p^2 - 2y^2)} =$$

$$= \frac{y\,(y^2 + p^2)}{-p\,(y^2 + p^2)} = -\frac{y}{p}.$$

Но мы видѣли, что $tg\,\psi = -\frac{y}{p}$. Слѣдовательно:

$$tg\,\theta = tg\,\psi = tg\,(Fmn)$$

углы, составляемые нормалью съ радіусомъ-векторомъ и съ прямою, параллельною оси x, равны между собою (фиг. 153).

По закону физики: уголъ паденія луча равенъ углу отраженія. Слѣдовательно, въ параболическомъ зеркалѣ лучи, выходящіе изъ фокуса, отра-

жаются по прямымъ, параллельнымъ оси; и наоборотъ: падающіе на зеркало, параллельно оси, лучи собираются въ фокусѣ параболы (фиг. 154) (въ сферическомъ же зеркалѣ существуетъ сферическая аберрація, то есть неполное совпаденіе лучей въ фокусѣ).

Архимедова спираль.

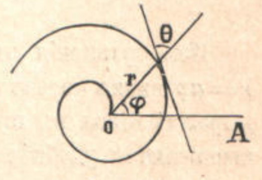
§ 217. Разсмотримъ видъ кривой, уравненіе которой выражается въ полярныхъ координатахъ такъ:

$$r = a \cdot \varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (372)$$

радіусъ-векторъ пропорціоналенъ полярному углу. Ясно, что кривая имѣетъ видъ спирали, и такъ какъ, съ увеличеніемъ φ до безконечности въ (372), и r увеличивается безконечно, то спираль распространяется въ безконечность, дѣлая безконечное число поворотовъ около полюса O. Точки пересѣченія ея съ полярною осью OA будутъ лежать на разстояніяхъ

$$r_1 = 2a\pi; \quad r_2 = 4a\pi; \quad 8a\pi,$$

и такъ далѣе. Эта кривая (фиг. 155) называется *архимедовою спиралью.*



Фиг. 155.

Уголъ θ, составляемый радіусомъ-векторомъ съ касательною, опредѣляется по дифференціальной формулѣ

$$tg\,\theta = \frac{r\,d\varphi}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (349)$$

Здѣсь: $tg\,\theta = \frac{r}{a} = \varphi$, потому что изъ уравненія (372) этой спирали слѣдуетъ:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{a}.$$

Наоборотъ: $\frac{dr}{d\varphi} = a$. Дифференцируя еще разъ, получимъ: $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$. Вставляя эти величины въ формулу:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352)$$

получимъ для радіуса кривизны Архимедовой спирали выраженіе:

$$\rho = \frac{[r^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2a^2}.$$

Подставляя вмѣсто r равную ему величину $a\varphi$ (по уравненію спирали $r = a\varphi$), получимъ:

$$\rho = \frac{[a^2\varphi^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2\varphi^2 + 2a^2} = \frac{a^3\,(\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a^2\,(\varphi^2 + 2)} = \frac{a\,(\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2 + 2}.$$

Для выраженія уравненія Архимедовой спирали въ прямоугольныхъ координатахъ, нужно въ ея полярномъ уравненіи $r = a\varphi$, вмѣсто r и φ, подставить ихъ выраженія чрезъ x, y при помощи формулъ:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (78)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (79)$$

Изъ (78) имѣемъ:

$$\varphi = artg\left(\frac{x}{y}\right).$$

Вставляя въ уравненіе $r = a\varphi$, получимъ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \, . \, artg\left(\frac{x}{y}\right).$$

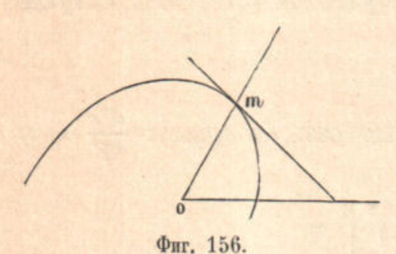
Изъ сравненія этого сложнаго уравненія съ простымъ уравненіемъ: $r = a\varphi$ видна польза полярныхъ координатъ. Существуютъ кривыя, удобнѣе выражающіяся въ прямоугольныхъ координатахъ, но зато другія кривыя выражаются удобнѣе въ полярныхъ координатахъ.

Логариѳмическая спираль.

§ 218. Разсмотримъ такъ называемую логариѳмическую спираль, опредѣляемую уравненіемъ

$$r = e^{\varphi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (373)$$

Эта спираль называется логариѳмическою, потому что изъ ея уравненія слѣдуетъ: $\varphi = lg\, r$. Что она имѣетъ видъ спирали, видно изъ уравненія ея (373), въ которомъ при увеличиваніи φ увеличивается и r (фиг. 156).



Фиг. 156.

Вычисляемъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = e^{\varphi}\,; \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = e^{\varphi}\,; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{e^{\varphi}}.$$

Опредѣлимъ уголъ θ, составляемый радіусомъ-векторомъ съ касательною; по формулѣ (349) имѣемъ:

$$tg\,\theta = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Подставляя сюда найденную величину $\frac{dr}{d\varphi}$ получимъ:

$$tg\theta = r \, . \, \frac{1}{e^{\varphi}}\,,$$

но по уравненію кривой $r = e^{\varphi}$. Слѣдовательно:

$$tg\,\theta = 1; \quad \theta = 45^0.$$

Итакъ: *въ логариѳмической спирали касательная* (а слѣдовательно и *элементъ кривой) составляетъ постоянный уголъ съ радіусомъ векторомъ.*

Такимъ же свойствомъ обладаетъ логариѳмическая спираль болѣе общаго вида:

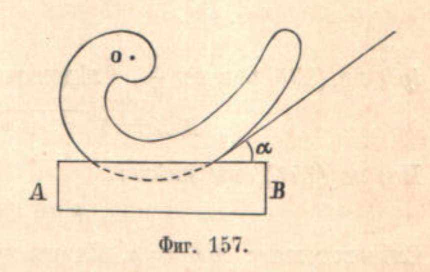
$$r = e^{m\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (374)$$

Для нея:

$$\frac{dr}{d\varphi} = me^{m\varphi}; \quad \frac{d^2r}{d\varphi} = m^2e^{m\varphi}; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{me^{m\varphi}}$$

$$tg\theta = r \cdot \frac{1}{me^{m\varphi}} = \frac{1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots (375)$$

Это свойство дѣлаетъ логариѳмическую спираль удобною для выдѣлыванія вращающихся ножей съ лезвіемъ, сдѣланнымъ въ видѣ этой кривой: такой ножъ, вращаясь около полюса o (фиг. 157), врѣзается въ разрѣзаемое тѣло AB подъ постояннымъ угломъ α (все подъ однимъ и тѣмъ же угломъ при вращеніи ножа). Такіе ножи употребляются, напримѣръ, въ соломорѣзкахъ.



Фиг. 157.

Радіусъ кривизны логариѳмической спирали.

§ 219. Для опредѣленія радіуса кривизны логариѳмической спирали преобразуемъ нѣсколько полученныя нами въ § 218 производныя, подставивъ въ нихъ вмѣсто $e^{m\varphi}$ величину r (уравненіе спирали $r = e^{m\varphi}$). Получимъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = me^{m\varphi} = mr; \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = m^2e^{m\varphi} = m^2r.$$

Подставивъ эти выраженія въ

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}} \ldots\ldots (352)$$

получимъ:

$$\rho = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2r^2 - m^2r^2} = \frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1+m^2)} = r\sqrt{1+m^2}$$

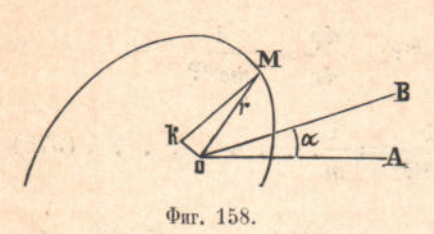
$$\rho = r\sqrt{1+m^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (376)$$

Величина $\sqrt{1+m^2}$ постоянная; слѣдовательно ρ пропорціонально r.

Развертка логариѳмической спирали.

§ 220. Нахожденіе уравненія развертки логариѳмической спирали въ простой формѣ сопряжено съ нѣкоторыми затрудненіями, но результатъ получится необыкновенно красивый.

Пусть MK (фиг. 158) есть направленіе радіуса кривизны въ точкѣ M спирали. Возставимъ изъ полюса O перпендикуляръ OK. Изъ прямоугольнаго треугольника OKM имѣемъ:



Фиг. 158.

$$MK = \sqrt{OM^2 + OK^2}.$$

Но $$OM = r$$

$$ok = rtg\,(OMK) = r\cot g\,\theta = \frac{r \cdot 1}{tg\,\theta};$$

$tg\,\theta$ по (375 равенъ $\frac{1}{m}$. Слѣдовательно: $ok = mr$. Поэтому:

$$MK = \sqrt{r^2 + m^2r^2} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Но, по (376), мы имѣли:

$$\rho = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Слѣдовательно: $MK = \rho$. Итакъ центръ кривизны лежитъ на пересѣченіи нормали съ прямою ok, проведенною изъ o перпендикулярно къ r. Этотъ результатъ отчасти подсказывался формулою (376), почему мы и попробовали его провѣрить приведеннымъ вычисленіемъ.

Для нахожденія развертки изберемъ другую полярную ось OB наклоненную къ прежней подъ угломъ α, который пока считаемъ произвольнымъ. Назовемъ новый полярный уголъ чрезъ φ' и величину $\overline{OK}$ чрезъ r', такъ что

$$r' = \overline{ok} = r \cdot \cot g\,\theta = mr = me^{m\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (377)$$

Изъ чертежа, замѣчая, что уголъ при k прямой, видимъ:

$$\varphi' + \alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } \varphi = \varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2};$$

вставляя эту величину φ въ (377), получимъ:

$$r' = me^{m\varphi' + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)};$$

или:

$$r' = e^{m\varphi'} \cdot me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (378)$$

Пока α у насъ произвольно, и мы можемъ всегда подобрать для него такую величину, чтобы $me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ равнялось единицѣ; для этого стоитъ только, положивъ:

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

логариѳмировать, при чемъ получимъ:

$$lgm + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

и отсюда опредѣлить:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{lgm}{m}.$$

Вотъ при какомъ α величина $me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ равна 1. Но тогда (378) обращается въ:

$$r' = e^{m\varphi'} \dots\dots\dots\dots\dots (379)$$

Итакъ: геометрическое мѣсто центровъ k кривизны, то есть развертка логариѳмической спирали, есть тоже логариѳмическая спираль, только такая, въ которой углы φ' отсчитываются отъ новой полярной оси, наклоненной къ прежней подъ угломъ

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{lgm}{m}.$$

Значитъ спираль (379) есть не что иное какъ данная спираль, повернутая на уголъ, равный $\frac{\pi}{2} - \frac{lgm}{m}$.

Вообще форма развертокъ выходитъ весьма сложная а для логариѳмической спирали развертка есть такая же логариѳмическая спираль. Результатъ таковъ:

Развертка логариѳмической спирали есть та же самая спираль, но иначе расположенная. *).

Мы впослѣдствіи увидимъ, что есть другая кривая, обладающая такимъ же свойствомъ.

Гиперболическая спираль.

§ 221. Спиралей существуетъ безчисленное множество, кромѣ наиболѣе замѣчательныхъ архимедовой и логариѳмической. Изъ числа другихъ спиралей упомянемъ *о спирали гиперболической*, выражаемой уравненіемъ:

$$r \cdot \varphi = m^2.$$

Гиперболическою она называется по аналогіи съ гиперболой, отнесенной къ ассимптотамъ (96), имѣющей уравненіе: $x \cdot y = m^2$.

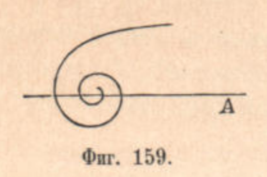
Дѣля обѣ части уравненія гиперболической спирали на φ, получимъ:

$$r = \frac{m^2}{\varphi}.$$

---

*) Иванъ Бернулли, открывшій это свойство, такъ былъ имъ пораженъ, что почелъ его символомъ воскресенья метрвыхъ и завѣщалъ начертить логариѳмическую спираль на своемъ памятникѣ.

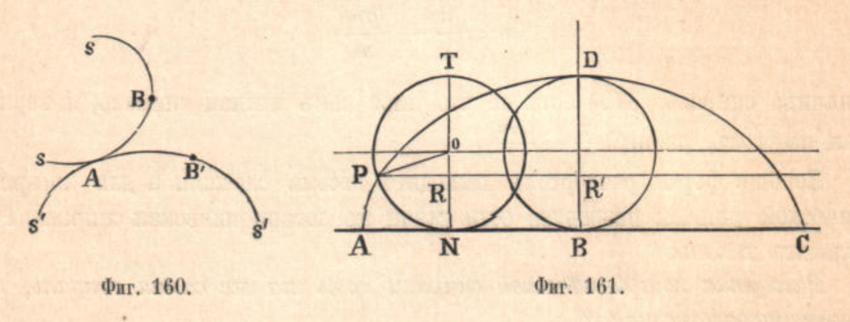
Изъ этого уравненія видно, что съ увеличеніемъ φ радіусъ векторъ уменьшается безпредѣльно. Слѣдовательно кривая эта не проходитъ чрезъ полюсъ o, какъ это дѣлаютъ архимедова и логариѳмическая спирали, но приближается къ нему съ каждымъ новымъ оборотомъ, никогда его не достигая, при чемъ обороты *(спиры)* все уменьшаются (фиг. 159).



Фиг. 159.

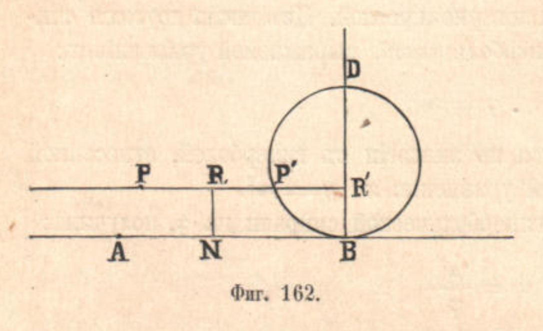
Циклоида и ея построеніе по точкамъ.

§ 222. Изслѣдуемъ кривую, которую описываетъ какая нибудь точка обода колеса, катящагося по гладкой дорогѣ. Задача должна быть поставлена болѣе опредѣленнымъ образомъ. Кривая, *описываемая точкою окружности, катящейся по прямой, называется* **циклоидою.** *Катаніемъ одной кривой s по другой s' (фиг. 160) называется такое движеніе s, при которомъ она постоянно касается кривой s', при чемъ точка соприкосновенія проходитъ на обѣихъ кривыхъ равныя дуги: $AB = AB'$.* Перейдемъ къ изслѣдованію *циклоиды.*



Фиг. 160. Фиг. 161.

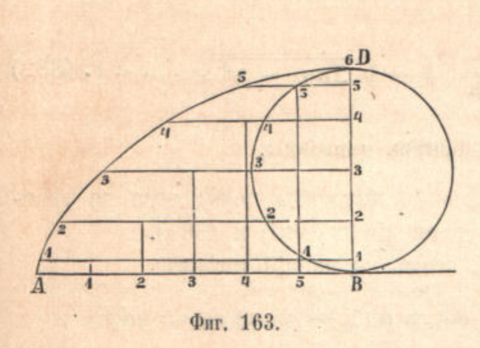
Пусть по прямой AB (фиг. 161) катится кругъ TN. Циклоидою называется кривая $APDC$, описываемая при этомъ точкою P окружности катящагося круга. Научимся прежде всего чертить циклоиду, хотя чертить ее можно только приблизительно. Но изучать мы ее будемъ точно.



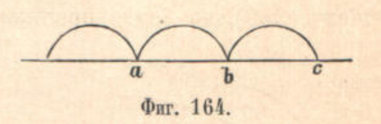
Фиг. 162.

Для вычерчиванія циклоиды достаточно начертить катящійся кругъ только въ томъ его положеніи, въ которомъ описывающая циклоиду точка наиболѣе удалена отъ прямой, по которой кругъ катится. Откладываемъ (фиг. 162) отъ точки касанія B этого круга длину $B\ A$ равную полуокружности $BP'D$. Это можно сдѣлать, какъ извѣстно, только приблизительно, благодаря несоизмѣримости числа π. Совершенно достаточное для

приложеній приближеніе даетъ любой изъ описанныхъ въ Геометріи Давидова способовъ приближеннаго построенія (въ главѣ «квадратура круга»). Дѣлимъ дугу $BP'D$ на какое нибудь равное число частей. Пусть P' будетъ одна изъ точекъ дѣленія. Проводимъ чрезъ P параллель $P'R'$ къ BA. Если P' была n-ая точка дѣленія, считая отъ B, то и на BA беремъ n-ую точку дѣленія N, считая отъ A. Возставляемъ изъ N перпендикуляръ къ BA до пересѣченія въ R съ параллелью, проведенною чрезъ P'. Пусть R' есть пересѣченіе параллели $P'R'$ съ діаметромъ BD. Откладываемъ $RP = R'P'$. Точка P будетъ одною изъ точекъ циклоиды, какъ это видно изъ сравненія фиг. 162 съ фиг. 161, на которой изображенъ катящійся кругъ въ положеніи NPT; по построенію же дугъ: $NP = AN$, какъ и требуется при катаньи. Чѣмъ больше число точекъ дѣленія возьмемъ на $BP'D$, тѣмъ точнѣе будетъ чертежъ. На фиг. 163 половина циклоиды построена по точкамъ. На такихъ чертежахъ удобно отмѣчать точки цифрами.



Фиг. 163.



Фиг. 164.

Собственно полная циклоида состоитъ изъ безчисленнаго числа дугъ (фиг. 164) равныхъ между собою, потому что предполагаемъ, что кругъ катится по прямой въ безконечную даль.

Уравненіе циклоиды.

§ 223. Для вывода уравненія циклоиды выразимъ отдѣльно x и y чрезъ *уголъ* $\varphi = \angle PON$ *поворота*; при чемъ прямую AB (фиг. 165) принимаемъ за ось x, начало беремъ въ A; $x = AL$, $y = LP$ суть координаты точки P циклоиды.

Назовемъ радіусъ катящагося круга чрезъ a. Изъ чертежа видимъ, что:

$$x = AL = AN - LN = \text{дуга}\, NP - PR = a.\varphi - a \sin\varphi = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = LP = NR = NO - RO = a - a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi).$$

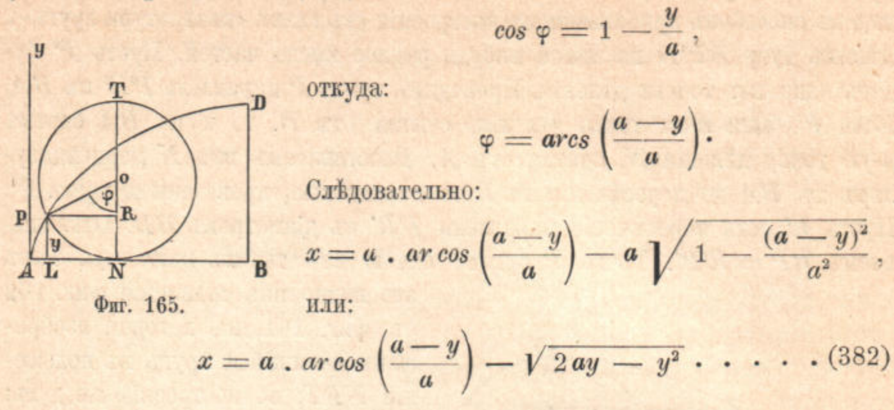
Итакъ:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (380)$$

$$y = a(1 - \cos\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (381)$$

Исключая изъ этихъ уравненій φ, получимъ уравненіе циклоиды слѣ-

дующимъ образомъ изъ (381):



Фиг. 165.

$$\cos\varphi = 1 - \frac{y}{a},$$

откуда:

$$\varphi = arcs\left(\frac{a-y}{a}\right).$$

Слѣдовательно:

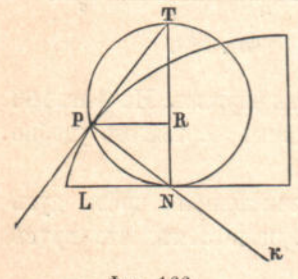
$$x = a \, . \, ar\cos\left(\frac{a-y}{a}\right) - a\sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}},$$

или:

$$x = a \, . \, ar\cos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (382)$$

Касательная и нормаль циклоиды.

§ 224. Обыкновенно для изслѣдованія циклоиды пользуются не уравненіемъ (382), но болѣе простыми уравненіями (380) и (381).



Фиг. 166.

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$dx = a\,(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = y d\varphi$$

$$dy = a \, . \, \sin\varphi \, . \, d\varphi = \sqrt{2ay - y^2}\, d\varphi \, .$$

Дѣля почленно эти равенства одно на другое, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \; . \; . \; . \; (383)$$

По формулѣ (307) длина поднормали равна $y\,\frac{dy}{dx}$. Слѣдовательно, для циклоиды, она будетъ:

$$y \, . \, \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y\,(2a - y)}.$$

Послѣдняя величина $\sqrt{y\,(2a - y)}$, какъ видно изъ чертежа (фиг. 165) равна

$$\sqrt{LP \, . \, (NT - LP)} = \sqrt{LP \, . \, (NT - NR)} = \sqrt{LP \, . \, RT} = \sqrt{NR \, . \, RT} \, .$$

Итакъ поднормаль (фиг. 166) равна средней пропорціональной между NR и RT. По извѣстной теоремѣ о перпендикулярѣ, опущенномъ изъ точки окружности на діаметръ, поднормаль равна, слѣдовательно $RP = LN$. Но если LN есть поднормаль, то PN—нормаль (фиг. 166). Итакъ: *нормаль циклоиды есть прямая, соединяющая описывающую циклоиду точку P съ основаніемъ N катящагося круга*

Проведя нормаль и возставляя къ ней изъ P перпендикуляръ, получимъ касательную, которая пройдетъ чрезъ T, вслѣдствіе того, что уголъ

NPT, опирающійся на діаметръ, есть прямой (фиг. 166). Итакъ: *касательная циклоиды есть прямая, соединяющая точку P, чертящую циклоиду, съ вершиною T катящагося круга.*

Радіусъ кривизны циклоиды.

§ 225. Изъ (383) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}\,;$$

поэтому:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y} - 1.$$

Дифференцируя это уравненіе по x, получимъ:

$$2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{2a}{y^2}\,\frac{dy}{dx}\,;$$

или:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{a}{y^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(384)$$

Подставляя найденныя величины $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ выраженіе радіуса кривизны (340), получимъ:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{a}{y^2}\right)} = \frac{\sqrt{8a^3}}{\sqrt{y^3}\,\frac{a}{y^2}} = \sqrt{\frac{8a^3y}{a^2}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Но $\sqrt{2ay}$ (какъ среднепропорціональная между $2a$ и y) равно NP, потому что катетъ NP есть среднепропорціональная между гипотенузою $NT = 2a$ и ея отрѣзкомъ $y = NR$. Итакъ:

$$\rho = 2\,\overline{NP}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(385)$$

Радіусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной нормали.

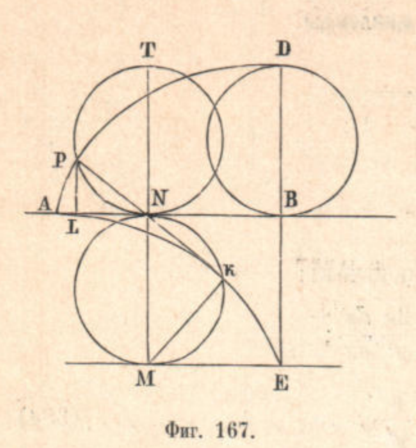
Центръ кривизны циклоиды.

§ 226. По правилу, изложенному въ концѣ § 179-го кривая вогнута, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательна. Мы видимъ изъ (384), что она отрицательна для циклоиды. Слѣдовательно циклоида обращена вогнутостью къ оси x. Поэтому ρ надо откладывать въ направленіи отъ P къ N, и такъ какъ $\rho = 2PN$, то *центръ кривизны лежитъ въ точкѣ K*, на разстояніи $NK = PN$ отъ основанія N катящагося круга.

Развертка циклоиды.

§ 227. Найденныя свойства радіуса кривизны циклоиды и ея центра кривизны даютъ возможность найти ея развертку слѣдующимъ простымъ геометрическимъ разсужденіемъ.

Построимъ (фиг. 167) кругъ NM симметричный и равный кругу TN относительно прямой AB. Вслѣдствіе доказаннаго равенства, $PN = NK$ точка K будетъ лежать на окружности этого круга. Вслѣдствіе равенства хордъ и дуги PN и NK равны. Но дуга $PN = AN$; AB = полуокружности катящагося круга. Слѣдовательно дуга $MK = ME$. Поэтому, когда кругъ NT будетъ катиться по AB, кругъ MN будетъ катиться по ME, и точка K (центръ кривизны) опишетъ циклоиду AKE, равную данной циклоидѣ, но иначе расположенную. Итакъ: *развертка (геометрическое мѣсто центровъ кривизны) циклоиды есть такая же, но иначе расположенная, циклоида.*



Фиг. 167.

Мы видѣли въ § 220-омъ, что подобнымъ же свойствомъ отличается логариѳмическая спираль, развертка которой есть тоже равная ей, но иначе расположенная, кривая.

Построеніе циклоиды дугами окружностей.

§ 228. Радіусъ кривизны и центръ кривизны — понятія чрезвычайно важныя. Пока мы покажемъ на примѣрѣ циклоиды, какую пользу можно извлечь изъ этихъ понятій для построенія (вычерчиванія) кривыхъ. Въ § 222-омъ мы выучились вычерчивать циклоиду по точкамъ; но построеніе по точкамъ требуетъ большаго навыка. Радіусъ кривизны даетъ возможность чертить кривая какъ рядъ небольшихъ круговыхъ дугъ, проводимыхъ обыкновеннымъ циркулемъ.

Для вычерчиванія этимъ способомъ циклоиды поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

Откладываютъ на прямой длину AB равную полуокружности катящагося круга. Дѣлятъ AB на 6 равныхъ частей. Строятъ окружность катящагося круга касательную къ AB въ точкѣ A (фиг. 168). Дѣлятъ полуокружность AT на 6 частей и соединяютъ A съ точками дѣленія полуокружности прямыми. Чрезъ точки дѣленія прямой AB проводятъ прямыя параллельныя проведеннымъ чрезъ точку A. Эти прямыя обогнутъ развертку AE. Принимаютъ послѣдовательныя взаимныя пересѣченія: l, m, n, p, q, E этихъ прямыхъ за центры: изъ l описываютъ дугу Aa радіусомъ lA; изъ m описываютъ дугу ab радіусомъ ma; изъ n описываютъ дугу bc радіусомъ nb, и такъ далѣе. Границами дугъ служатъ прямыя, проходящія чрезъ точки дѣленія прямой AB.

Не трудно видѣть, что это построеніе согласуется со сказаннымъ въ §§ 226 и 227 о центрѣ кривизны и разверткѣ циклоиды, но избавляетъ отъ необходимости чертить катящійся кругъ въ нѣсколькихъ положеніяхъ.

Если прямую AB и полуокружность AT раздѣлить не на 6, а на бóльшее число частей, то чертежъ будетъ точнѣе.

Я привелъ это построеніе, потому что на немъ наглядно видны свойства развертки, и круговъ кривизны. Дуги: Aa, ab, bc, cd, de, cD (фиг. 168) суть дуги шести круговъ кривизны циклоиды. Соотвѣтствующіе имъ центры кривизны находятся въ точкахъ l, m, n, p, q, E, лежащихъ на разверткѣ.

Фиг. 168.

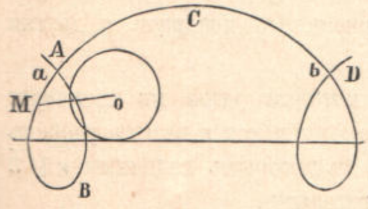
Необходимо замѣтить, что примѣненіе развертокъ и круговъ кривизны къ черченію представляетъ еще весьма малую долю той пользы, которую приносятъ математикѣ и ея приложеніямъ понятіе о кривизнѣ.

Циклоида есть одна изъ кривыхъ, называемыхъ *рулеттами*, о которыхъ мы поговоримъ въ § 231-омъ, а пока познакомимся съ ближайшими ея обобщеніями.

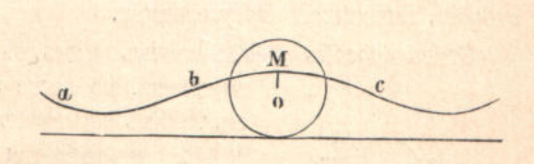
Растянутая и сжатая циклоиды.

§ 229. Если кругъ катится по прямой (фиг. 169), то точка M, неизмѣняемо соединенная съ нимъ, но находящаяся отъ его центра на разстояніи OM, превышающемъ длину его радіуса, описываетъ кривую $ABCD$, называемую *сжатою циклоидою.* Эта кривая обладаетъ завитками съ двойными точками: a, b . . .

Если кругъ катится по прямой, то точка M (фиг. 170), неизмѣняемо соединенная съ нимъ, но находящагося отъ его центра на разстояніи меньшемъ длины радіуса, описываетъ кривую $abMc$, называемую *растянутою циклоидою.* Эта кривая обладаетъ точками перегиба: a, b, c . . .



Фиг. 169.



Фиг. 170.

Обыкновенная же циклоида (фиг. 164) обладаетъ точками возврата: a, b, c . . .

Центръ катящагося круга описываетъ, очевидно, прямую параллельную той, по которой онъ катится.

Приближенное построеніе длины полуокружности.

§ 230. Здѣсь, кстати, упомянемъ еще объ одномъ способѣ приближеннаго построенія длины полуокружности. Это построеніе, довольно точное и весьма легко запоминаемое, основано на слѣдующемъ: *Величина* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *довольно близка къ архимедову числу* π, *опредѣляющему отношеніе окружности къ діаметру (или полуокружности къ радіусу).*

Дѣйствительно, вычисляя $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ при помощи таблицы логариѳмовъ, получимъ:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}14530;$$

число π дается въ таблицахъ такое: 3,14159265. Слѣдовательно рмзница между π и $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ меньше $\frac{1}{250}$.

Если же $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ близко къ π, то $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ близко къ $\frac{1}{\pi}$, потому что:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1;$$

и слѣдовательно:

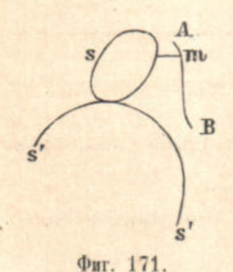
$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Говоря языкомъ геометріи, оказывается, что π *разнится отъ суммы стороны вписаннаго квадрата со стороною правильнаго вписаннаго треугольника на величину меньшую* $\frac{1}{250}$ *радіуса описаннаго круга.*

Это вытекаетъ изъ предъидущаго, потому что изъ элементарной геометріи извѣстно, что сторона вписаннаго квадрата равна $r\sqrt{2}$, а сторона вписаннаго треугольника $= r\sqrt{3}$.

Строя на (фиг. 168) циклоиду, мы взяли BA равнымъ суммѣ двухъ хордъ, изъ которыхъ одна была сторона вписаннаго квадрата, а другая сторона вписаннаго треугольника.

Этотъ способъ менѣе точенъ чѣмъ тѣ, которые даны въ геометріи Давидова, но легче запоминается и весьма удобенъ въ такихъ чертежахъ, въ которыхъ величины $r\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ уже имѣются готовыми.



Фиг. 171.

Рулетты.

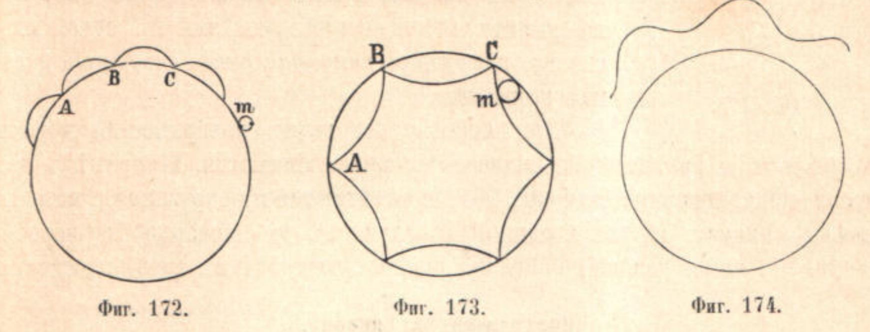
§ 231. Если кривая s (фиг. 171) катится по кривой s', то точка m, неизмѣняемо соединеннаа съ катящеюся фигурою s, описываетъ кривую AB, называемую *рулеттою*.

Циклоида есть одна изъ рулеттъ: въ ней кривая s' есть прямая, а s — кругъ.

Эпициклоиды и гипоциклоиды.

§ 232. Изъ рулеттъ наиболѣе важное значеніе имѣютъ тѣ, которыя образуются катаніемъ окружностей по окружностямъ.

Точка m, находящаяся на окружности катящейся по внѣшней сторонѣ неподвижной окружности (фиг. 172), описываетъ кривую, называемую *эпициклоидою*. Эпициклоиды бываютъ весьма раз-



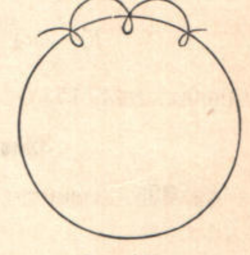
Фиг. 172. Фиг. 173. Фиг. 174.

нообразныхъ формъ, смотря по тому, какъ велико отношеніе $\frac{r}{R}$ радіуса r катящейся окружности къ радіусу R неподвижной. Эпициклоиды имѣютъ точки возврата: ABC . . .

Кривая (фиг. 173), описываемая точкою m окружности, катящейся по внутренней сторонѣ неподвижной окружности, называется *гипоциклоидою*. Существуетъ безчисленное множество различныхъ гипоциклоидъ. Гипоциклоиды имѣютъ точки возврата: A, B, C . . .

Точка, находящаяся на разстояніи отъ центра катящагося круга *меньшемъ* его радіуса, описываетъ *растянутую эпициклоиду* (фиг. 174) при внѣшнемъ и *растянутую гипоциклоиду* при внутреннемъ катаніи по неподвижной окружности.

Точка, находящаяся на разстояніи отъ центра катящагося круга большемъ его радіуса, описываетъ *сжатую эпициклоиду* (фиг. 175) при внѣшнемъ и сжатую гипоциклоиду при внутреннемъ катаніи по неподвижной окружности.


Фиг. 175.

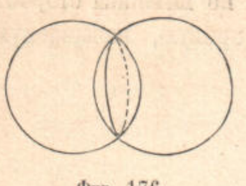
Всѣ эти кривыя, образованныя катаніемъ *окружности*, называются общимъ именемъ: *трохоиды*, которыя принадлежатъ къ числу *рулеттъ*.

Функціи многихъ перемѣнныхъ.

Кривыя двоякой кривизны.

§ 233. Перейдемъ теперь къ геометріи трехъ измѣреній. Тѣ изъ ея формулъ, которыя сходны съ соотвѣтствующими формулами геометріи

двухъ измѣреній, мы дадимъ безъ доказательствъ. Доказательства ихъ можно найти въ подробныхъ курсахъ; намъ желательно обратить главнѣйшее вниманіе не на выводы ихъ, а на результаты, изъ нихъ получаемые и характеризующіе общія свойства поверхностей и кривыхъ двоякой кривизны.



Фиг. 176.

Кривою двоякой кривизны называется всякая неплоская кривая, всякая такая кривая, которая не лежитъ всѣми своими частями въ одной плоскости; напримѣръ *винтовая линія* есть линія двоякой кривизны.

При пересѣченіи двухъ поверхностей можетъ получиться и кривая, находящаяся въ одной плоскости. Напримѣръ двѣ сферическія поверхности (фиг. 176) пересѣкаются по окружности, которая плоская кривая. Но въ большинствѣ случаевъ двѣ поверхности пересѣкаются по линіи двоякой кривизны, не находящейся въ одной плоскости.

Касательная къ кривой.

§ 234. Кривая въ пространствѣ опредѣляется (см. § 71) двумя уравненіями какъ пересѣченіе двухъ поверхностей. Пусть уравненія, выражающія такую кривую, суть:

$$\left.\begin{aligned} f\,(x, y, z) = 0 \\ \varphi\,(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (386)$$

Дифференціальное уравненіе касательной къ этой кривой таково:

$$\left.\begin{aligned} (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ (X-x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (387)$$

(Сравн. съ § 173).

Элементъ дуги кривой въ пространствѣ.

§ 235. Элементъ дуги кривой выражается формулою:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \ldots\ldots\ldots (388)$$

аналогично съ формулою (313) геометріи на плоскости.

Направленіе элемента.

§ 236. Разсматривая элементъ кривой какъ діагональ параллелепипеда, ребра котораго суть: dx, dy, dz, имѣемъ (фиг. 177):

$$\left.\begin{aligned} dx = ds\,.\,\cos\alpha \\ dy = ds\,.\,\cos\beta \\ dz = dz\,.\,\cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (389)$$

гдѣ α, β, γ суть углы наклоненія элемента къ осямъ координатъ, или, что то же самое: углы наклоненія проходящей чрезъ элементъ касательной. Изъ (389) и (388) имѣемъ:

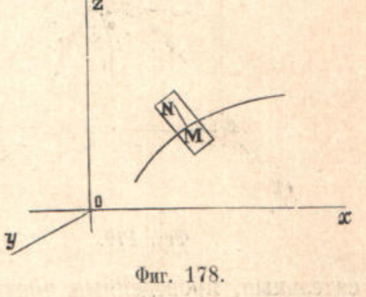
$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\ \cos\beta &= \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (390)$$

(Сравн. съ (314) и (315)).

Фиг. 177.

Плоскость нормальная къ кривой.

§ 237. Плоскость, проведенная чрезъ точку кривой перпендикулярно къ касательной, проходящей чрезъ ту же точку, называется нормальною (фиг. 178). Назовемъ чрезъ X, Y, Z координаты какой либо точки N этой плоскости и чрезъ α', β', γ' углы, составляемые прямою MN съ осями. Проложенія отрѣзка MN на оси суть:



Фиг. 178.

$$\left.\begin{aligned} X - x &= MN\,.\,\cos\alpha' \\ Y - y &= MN\,.\,\cos\beta' \\ Z - z &= MN\,.\,\cos\gamma' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (391)$$

Уголъ между касательной и MN есть прямой, и потому, согласно (130):

$$\cos\alpha\,.\,\cos\alpha' + \cos\beta\,.\,\cos\beta' + \cos\gamma\,.\,\cos\gamma' = 0.$$

Вставляя сюда косинусы изъ (389) и (391), получимъ:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{X-x}{MN} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{Y-y}{MN} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{Z-z}{MN} = 0;$$

или: $$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0. \quad . \; . \; . \; (392)$$

Это и есть уравненіе нормальной плоскости. Координаты ея точекъ суть X, Y, Z, координаты же точки M кривой суть x, y, z.

Плоскость, касательная къ поверхности.

§ 238. Поверхность, какъ мы знаемъ, опредѣляется однимъ уравненіемъ. Пусть дана поверхность:

$$f(x, y, z) = 0.$$

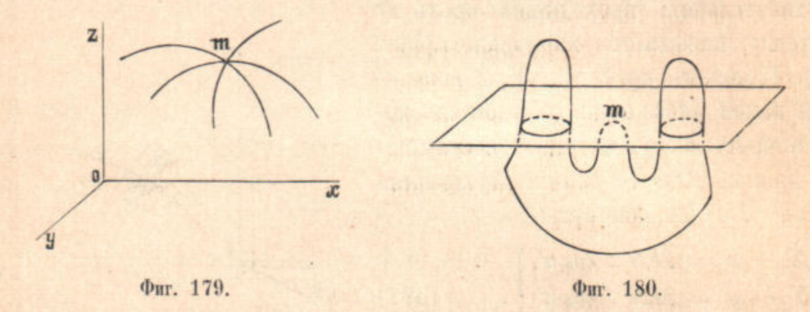
Возьмемъ на ней (фиг. 179) какую-нибудь точку m. Чрезъ эту точку будемъ проводить *по данной поверхности* всевозможныя кривыя, и къ каж-

дой изъ этихъ кривыхъ проведемъ чрезъ m касательныя (не изображенныя на фиг. 179). Докажемъ, что всѣ такія касательныя лежатъ въ одной плоскости. Пусть $\varphi(x, y, z)=0$ есть уравненіе поверхности, пересѣченіе которой съ $f(x, y, z)=0$ даетъ одну изъ проведенныхъ нами кривыхъ. По (387) уравненія касательной, проведенной къ этой кривой чрезъ m, будутъ:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \; (393)$$

$$(X-x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0. \quad . \quad . \quad . \; (394)$$

Касательная представляетъ собою пересѣченіе плоскости (393) съ плоскостью (394); какъ бы ни мѣнялось $\varphi(x, y, z)$, плоскость (393) всегда проходитъ, слѣдовательно, чрезъ касательную. Переходя отъ одной кривой (фиг. 179) къ другой, мѣняемъ именно $\varphi(x, y, z)$. Слѣдовательно, всѣ касательныя, проведенныя чрезъ m къ кривымъ, проходящимъ чрезъ m по поверхности $f(x, y, z)=0$, лежатъ въ одной плоскости:



Фиг. 179. Фиг. 180.

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0. \quad . \quad . \quad . \; (393)$$

Что и требовалось доказать. Такая плоскость называется *плоскостью касательною* къ поверхности въ точкѣ (x, y, z).

Итакъ, *касательная къ поверхности плоскость есть геометрическое мѣсто касательныхъ, проведенныхъ чрезъ данную точку поверхности къ различнымъ кривымъ, лежащимъ на данной поверхности и проходящимъ чрезъ эту точку.* Уравненіе касательной плоскости, проходящей чрезъ точку (x, y, z) поверхности $f(x, y, z)=0$, есть уравненіе (393).

Касательную плоскость нельзя опредѣлять какъ плоскость, имѣющую только одну точку общую съ поверхностью: можетъ встрѣтиться такая поверхность, въ которой плоскость, касающаяся съ нею въ одной точкѣ m (фиг. 180), имѣетъ съ нею еще множество другихъ общихъ точекъ и даже общихъ линій. Поэтому мы переходимъ къ понятію о касательной плоскости отъ весьма ясно установленнаго (§ 117) понятія касательной прямой. Но нельзя признать очевиднымъ положеніе, что геометрическое мѣсто

касательныхъ, проведенныхъ чрезъ данную точку поверхности къ кривымъ, проходящимъ чрезъ эту точку и лежащимъ на данной поверхности, есть плоскость. Это положеніе надо было доказать.

Нормаль поверхности.

§ 239. Перпендикуляръ, возставленный къ касательной плоскости изъ точки касанія, называется *нормалью*. Можно сказать, что нормаль есть перпендикуляръ къ элементу поверхности, если представлять себѣ поверхность въ видѣ многогранника съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ граней и каждую такую грань называть элементомъ поверхности.

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями координатъ.

§ 240. По (137) перпендикуляръ, опущенный изъ начала на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ выражаются такъ:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Въ уравненіи (393) касательной плоскости коэффиціенты A, B, C при X, Y, Z суть: $\frac{\partial f}{dx}$, $\frac{\partial f}{dy}$, $\frac{\partial f}{dz}$. Слѣдовательно, косинусы угловъ (N, x), (N, y), (N, z), составляемыхъ нормалью съ осями (такое обозначеніе угловъ очень удобно: уголъ между прямою N и x обозначается скобкою (N, x)), будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(N, x) &= \frac{\frac{\partial f}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2}} \\
\cos(N, y) &= \frac{\frac{\partial f}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2}} \\
\cos(N, z) &= \frac{\frac{\partial f}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (395)$$

Это очень важная, по своему частому примѣненію, формула.

Уравненіе нормали.

§ 241. По формулѣ (157) уравненіе нормали, проходящей чрезъ точку (x, y, z) поверхности, будетъ:

$$\frac{X - x}{\cos(N, x)} = \frac{Y - y}{\cos(N, y)} = \frac{Z - z}{\cos(N, z)}.$$

Вставляя сюда вмѣсто косинусовъ ихъ величины изъ (395), получимъ:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad \ldots \ldots \ldots (396)$$

величина $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ сократится. Это уравненіе (396) и есть уравненіе нормали, проходящей чрезъ точку (x, y, z) поверхности

$$f(x, y, z) = 0.$$

Плоскость соприкосновенія.

§ 242. Возьмемъ (фиг. 181) какую-нибудь кривую двоякой кривизны. Для ясности чертежа положимъ, что она начерчена на цилиндрѣ, но разсужденія наши будутъ относиться ко всякимъ кривымъ, хотя бы они и не укладывались на цилиндръ. Разсмотримъ на этой кривой точку M и другія двѣ точки M' и M''. Три точки $M'MM''$, какъ извѣстно изъ элементарной геометріи, опредѣляютъ вполнѣ нѣкоторую проходящую чрезъ нихъ плоскость. Положимъ (фиг. 181), что $M'M''nm$ есть такая плоскость. Будемъ приближать точки M' и M'' къ точкѣ M. Плоскость $M'M''nm$ будетъ при этомъ перемѣщаться и когда точки M' и M'' сольются съ точкою M, то плоскость $M'M''nm$ придетъ въ предѣльное положеніе. Такая плоскость, проходящая чрезъ три безконечно-близкія точки $M'M''$ и M кривой, называется *плоскостью соприкосновенія* или *соприкасающеюся плоскостью* кривой въ ея точкѣ M.



Фиг. 181.

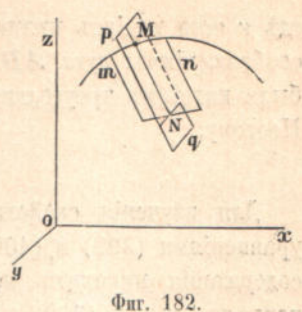
Мы даемъ здѣсь уравненіе плоскости соприкосновенія не выводя его и отсылаемъ желающихъ познакомиться съ его выводомъ къ подробнымъ курсамъ дифференціальнаго исчисленія. Уравненіе это таково:

$$(dy \,.\, d^2z - dz \,.\, d^2y)(X - x) + (dz \,.\, d^2x - dx \,.\, d^2z)(Y - y)$$
$$+ (dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2z)(Z - z) = 0. \quad \ldots \ldots (397)$$

Радіусъ кривизны.

§ 243. Кривизна и радіусъ кривизны пространственныхъ кривыхъ имѣютъ такое же геометрическое значеніе, какъ и для плоскихъ кривыхъ. Окружность опредѣляется тремя точками (чрезъ данныя три точки можно про-

вести только одну окружность) и плоскость соприкосновенія опредѣляется тремя безконечно-близкими точками. Отсюда уже можно видѣть, что центръ кривизны долженъ лежать въ плоскости соприкосновенія.



Фиг. 182.

Всѣ прямыя, проведенныя чрезъ точку M кривой (фиг. 182) въ нормальной плоскости pq, называются нормалями кривой въ этой точкѣ. Но изъ нихъ только одна MN лежитъ въ то же время и въ плоскости соприкосновенія mn. Нормаль MN, лежащая въ плоскости соприкосновенія, называется *главною нормалью* въ точкѣ M.

Очевидно, что центръ кривизны лежитъ на главной нормали. Радіусъ кривизны выражается формулою:

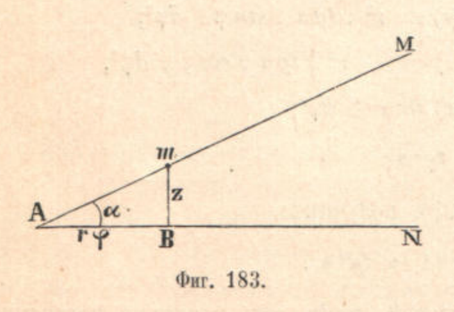
$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy \,.\, d^2z - dz \,.\, d^2y)^2 + (dz \,.\, d^2x - dx \,.\, d^2z)^2 + (dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x)^2}}.$$

(Доказательство см. въ подробныхъ курсахъ).

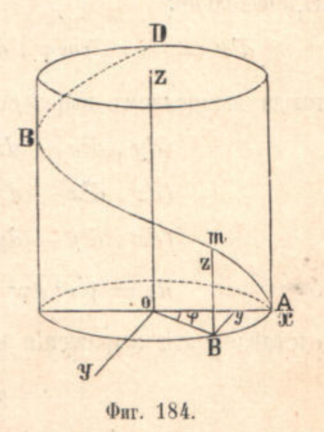
Винтовая линія.

§ 244. Какъ примѣръ линій двоякой кривизны возьмемъ винтовую линію. Прежде опредѣлимъ точнѣе, что называется винтовою линіею.

Если на плоскости возьмемъ произвольный уголъ (фиг. 183) и будемъ навивать эту плоскость на круглый прямой цилиндръ (фиг. 184) такъ, чтобы одна сторона угла расположилась по окружности основанія цилиндра. *Линія $AMBD$, по которой завьется при этомъ другая сторона угла, называется*



Фиг. 183.



Фиг. 184.

винтовою. Выведемъ ея уравненія. Примемъ за ось z ось цилиндра, за ось x радіусъ его основанія, проходящій въ вершину A наложеннаго на цилиндръ угла. Координаты какой-нибудь точки m винтовой линіи будутъ выражаться чрезъ уголъ φ, составляемый съ осью x радіусомъ цилиндра, проведеннымъ изъ начала къ образующей, проходящей чрезъ m, слѣдую-

щимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,.\,cos\,\varphi \\ y &= r\,.\,sin\,\varphi \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (399)$$

гдѣ r есть радіусъ цилиндра. Координата z опредѣлится по слѣдующимъ соображеніямъ: дуга $AB = r\varphi$; до навертыванія угла α на цилиндръ она была катетомъ треугольника ABm, въ которомъ другой катетъ равенъ z. Поэтому:

$$z = r\,.\,\varphi\,.\,tg\,\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (400)$$

Для изученія свойствъ винтовой линіи можно пользоваться и этими уравненіями (399) и (400); но собственно уравненія винтовой линіи, несодержащія никакихъ перемѣнныхъ, кромѣ (x, y, z), можно получить, исключая φ изъ (399) и (400). Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,.\,cos\left(\frac{z}{r\,.\,tg\,\alpha}\right) \\ y &= r\,.\,sin\left(\frac{z}{r\,.\,tg\,\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (401)$$

Разстояніе двухъ послѣдовательныхъ точекъ пересѣченія винтовой линіи съ одною и тою же образующей основного цилиндра называется *шагомъ* винта.

По формуламъ (399) и (400) вычисляемъ:

$$dx = -r\,.\,sin\,\varphi\,.\,d\varphi;\; dy = r\,.\,cos\,\varphi\,.\,d\varphi;\; dz = r\,.\,tg\,\alpha\,.\,d\varphi.$$

Слѣдовательно:

$$d^2x = -r\,.\,cos\,\varphi\,.\,d\varphi^2;\; d^2y = -r\,.\,sin\,\varphi\,.\,d\varphi^2;\; d^2z = 0.$$

Отсюда вычисляемъ выраженія:

$$(dy\,.\,d^2z - dz\,.\,d^2y) = r^2\,.\,tg\,\alpha\,.\,sin\,\varphi\,.\,d\varphi^3;$$

$$(dz\,.\,d^2x - dx\,.\,d^2z) = -r^2\,.\,tg\,\alpha\,.\,cos\,\varphi\,.\,d\varphi^3;$$

$$(dx\,.\,d^2y - dy\,.\,d^2z) = r^2\,.\,d\varphi^3;$$

$$ds = \sqrt{r^2\,d\varphi^2\,(1 + tg^2\,\alpha)}.$$

Подставляя эти выраженія въ (398), получимъ:

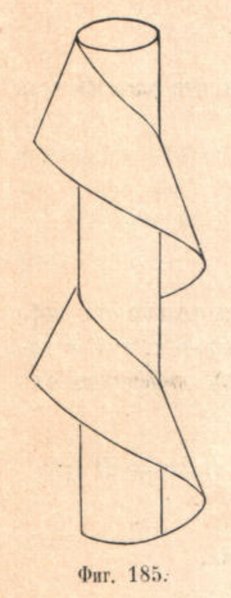
$$\rho = r\,(1 + tg^2\,\alpha).$$

Итакъ, радіусъ кривизны винтовой линіи есть величина постоянная: онъ одинаковъ для всѣхъ точекъ винтовой линіи.

Изъ выведенныхъ для винтовой линіи формулъ видимъ, что для нея:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\,\alpha}} = sin\,\alpha.$$

Но по (389) слѣдуетъ, что $\frac{dz}{ds} = cos\,\gamma =$ косинусу угла, составляемаго касательною (элементомъ кривой) съ осью z. Итакъ: $cos\,\gamma = sin\,\alpha$; значитъ касательная составляетъ съ образующими цилиндра уголъ дополнительный до 90° къ α. Съ плоскостью основанія цилиндра она, слѣдовательно, составляетъ постоянный уголъ α.



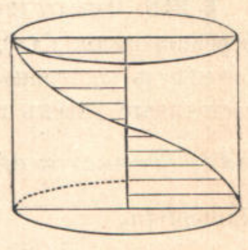
Фиг. 185.

Развертывающаяся винтовая поверхность.

§ 245. Знакомство съ винтовою линіею даетъ намъ возможность разсмотрѣть двѣ весьма интересныя поверхностя. Одна изъ нихъ есть такъ называемая *винтовая развертывающаяся поверхность*, представляющая собою геометрическое мѣсто всѣхъ касательныхъ къ винтовой линіи (фиг. 224 и 225). Съ этою поверхностью намъ придется скоро опять встрѣтиться.

Косая винтовая поверхность.

§ 246. Другая поверхность представляетъ собою геометрическое мѣсто прямыхъ, проведенныхъ изъ различныхъ точекъ винтовой линіи подъ однимъ и тѣмъ же угломъ къ оси цилиндра (фиг. 185), или перпендикулярно оси (фиг. 186). По поверхности (фиг. 186) располагаются, напримѣръ, ребра ступенекъ винтовой лѣстницы.



Фиг. 186.

ГЛАВА II.

Интегральное исчисленіе.

Понятіе объ интегралѣ.

§ 247. Дѣйствіе обратное дифференцированію называется *интегрированіемъ*. Дифференцировать функцію $f\,(x)$, значитъ найти ея дифференціалъ $f'\,(x)\,dx$. Напримѣръ: дифференцируя $sin\,x$, находимъ $cos\,x\,.\,dx$ (см. § 133). *Интегрировать дифференціалъ* $\varphi'(x)\,dx$ *значитъ найти такую функцію, дифференціалъ которой былъ бы равенъ* $\varphi'(x)\,dx$.

Интегрированіе обозначается знакомъ $\int$. Формула $\int \varphi\,(x)\,dx$ произносится такъ: интегралъ отъ $\varphi\,(x)\,dx$.

Дифференцируютъ функціи и получаютъ дифференціалы вида: $\varphi\,(x)\,dx$ (см. § 125). Интегрируютъ дифференціалы вида $\varphi\,(x)\,dx$, и получаютъ функціи.

Примѣръ 1-ый. Требуется найти интегралъ отъ $mx^{m-1}\,dx$. Мы знаемъ, что данный дифференціалъ произошелъ отъ дифференцированія функціи x^m (см. (217)). Слѣдовательно, искомый интегралъ есть x^m. Пишется это такъ:

$$\int mx^{m-1}\,dx = x^m,$$

произносится такъ: интегралъ отъ $mx^{m-1}\,dx$ равенъ x^m.

Примѣръ 2-ой. Найти $\int \cos x\,.\,dx$. Мы знаемъ (220), что $\cos x\,dx$ есть дифференціалъ отъ $\sin x$. Слѣдовательно:

$$\int \cos x\,.\,dx = \sin x.$$

Постоянныя интеграціи.

§ 248. Однако дифференціалъ $f'(x)\,dx$ получается не только отъ дифференцированія $f(x)$, но и при дифференцированіи $f(x)+c$, гдѣ c какое-нибудь постоянное. Дѣйствительно, по формулѣ (214), дифференціалъ постояннаго равенъ нулю; слѣдовательно:

$$d\,(f(x)+c) = df(x) + dc = f'(x)\,dx + 0 = f'(x)\,dx = df(x).$$

Напримѣръ:

$$d\,(x^2) = 2x\,dx; \text{ но и } d\,(x^2+3) = 2x\,dx,$$

и вообще:

$$d\,(x^2+c) = 2x\,dx,$$

какое бы ни было постоянное c.

Поэтому, для того чтобы имѣть въ виду всѣ рѣшенія вопроса, нужно при интегрированіи прибавлять еще произвольное постоянное и писать:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c \quad \text{. . . . . (402)}$$

Такъ въ примѣрахъ предъидущаго параграфа правильнѣе было бы написать:

$$\int mx^{m-1}\,dx = x^m + c; \quad \int \cos x\,.\,dx = \sin x + c.$$

Эти произвольныя постоянныя, которыя слѣдуетъ прибавлять при интегрированіи, называются *постоянными интеграціи*. Онѣ вносятъ нѣкоторую неопредѣленность.

Неопредѣленный интегралъ.

§ 249. Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ такое опредѣленіе:

Неопредѣленнымъ интеграломъ $\int \varphi(x)\,dx = F(x) + c$ *называется такая функція* $F(x)+c$, *дифференціалъ которой равенъ дифференціалу* $\varphi(x)\,dx$, *стоящему подъ знакомъ интеграла.*

Интегралъ какъ сумма безконечно-большаго числа безконечно-малыхъ величинъ.

§ 250. Положимъ, что та функція, дифференціалъ которой равенъ $\varphi(x)\,dx$, есть нѣкоторая $F(x)$, такъ что:

$$\int \varphi(x)\,dx = F(x) + c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (403)$$

Будемъ измѣнять x отъ $x = a$ до $x = b$, гдѣ a и b суть нѣкоторыя постоянныя величины. $F(x)$ измѣнится при этомъ и изъ $F(a)$ обратится въ $F(b)$, такъ что измѣнится на величину $F(b) - F(a)$.

Продѣлаемъ это измѣненіе постепенно и припомнимъ, что на основаніи формулы:

$$\Delta y = f'(x)\,.\,\Delta x + \varepsilon\,.\,\Delta x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (206)$$

и пренебрегая безконечно-малою величиною $\varepsilon\,.\,\Delta x$ втораго порядка, можно сказать, что: съ приращеніемъ независимаго перемѣннаго икса на Δx, функція $f(x)$ приращается на дифференціалъ $f'(x)\,dx$. Въ разсматриваемомъ измѣненіи функціи $F(x)$: съ приращеніемъ икса на dx, функція $F(x)$ приращается на дифференціалъ $\varphi(x)\,dx$. Слѣдовательно: приращая x на dx, измѣнимъ $F(a)$ въ $F(a) + \varphi(\alpha)\,dx$; приращая x еще на dx, получимъ:

$$F(a) + \varphi(\alpha)\,dx + \varphi(\alpha + dx)\,dx;$$

приращая x еще на dx, получимъ:

$$F(a) + \varphi(\alpha)\,dx + \varphi(\alpha + dx)\,dx + \varphi(\alpha + 2dx)\,dx;$$

поступая далѣе такимъ образомъ, измѣнимъ $F(a)$ на столько, что она приметъ величину $F(b)$, когда x получитъ столько приращеній, что сумма ихъ возрастетъ до величины $b - a$. Тогда получимъ:

$$F(a) + \varphi(\alpha)\,dx + \varphi(\alpha + dx)\,dx + \varphi(\alpha + 2dx)\,dx + \ldots$$
$$+ \varphi(\alpha + n\,.\,dx)\,dx = F(b),$$

откуда:

$$F(b) - F(a) = \varphi(\alpha)\,dx + \varphi(\alpha + dx)\,dx + \varphi(\alpha + 2dx)\,dx + \ldots$$
$$+ \varphi(\alpha + n\,.\,dx)\,dx, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (404)$$

гдѣ число n очень велико.

Оставимъ предѣлъ, до котораго доводимъ x перемѣннымъ, обозначая его просто чрезъ x; тогда вмѣсто (404), получимъ:

$$F(x) - F(a) = \varphi(\alpha)\,dx + \varphi(\alpha + dx)\,dx + \varphi(\alpha + 2dx)\,dx + \ldots$$
$$+ \varphi(\alpha + k\,.\,dx)\,.\,dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (405)$$

Но дифференцируя лѣвую часть (405)-го, получимъ (согласно сдѣлан-

ному въ началѣ нашего разсужденія условію) $\varphi(x)\,dx$; слѣдовательно:

$$F(x) - F(a) = \int \varphi(x)\,dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (406)$$

Сравнивая съ (403) видимъ, что $c = -F(a)$. Главный же результатъ тотъ, что изъ (405) и (406) слѣдуетъ:

$$\int \varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\,dx + \varphi(\alpha + dx)\,dx + \varphi(\alpha + 2\,dx)\,dx + \ldots$$
$$+ \varphi(\alpha + k\,.\,dx)\,dx = F(x) - F(a) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (407)$$

Это значитъ, что *интегралъ можно разсматривать какъ сумму безконечно-большого числа безконечно-малыхъ членовъ.*

Опредѣленный интегралъ.

§ 251. Если сдѣлаемъ въ формулѣ (407) предѣлъ, до котораго измѣняемъ x, постояннымъ, равнымъ b, то получимъ вполнѣ опредѣленную постоянную величину $F(b) - F(a)$, называемую *опредѣленнымъ интеграломъ*, взятымъ въ предѣлахъ отъ a до b и обозначаемымъ такъ $\int\limits_a^b =$ интегралъ отъ a до b. Такъ что:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a) = \varphi(a)\,dx + \varphi(a + dx)\,dx$$
$$+ \varphi(a + 2dx)\,dx + \ldots + \varphi(a + n\,dx)\,dx. \; . \; . \; . \quad (408)$$

Изъ этой формулы видно слѣдующее: *чтобы получить опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ отъ a до b изъ неопредѣленнаго $F(x) + c$, надо въ неопредѣленномъ интегралѣ $F(x) + c$ замѣнить сначала x чрезъ b, потомъ въ немъ же замѣнить x чрезъ a и второй результатъ вычесть изъ перваго.*

Примѣръ 1-ый. Мы видѣли, что $\int x^{m-1}\,dx = x^m + c$. Слѣдовательно:

$$\int\limits_a^b x^{m-1}\,dx = b^m - a^m.$$

Примѣръ 2-ой. Мы видѣли, что $\int \cos x\,dx = \sin x + c$. Слѣдовательно:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Примѣръ 3-ій. Изъ формулы (246) слѣдуетъ, что $\int \frac{dx}{x} = lg\,x + c.$

Слѣдовательно:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = lg\, b - lg\, a = lg\, \frac{b}{a}$$

(послѣдній переходъ здѣсь сдѣланъ по правиламъ элементарной алгебры).

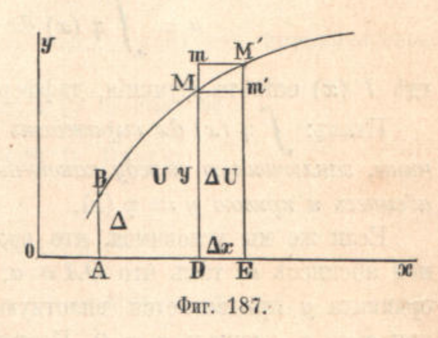
Теперь пояснимъ все сказанное объ интегралахъ геометрическими образами, но предварительно познакомимся съ дифференціаломъ площади.

Дифференціалъ площади.

§ 252. Положимъ, что намъ дана кривая (фиг. 187) уравненіемъ

$$y = \varphi(x).$$

Изслѣдуемъ величину площади $ABMD$, заключенной между ординатою AB кривою BM, ординатою MD и осью абсциссъ. Ординату DM обозначимъ чрезъ y и соотвѣтствующую ей абсциссу OD чрезъ x. Самую площадь $ABMD$ обозначимъ чрезъ u. Съ измѣненіемъ x измѣняется и величина площади u: когда x получаетъ приращеніе Δx, площадь u получаетъ приращеніе Δu, равное $DEM'M$; ордината же получаетъ приращеніе Δy; такъ что: $EM' = y + \Delta y$. Продолжимъ ординату DM и проведемъ чрезъ M и M' параллели къ оси x. Сравнимъ площадь Δu съ площадями прямоугольниковъ $DMm'E$ и $DmM'E$. Изъ чертежа видимъ, что:



Фиг. 187.

$$DMm'E = y\Delta x; \quad DMM'E = \Delta u; \quad DmM'E = (y + \Delta y)\, \Delta x.$$

Площадь Δu больше одного и меньше другого изъ прямоугольниковъ, такъ что:

$$(y + \Delta y)\, \Delta x > \Delta u > y \,.\, \Delta x \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (409)$$

Дѣля члены этого равенства на Δx, получимъ:

$$y + \Delta y > \frac{\Delta u}{\Delta x} > y \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (410)$$

Переходя къ предѣлу, при уменьшеніи Δx до нуля, видимъ, что величины, между которыми заключено $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, обѣ дѣлаются равными y. Слѣдовательно:

$$\frac{du}{dx} = y \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (411)$$

или: *производная отъ площади по абсциссѣ равна крайней ординатѣ.*

Изъ (411) слѣдуетъ:

$$du = y \,.\, dx \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (412)$$

Подставляя сюда величину $\varphi(x)$ вмѣсто y, согласно уравненію кривой $y = \varphi(x)$, получимъ:

$$du = \varphi(x)\,dx.$$

Итакъ: *дифференціалъ вида* $\varphi(x)\,dx$ *есть дифференціалъ площади кривой* $y = \varphi(x)$, при чемъ площадь эта ограничена двумя ординатами, осью абсциссъ и кривою.

Интегралъ какъ площадь.

§ 253. Интегрируя обѣ части равенства: $du = \varphi(x)\,dx$, получимъ:

$$\int du = \int \varphi(x)\,dx + C.$$

Здѣсь въ лѣвой части знаки дифференціала и интеграла взаимно уничтожаются, и остается:

$$u = \int \varphi(x)\,dx + C = F(x) + C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (413)$$

гдѣ $F(x)$ есть та функція, дифференціалъ которой равенъ $\varphi(x)\,dx$.

Итакъ: $\int \varphi(x)\,dx$ *выражаетъ собою площадь неопредѣленной величины, заключенную между какою-то ординатою* AB *и ординатою* y, *осью абсциссъ и кривою* $y = \varphi(x)$.

Если же мы условимся, что ордината AB соотвѣтствуетъ опредѣленной абсциссѣ a, такъ что $OA = a$, то разсуждать можно такъ: при $x = a$ ордината y придвигается вплотную къ ординатѣ AB, вслѣдствіе чего: при $x = a$, площадь $u = 0$. Поэтому изъ (413) получимъ:

$$o = F(a) + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (414)$$

откуда: $c = -F(a)$. Вставляя эту величину въ (413), получимъ:

$$u = \int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x) - F(a) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (415)$$

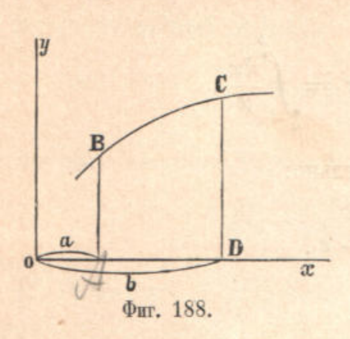
Здѣсь площадь u есть величина перемѣнная, потому что еще не дано постоянное значеніе иксу: ордината y еще подвижна.

Полагая въ (415) формулѣ $x = b$ получимъ:

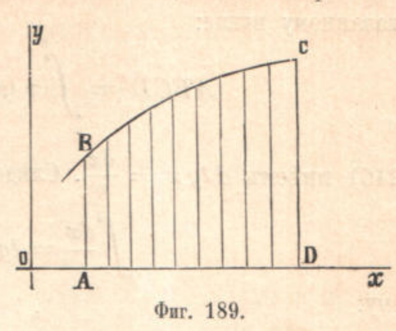
$$u = \int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (416)$$

Площадь, выраженная этимъ *опредѣленнымъ* интеграломъ, есть уже величина постоянная (если a и b — постоянныя) — это площадь $ABCD$ (фиг. 188) кривой, взятая между опредѣленными ординатами — ординатою AB, соотвѣтствующею $x = a$, и ординатою DC, соотвѣтствующею $x = b$.

Раздѣлимъ отрѣзокъ AD на безконечно большое число безконечно малыхъ частей, изъ коихъ каждая равнялась бы dx, и проведемъ (фиг. 189) чрезъ точки дѣленія ординаты. Площадь $ABCD$ окажется разбитою на тонкія полоски. Каждая такая полоска отличается весьма мало отъ прямоугольника, составленнаго изъ ея основанія и одной изъ ограничивающихъ ее ординатъ, такъ что площади полосокъ будутъ приблизительно равны:



Фиг. 188.



Фиг. 189.

$$\varphi(a)\, dx;\ \varphi(a + dx)\, dx;\ \varphi(a + 2dx)\, dx \dots$$

Складывая ихъ, получимъ площадь $ABCD$. Итакъ:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \varphi(a) \cdot dx + \varphi(a + dx) \cdot dx$$
$$+ \varphi(a + 2dx)\, dx + \dots = F(b) - F(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (417)$$

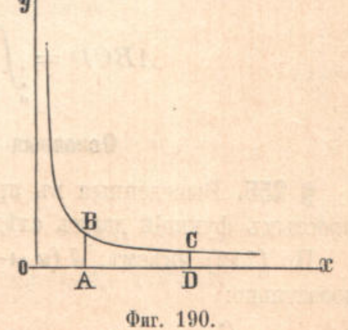
Пренебречь разностью между площадью полоски и площадью соотвѣтствующаго ей прямоугольника это все равно, что пренебречь безконечно малою величиною второго порядка $\varepsilon \cdot \Delta x$ въ уравненіи:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (206)$$

Но по теоремѣ § 124-го такое пренебреженіе не влечетъ за собой ни малѣйшей ошибки при вычисленіи предѣла суммы, и потому интегралъ

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

совершенно точно выражается суммою стоящею въ (417); площадь же $ABCD$ совершенно точно выражается этимъ интеграломъ.



Фиг. 190.

Примѣръ. Опредѣлить площадь $ABCD$ (фиг. 190), заключенную между дугою гиперболы $xy = 1$, отнесенной къ ассимптотамъ (см. § 60 фор. 96), осью

абсциссъ, ординатою AB, взятою при $x = a$, и ординатою DC, взятою при $x = b$.

Изъ $xy = 1$ имѣемъ:

$$y\,dx = \frac{dx}{x} = \varphi(x)\,dx\,.$$

По сказанному выше:

$$ABCD = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{dx}{x}\,.$$

По (246) имѣемъ $d\,lg\,x = \frac{dx}{x}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{x} = lg\,x + c\,.$$

Поэтому:

$$ABCD = \int_a^b \frac{dx}{x} = lg\,b - lg\,a.$$

Знакъ подстановки.

§ 254. Для насъ весьма удобенъ будетъ знакъ подстановки $[F(x)]_a^b$, который обозначаетъ, что надо взять разность отъ результата $F(b)$, подстановки въ $F(x)$ величины b вмѣсто x и результата, $F(a)$, подстановки въ $F(x)$ величины a вмѣсто x. Такъ что:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (418)$$

Пользуясь этимъ обозначеніемъ, можно написать:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Въ примѣрѣ предъидущаго параграфа мы могли бы написать:

$$ABCD = \int_a^b \frac{dx}{x} = [lgx]_a^b = lg\,b - lg\,a.$$

Основныя формулы интегрированія.

§ 255. Выведенныя въ предъидущей главѣ формулы дифференціаловъ простыхъ функцій даютъ слѣдующія формулы интеграловъ.

По (212) имѣемъ: $d(u + v + w + \ldots) = du + dv + dw \ldots$ Слѣдовательно:

$$\int [du + dv + dw + \ldots] = u + v + w + \ldots + c\; . \; . \quad (419)$$

или

$$\int [\varphi(x) + f(x) + F(x) + \ldots] \, dx = \int \varphi(x) \, dx + \int f(x) \, dx$$
$$+ \int F(x) \, dx + \ldots \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (420)$$

По (215) имѣемъ $d(ax) = a \, dx$. Слѣдовательно:

$$\int a \, dx = ax = a \int dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (421)$$

постоянный множитель можно выносить за знакъ интеграла, такъ что:

$$\int a \, . \, \varphi(x) \, dx = a \int \varphi(x) \, dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (422)$$

По (217) имѣемъ $d(x^n) = nx^{n-1} \, dx$. Называя $n - 1$ чрезъ m, то есть, полагая $n - 1 = m$, должны получить $n = m + 1$. По этому:

$$d(x^{m+1}) = (m + 1) \, x^m \, dx.$$

Слѣдовательно:

$$\int (m + 1) \, x^m \, dx = x^{m+1}, \text{ или: } (m + 1) \int x^m \, dx = x^{m+1},$$

откуда:

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (423)$$

По (246) имѣемъ: $d(lg\,x) = \frac{dx}{x}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{x} = lg\,x + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (424)$$

По (247) имѣемъ: $d(a^x) = a^x \, . \, lg\,a \, . \, dx$. Слѣдовательно:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{lg\,a} + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (425)$$

По (248) имѣемъ: $d(e^x) = e^x \, dx$. Слѣдовательно:

$$\int e^x \, dx = e^x + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (426)$$

По (220) имѣемъ: $d(\sin x) = \cos x \, dx$. Слѣдовательно:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (427)$$

По (221) имѣемъ: $d(\cos x) = - \sin x \, . \, dx$. Слѣдовательно:

$$\int \sin x \, . \, dx = - \cos x + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (428)$$

По (223) имѣемъ: $d\,(tg\,x) = \frac{dx}{cos^2\,x}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{cos^2\,x} = tg\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (429)$$

По (226) имѣемъ: $d\,(ar\,sin\,x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ar\,sin\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (430)$$

По (228) имѣемъ: $d\,(arccos\,x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,arccos\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (431)$$

По (230) имѣемъ: $d\,(artg\,x) = \frac{dx}{1+x^2}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = artg\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (432)$$

Выписываемъ эти весьма важныя формулы отдѣльно:

$$\int a\,.\,\varphi(x)\,.\,dx = a\int \varphi(x)\,dx + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (422)$$

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (423)$$

$$\int \frac{dx}{x} = lg\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (424)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (426)$$

$$\int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (428)$$

$$\int cos\,x\,.\,dx = sin\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (427)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2\,x} = tg\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (429)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arsin\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (430)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,arccos\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (431)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = artg\,x + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (432)$$

Формула (423) не годится для $m = -1$, потому что она выведена изъ $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$, полагая въ немъ $n - 1 = m$. Если $m = -1$, то вышло бы: $n - 1 = -1$, откуда $n = 0$, но $d(x^0) = d(1) = 0$, и отсюда нельзя перейти къ $\int$. Въ случаѣ $m = -1$ вмѣсто формулы (423) дѣйствуетъ формула (424), потому что:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = lg\,x + c\,.$$

Формулы (422)—(432) надо знать наизусть.

Интегрированіе по частямъ.

§ 256. Мы еще не использовали для вывода интегральныхъ формулъ дифференціальную формулу (216):

$$d\,(uv) = u\,.\,dv + v\,.\,du \quad \ldots\ldots\ldots \quad (216)$$

потому что она не даетъ окончательнаго интеграла. Но, при ея помощи, можно преобразовать данный интегралъ, и въ нѣкоторыхъ случаяхъ такое преобразованіе облегчаетъ дальнѣйшій ходъ интегрированія. Познакомимся съ этимъ преобразованіемъ, называемымъ *интегрированіемъ по частямъ*.

Изъ (216) слѣдуетъ: $u\,dv = d\,(uv) - v\,du$. Откуда:

$$\int u\,.\,dv = u\,.\,v - \int v\,.\,du \quad \ldots\ldots\ldots \quad (433)$$

Приложимъ эту формулу къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

Примѣръ 1-ый. Вычислить $\int x\,.\,cos\,x\,.\,dx$.

Полагаемъ:

$$x = u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (434)$$

$$cos\,x\,dx = dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (435)$$

Дифференцируя (434) и интегрируя по (427) равенство (435) получимъ:

$$du = dx$$

$$v = sin\,x.$$

Вставляя эти величины u, dv, du, v въ (433), получимъ:

$$\int x\,.\,cos\,x\,dx = x\,.\,sin\,x - \int sin\,x\,.\,dx.$$

Но по (428) имѣемъ $\int sin\,x\,dx = -cos\,x$. Слѣдовательно:

$$\int x\,.\,cos\,x\,.\,dx = x\,.\,sin\,x + cos\,x + c\,.$$

Примѣръ 2-ой. Вычислить $\int x^2\,.\,cos\,x\,.\,dx$.

Полагаемъ $x^2 = u$; $cos\,x\,dx = v$. Дифференцируя 1-ое изъ этихъ ра-

венствъ и интегрируя 2-ое, получимъ: $2x\,dx = du$; $\sin x = v$. Слѣдовательно (433):

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \,.\, \sin x - 2\int x \sin x\,dx\,.$$

Полагая опять въ послѣднемъ интегралѣ $x = u$; $\sin x\,dx = dv$ получаемъ: $dx = du$; $v = -\cos x$. Поэтому:

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x\,.$$

Подставляя въ (436), получимъ:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c\,.$$

Примѣръ 3-ій. Вычислить $\int xe^x\,dx$.

Полагаемъ $x = u$; $e^x\,dx = dv$, откуда: $dx = du$; $v = e^x$. Слѣдовательно по (433):

$$\int xe^x\,dx = x\,.\,e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c\,.$$

Примѣръ 4-ый. Вычислить $\int lg\,x\,dx$.

Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int lg\,x\,.\,dx = x\,.\,lg\,x - \int x\frac{dx}{x} = x\,lg\,x - x = x\,(lg\,x - 1) + c\,.$$

Интегрированіе подстановкою.

§ 257. Многіе интегралы вычисляются при помощи *подстановки*, заключающейся въ замѣнѣ независимаго перемѣннаго. Покажемъ употребленіе этого способа на примѣрахъ.

Примѣръ 1-ый. $\int (ax+b)^m\,dx$. Положимъ: $ax + b = z$. Этимъ положеніемъ мы и вводимъ, вмѣсто x новое перемѣнное z. Но намъ нужно будетъ все подъинтегральное выраженіе выразить чрезъ z, такъ чтобы отъ x ничего въ немъ не оставалось. Слѣдовательно нужно узнать какъ выражается dx чрезъ z и dz. Для этого дифференцируемъ то равенство $ax + b = z$, существованіе котораго предположили. Получаемъ $a\,dx = dz$, откуда $dx = \frac{dz}{a}$. Вставляя въ данный интегралъ, вмѣсто $ax + b$, перемѣнное z, вмѣсто dx-величину $\frac{dz}{a}$, получимъ:

$$\int (ax+b)^m\,dx = \int z^m \frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int z^m\,dz.$$

Послѣдній интегралъ беремъ по формулѣ (423). Получимъ:

$$\int (ax+b)^m\,dx = \frac{z^{m+1}}{a\,(m+1)} + c\,.$$

Остается опять вернуться къ перемѣнному x посредствомъ предположеннаго равенства $ax + b = z$, и выведеннаго равенства $dz = a\,dx$. Получимъ:

$$\int (ax + b)^m\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax + b)^{m+1}}{m + 1} + c\,. \quad . \quad . \quad . \qquad (437)$$

Успѣхъ зависитъ отъ удачнаго выбора подстановки. Въ этомъ примѣрѣ формула (423) подсказываетъ удобство подстановки $ax + b = z$.

Примѣръ 2-ой. $\int \frac{ax^3\,dx}{bx^4 + c}$. Здѣсь числитель только постоянными величинами отличается отъ дифференціала $4bx^3\,dx$ знаменателя. Это обстоятельство въ соединеніи съ формулою (424) подсказываетъ, что хорошо было бы принять весь знаменатель за новое перемѣнное z. Повидимому удобна будетъ подстановка $bx^4 + c = z$, откуда $4bx^3\,dx = dz$, слѣдовательно стоящая въ числителѣ величина $ax^3\,dx$ равна $\frac{adz}{4b}$. Поэтому:

$$\int \frac{ax^3\,dx}{bx^4 + c} = \int \frac{adz}{4bz} = \frac{a}{4b}\int \frac{dz}{z} = \frac{a}{4b}\,lg\,z = \frac{a}{4b}\,lg\,(bx^4 + c) + C.$$

Примѣръ 3-ій. $\int \frac{x^2\,dx}{(ax+b)^n}$. Дѣлаемъ подстановку $ax + b = z$, откуда: $dx = \frac{dz}{a}$; $x = \frac{z - b}{a}$. Получимъ:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax + b)^n} = \int \frac{(z - b)^2\,dz}{a^2az^n} = \int \frac{(z^2 - 2bz + b^2)\,dz}{a^3z^n}$$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\int \frac{z^2\,dz}{z^n} - 2b\int \frac{z\,dz}{z^n} + b^2\int \frac{dz}{z^n}\right]$$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\int z^{2-n}\,dz - 2b\int z^{1-n}\,dz + b^2\int z^{-n}\,dz\right].$$

По формулѣ (423) получаемъ далѣе:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(ax + b)^n} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{z^{3-n}}{3 - n} - \frac{2bz^{2-n}}{2 - n} + \frac{b^2z^{1-n}}{1 - n}\right] + C.$$

Примѣръ 4-ый. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Дѣлая подстановку $\sqrt{a^2 + x^2} = z$, получимъ: $a^2 + x^2 = z^2$; $2x\,dx = 2z\,dz$; $x = \sqrt{z^2 - a^2}$; $x\,dx = zdz$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{zdz}{z} = \int dz = z = \sqrt{a^2 + x^2} + C\,. \quad . \qquad (438)$$

Примѣръ 5-ый. $\int \frac{dx}{a + bx^2}$. Этотъ интегралъ похожъ на (432). Чтобы получить въ знаменателѣ единицу + другой членъ преобразуемъ такъ:

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \int \frac{dx}{a\left(1 + \frac{bx^2}{a}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1 + \frac{bx^2}{a}}.$$

Дѣлаемъ подстановку:

$$\frac{bx^2}{a} = z^2,$$

откуда:

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\, x = \pm z; \quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\, dx = \pm dz; \quad dx = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\, dz.$$

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \pm \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{a}\; dz}{\sqrt{b}\;(1 + z^2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \int \frac{dz}{1 + z^2}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{ab}}\; artg\, z = \pm \frac{1}{\sqrt{ab}}\; artg\, \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\, x.$$

Итакъ:

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{ab}}\; artg \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\, x \right) \quad \ldots\ldots \quad (439)$$

Обращеніе къ читателю.

§ 258. Читатель, изучающій математику по настоящему руководству можетъ, при первомъ чтеніи, не дѣлать помѣщенныхъ въ концѣ книги задачъ на интегрированіе; а, дочитавъ книгу до конца, потомъ снова перечитать параграфы, относящіеся къ интегрированію и тогда уже продѣлать задачи. Вездѣ, гдѣ намъ придется въ приложеніяхъ брать интегралы, будутъ сдѣланы ссылки на предшествовавшую теорію и даваемы нѣкоторыя разъясненія; такъ что не потребуется особаго умѣнья интегрировать для пониманія приложеній интегральнаго исчисленія къ геометріи, механикѣ и проч. При первомъ чтеніи можно пропустить слѣдующіе 12 параграфовъ.

Интегрированіе дробей.

Интегрированіе раціональныхъ дробей въ случаѣ неравныхъ дѣйствительныхъ корней.

§ 259. Раціональною дробью называется такая, числитель и знаменатель которой суть раціональныя функціи отъ x, то есть такія алгебраическія функціи, въ которыхъ не содержится радикаловъ надъ x. Напримѣръ

$$\frac{Ax^5 + Bx^2 + C}{Dx^4 + Ex + M}$$

есть раціональная дробь.

Если нужно интегрировать дифференціалъ, представляющій собою произведеніе раціональной дроби на dx, то прежде всего обращаютъ вниманіе на то, не превосходитъ ли порядокъ числителя порядка знаменателя, и въ такомъ случаѣ дѣлятъ числитель на знаменатель, при этомъ въ частномъ получаютъ цѣлую функцію и нѣкоторый остатокъ. Такъ что дробь окажется равною цѣлой части частнаго $+ \dfrac{\text{остатокъ}}{\text{знаменатель}}$. Цѣлую часть

интегрируютъ какъ цѣлую функцію, и все дѣло приводится къ интегрированію дроби $\frac{\text{остатокъ}}{\text{знаменатель}}$, въ которой порядокъ числителя менѣе порядка знаменателя. Итакъ, приходится разсматривать только интегрированіе такихъ дробей $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, въ которыхъ порядокъ числителя менѣе порядка знаменателя.

Во введеніи указано было, что всякая раціональная функція $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ произведенія:

$$P(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

гдѣ $a, b, c \ldots k$ суть корни уравненія $f(x) = o$.

Поэтому дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ можно представить въ видѣ

$$\frac{\varphi(x)}{P(x-a)(x-b)\ldots(x-k)},$$

и, такъ какъ коэффиціентъ P можно вывести за знакъ интеграла, представивъ интегралъ въ видѣ

$$\frac{1}{P}\int \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)},$$

то будемъ разсматривать интегрированіе такихъ дробей $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, въ которыхъ

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (440)$$

Займемся сначала разсмотрѣніемъ того случая, когда $f(x)$ не содержитъ ни равныхъ ни мнимыхъ корней. Посмотримъ, нельзя ли разложить дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ на сумму болѣе простыхъ дробей слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{K}{x-k} \quad . \quad . \quad . \quad (441)$$

Помножимъ это равенство на $f(x)$. Получимъ:

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C\frac{f(x)}{x-c} + \ldots + K\frac{f(x)}{x-k};$$

внося сюда вмѣсто $f(x)$ ея выраженіе (440), получимъ:

$$\varphi(x) = A\frac{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)}{(x-a)}$$

$$+ B\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{x-b} + \ldots + K\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{x-k}.$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ $x = a$ замѣтимъ, что всѣ члены правой его части кромѣ перваго обратятся въ o, потому что въ нихъ $(x-a)$ не сокращается, но при $x = a$ обращается въ нуль. Первый же членъ

по сокращеніи на $(x - a)$ будетъ:

$$A(a-b)(a-c)\ldots(a-k) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (442)$$

и получимъ:

$$\varphi(a) = A(a-b)(a-c)\ldots(a-k) \quad \ldots\ldots \quad (443)$$

Возьмемъ производную отъ $f(x)$ получимъ:

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\ldots(x-k) + (x-a)(x-c)\ldots(x-k) + \ldots$$

по формулѣ:

$$d(uvw\ldots) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw,$$

приведенной въ концѣ § 130; слѣдовательно:

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-k) \quad \ldots\ldots \quad (444)$$

остальные же члены, какъ содержащіе $(x - a)$ множителемъ, обратятся при $x = a$ въ нуль. Сравнивая (443) съ (444) имѣемъ:

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (445)$$

Совершенно такъ же можно доказать, что въ (441):

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}; \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} \ldots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)} \quad \ldots\ldots \quad (446)$$

Значитъ равенство (441) не только возможно, но мы научились даже находить такіе коэффиціенты $A, B, C \ldots$, которые именно дѣлали бы его возможнымъ. Разложить дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ такъ, какъ это указано равенствомъ (441), значитъ *разложить ее на простыя дроби*. Оказывается, что: *Дробь, знаменатель которой не имѣетъ ни равныхъ, ни мнимыхъ корней, разлагается на сумму такихъ простыхъ дробей, знаменатели которыхъ суть разности отъ перемѣннаго и одного изъ корней, числители же опредѣляются формулами (445) и (446).*

Но $\int \frac{A\,dx}{(x-a)} = A\,lg\,(x-a) + C$, какъ не трудно убѣдиться, интегрируя при помощи подстановки $x - a = z$. Слѣдовательно, получимъ:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{A\,dx}{(x-a)} + \int \frac{B\,dx}{(x-b)} + \int \frac{C\,dx}{(x-c)} + \ldots$$

$$+ \int \frac{K\,dx}{(x-k)},$$

откуда:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = A\,lg\,(x-a) + B\,lg\,(x-b)$$

$$+ C\,lg\,(x-c) + \ldots + K\,lg\,(x-k). \quad \ldots\ldots \quad (447)$$

Примѣръ 1-ый. $\int \frac{(8x-13)\,dx}{x^2-3x+2}$. Узнаемъ прежде всего корни знаменателя. Рѣшивъ уравненіе $x^2 - 3x + 2 = 0$, находимъ:

$$a = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 2;$$

$$b = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 1;$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{(8x-13)\,dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{(8x-13)\,dx}{(x-2)(x-1)}.$$

По формуламъ (445) и (446) опредѣляемъ, замѣчая, что

$$f'(x) = (x-2) + (x-1); \quad \varphi(x) = 8x - 13$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{[8a-13]}{(a-2)+(a-1)} = \frac{8.2-13}{(2-2)+(2-1)} = 3$$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{[8b-13]}{(b-2)+(b-1)} = \frac{8.1-13}{(1-2)+(1-1)} = 5.$$

Теперь по формулѣ (447) имѣемъ:

$$\int \frac{(8x-13)\,dx}{x^2-3x+2} = 3\,lg\,(x-2) + 5\,lg\,(x-1)$$

$$= lg\,[(x-2)^3\,(x-1)^5] + C.$$

Послѣдній переходъ сдѣланъ по правиламъ элементарной алгебры и прибавлено постоянное интеграціи. Замѣтимъ, что вычисленная

$$f'(x) = (x-2) + (x-1) = 2x - 3$$

равна, безъ сомнѣнія, той, которая прямо получается дифференцированіемъ знаменателя.

Примѣръ 2-ой. $\int \frac{(x+13)\,dx}{x^2-9x+14}$. Вычисляемъ:

$$a = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = 7; \quad b = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = 2$$

$$\varphi(x) = x + 13$$

$$f(x) = (x-7)(x-2)$$

$$f'(x) = (x-7) + (x-2),$$

или прямо:

$$\frac{d\,(x^2 - 9x + 14)}{dx} = 2x - 9$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{7 + 13}{7 - 2} = 4; \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{2 + 13}{2 - 7} = -3$$

$$\int \frac{(x + 13)\,dx}{x^2 - 9x + 14} = 4\,lg\,(x - 7) - 3\,lg\,(x - 2) = lg\left[\frac{(x-7)^4}{(x-2)^3}\right] + C.$$

Примѣръ 3-ій. $\int \frac{(9 - 5x)\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

$$\varphi(x) = 9 - 5x$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$f'(x) = (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 2)$$

$$a = 1; \ b = 2; \ c = 3$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{9 - 5}{(1 - 2)(1 - 3)} = 2$$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{9 - 5\,.\,2}{(2 - 1)(2 - 3)} = 1$$

$$C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} = \frac{9 - 5\,.\,3}{(3 - 1)(3 - 2)} = -3$$

$$\int \frac{(9 - 5x)\,dx}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = 2\,lg\,(x - 1) + lg\,(x - 2) - 3\,lg\,(x - 3)$$

$$= lg\left[\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^3}\right] + C.$$

Интегрированіе раціональной дроби, если корни неравные, но нѣкоторые изъ нихъ мнимые.

§ 260. Мы уже видѣли во введеніи, что мнимые корни функціи содержатся въ ней попарно: если есть корень вида

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (448)$$

то долженъ существовать и сопряженный ему корень:

$$b = \alpha - \beta\sqrt{-1}. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (449)$$

Если встрѣтятся мнимые корни, то для нихъ:

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{\varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha + \beta\sqrt{-1})};$$

и это приведется къ виду $M + N\sqrt{-1}$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{\varphi(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$$

и это приведется къ $M - N\sqrt{-1}$,

гдѣ M и N суть нѣкоторыя величины, составленныя изъ α и β. Простыя дроби, соотвѣтствующія сопряженнымъ корнямъ, соединяемъ вмѣстѣ такъ:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{M+N\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{M-N\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{(M+N\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})+(M-N\sqrt{-1})(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\frac{2M(x-\alpha)-2N\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Часть интеграла той дроби, въ знаменателѣ которой имѣются мнимые корни a и b, соотвѣтствующая имъ, будетъ:

$$\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)dx=\int\frac{2M(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$-\int\frac{2N\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.\quad\ldots\ldots\ldots\quad(450)$$

Остается взять эти два интеграла. $\int\frac{2M(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ вычислимъ подстановкою:

$$(x-\alpha)^2+\beta^2=z^2;$$

откуда $$2(x-\alpha)\,dx=2z\,dz.$$

Вслѣдствіе чего

$$\int\frac{2M(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=2M\int\frac{z\,dz}{z^2}=2M\int\frac{dz}{z}=2M\,lg\,z;$$

наконецъ:

$$\int\frac{2M(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=2\,M\,lg\left[\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right]$$

$$=M\,lg\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right].\quad\ldots\ldots\ldots\quad(451)$$

Вычислимъ теперь другой, оказавшійся въ нашей задачѣ, интегралъ $\int\frac{2N\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. Представимъ его такъ:

$$2\int\frac{N\beta\,dx}{\beta^2\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}.$$

Дѣлаемъ подстановку: $\frac{x-\alpha}{\beta}=z$; откуда $dx=\beta z$. Слѣдовательно:

$$2\int\frac{N\beta\,dx}{\beta^2\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}=2\int\frac{N\beta^2\,dz}{\beta^2\left[1+z^2\right]}=2N\int\frac{dz}{1+z^2}=2N\,artg\,z.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{2N\beta\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 2N\, artg\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (452)$$

Подставляя вычисленные интегралы (451) и (452) въ (450), получимъ:

$$\int\left[\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right]dx = M\, lg\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$

$$-2N\, artg\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (453)$$

гдѣ M и $N\sqrt{-1}$ суть дѣйствительная и мнимая части выраженій $\frac{\varphi(a)}{f'(a)}$; $\frac{\varphi(b)}{f'(b)}$.

Примѣръ 1-ый. $\int\frac{x\,dx}{x^2-4x+13}$. Изъ $x^2-4x+13=0$ вычисляемъ:

$$a = 2+\sqrt{4-13} = 2+3\sqrt{-1}$$

$$b = 2-\sqrt{4-13} = 2-3\sqrt{-1}.$$

Слѣдовательно: $\alpha=2$: $\beta=3$. Далѣе: $f'(x)=2x-4$; $\varphi(x)=x$.

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{2+3\sqrt{-1}}{4+6\sqrt{-1}-4} = \frac{2+3\sqrt{-1}}{6\sqrt{-1}}.$$

Помноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{-1}$, получимъ:

$$\frac{2\sqrt{-1}-3}{-6} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{-1}.$$

Отсюда уже видимъ, что:

$$M=\frac{1}{2};\ \ N=\frac{1}{3}.$$

Слѣдовательно по (453):

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-4x+13} = \frac{1}{2}\,lg\,[(x-2)^2+9]-\frac{2}{3}\,artg\left(\frac{x-2}{3}\right).$$

Еслибы вычислили B (безъ чего оказалось возможнымъ здѣсь обойтись, если прямо пользоваться готовою формулою 453), то получили бы:

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{2-3\sqrt{-1}}{4-6\sqrt{-1}-4} = \frac{2\sqrt{-1}+3}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{-1}.$$

Примѣръ 2-ой. $\int\frac{x\,dx}{[x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})]\,[x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})]}$.

$$a=\alpha+\beta\sqrt{-1};\quad b=\alpha-\beta\sqrt{-1};$$

$$f(x) = [x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})]\,[x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})]$$

$$f'(x) = [x-(\alpha+\beta\sqrt{-1})]+[x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})];$$

$$\varphi(x) = x.$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\alpha + \beta\sqrt{-1} - (\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{2\beta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{-1} - \beta}{-2\beta} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta}\sqrt{-1}$$

$$M = \frac{1}{2};\quad N = \frac{\alpha}{2\beta}\sqrt{-1}$$

$$\int \frac{x\,dx}{[x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})]\,[x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})]} = \frac{1}{2}\,lg\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2]$$

$$- \frac{\alpha}{\beta}\,artg\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right).$$

Примѣръ 3-ій. $\int \frac{(x^2 + x - 1)\,dx}{(x^2 + 1)(x - 2)}$. Здѣсь:

$$\varphi(x) = x^2 + x - 1;$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 2;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1;\quad a = +\sqrt{-1};$$

$$b = -\sqrt{-1};\quad c = 2;\quad \alpha = 0;\quad \beta = 1.$$

(Корни a, b, c непосредственно видны въ заданіи).

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{a^2 + a - 1}{3a^2 - 4a + 1} = \frac{-1 + \sqrt{-1} - 1}{-3 - 4\sqrt{-1} + 1} = \frac{2 - \sqrt{-1}}{2 + 4\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1})}{2(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1})} = \frac{2 - \sqrt{-1} - 4\sqrt{-1} - 2}{2(1 + 2)}$$

$$= -\frac{5\sqrt{-1}}{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}.$$

Слѣдовательно:

$$M = 0;\quad N = -\frac{1}{2};\quad B = +\frac{1}{2}\sqrt{-1}$$

$$C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} = \frac{\varphi(2)}{f'(2)} = \frac{4 + 2 - 1}{12 - 8 + 1} = \frac{5}{5} = 1.$$

Итакъ:

$$\int \frac{(x^2 + x - 1)\,dx}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \int \left[\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c}\right] dx.$$

Далѣе по (453):

$$\int \left[\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}\right] dx = artg\,x.$$

Затѣмъ по (447):

$$\int \frac{C\,dx}{x - c} = lg\,(x - 2).$$

Поэтому:

$$\int \frac{(x^2 + x - 1)\,dx}{(x^2 + 1)\,(x - 2)} = artg\,x + lg\,(x - 2).$$

Интегрированіе раціональныхъ дробей въ случаѣ равныхъ корней.

§ 261. Если въ знаменателѣ $f\,(x)$ дроби $\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)}$ находится кратный корень, напримѣръ, если $f\,(x) = (x - a)^p\,\psi\,(x)$, гдѣ $\psi\,(x)$ обозначаетъ произведеніе остальныхъ множителей, то полагаемъ:

$$\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \ldots + \frac{A_p}{(x - a)^p} + \frac{F\,(x)}{\psi\,(x)},$$

гдѣ $F\,(x)$ нѣкоторая функція. Помноживъ обѣ части этого равенства на $f\,(x)$, которая по предположенію равна $(x - a)^p\,\psi\,(x)$, получимъ:

$$\varphi\,(x) = \frac{A_1\,(x - a)^p\,\psi\,(x)}{(x - a)} + \frac{A_2\,(x - a)^p\,\psi\,(x)}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{A_p\,(x - a)^p\,\psi\,(x)}{(x - a)^p}$$
$$+ \frac{F\,(x)\,(x - a)^p\,\psi\,(x)}{\psi\,(x)},$$

или:

$$\varphi\,(x) = A_1\,\psi\,(x)\,.\,(x - a)^{p-1} + A_2\,\psi\,(x)\,.\,(x - a)^{p-2} + \ldots$$
$$+ A_p\,\psi\,(x) + F\,(x)\,.\,(x - a)^p \qquad (454)$$

Дифференцируя это уравненіе $(p - 1)$ разъ и полагая $x = a$, получимъ p уравненій для опредѣленія p величинъ: $A_1, A_2, A_3 \ldots A_p$. Вставляя ихъ въ (454), получимъ часть:

$$\int \frac{A_1\,dx}{x - a} + \int \frac{A_2\,dx}{(x - a)^2} + \ldots + \int \frac{A_p\,dx}{(x - a)^p}$$

даннаго интеграла. Съ остальною частью: $\int \frac{F\,(x)\,dx}{\psi\,(x)}$ поступаемъ такъ же, то есть вообще, въ случаѣ:

$$f\,(x) = (x - a)^p\,(x - a)^q \ldots (x - k),$$

полагаемъ:

$$\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{A_p}{(x - a)^p}$$
$$+ \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \ldots + \frac{B_q}{(x - a)^q}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{K}{x - k}.$$

Получится сумма интеграловъ вида $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m}$, который берется подстановкою $(x - a) = z$; откуда:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = \int \frac{A\,dz}{z^m} = \int A z^{-m}\,dz = \frac{A z^{1-m}}{1-m} = \frac{A\,(x-a)^{1-m}}{1-m}.$$

Примѣръ. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x-2)}$. Имѣемъ:

$$a = 1;\;\; b = 2;\;\; \varphi(x) = 1;\;\; \varphi'(x) = 0.$$

Полагаемъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)^2\,(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2}.$$

Отсюда:

$$\varphi(x) = A_1\,(x-1)\,(x-2) + A_2\,(x-2) + B\,(x-1)^2 = 1$$

$$\varphi'(x) = A_1\,(x-1) + A_1\,(x-2) + A_2 + 2B\,(x-1) = 0\,. \quad (456)$$

$$\varphi(a) = \varphi(1) = 1 = A_2\,(1-2) = -A_2$$

$$\varphi'(a) = \varphi'(1) = 0 = A_1\,(1-2) + A_2 = -A_1 + A_2.$$

Слѣдовательно:

$$A_1 = A_2 = -1.$$

Для вычисленія B удобнѣе всего положить въ (456)-омъ: $x = 2$. Получимъ:

$$\varphi'(2) = 0 = A_1\,(2-1) + A_1\,(2-2) + A_2 + 2B\,(2-1);$$

или $\quad 0 = -1 - 1 + 2B$; откуда: $B = 1$.

Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\,lg\,(x-1) + \frac{1}{x-1} + lg\,(x-2) = lg\,\frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} + C.$$

Интегрированіе раціональной дроби въ случаѣ равныхъ мнимыхъ корней.

§ 262. Если кратный корень окажется мнимымъ, то ему найдется и сопряженный корень той же кратности. Въ такомъ случаѣ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Пусть мнимые сопряженные корни кратности p суть: $a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$; $b = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, такъ что знаменатель дроби имѣетъ видъ:

$$f(x) = [x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})]^p\,[x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})]^p\,\psi(x).$$

Перемножая количества, стоящія въ скобкахъ правой части, получимъ:

$$f(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p\,\psi(x).$$

Полагаемъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{(A_1x + B_1)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A_2x+B_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \ldots$$

$$+ \frac{A_px+B_p}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} + \frac{F(x)}{\psi(x)}.$$

Помножая обѣ части этого равенства на $f(x)$, получимъ:

$$\varphi(x) = (A_1x+B_1)\,\psi(x)\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}$$

$$+ (A_2x+B_2)\,\psi(x)\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-2} + \ldots$$

$$+ (A_px+B_p)\,\psi(x) + F(x)\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p.$$

Коэффиціенты $A_1, A_2, A_3 \ldots B_1, B_2, B_3 \ldots$ опредѣляются изъ этого уравненія и изъ его $(p-1)$ производныхъ, полагая въ нихъ

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

и приравнивая дѣйствительныя части дѣйствительнымъ, а мнимыя—мнимымъ. Въ остальномъ все происходитъ какъ и въ § 261, только теперь приходится имѣть дѣло съ интегралами вида:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (457)$$

Этотъ интегралъ мы и должны изучить. Дѣлаемъ подстановку $x-\alpha=z$. Получимъ, вмѣсто (457):

$$\int \frac{(Az+A\alpha+B)\,dz}{[z^2+\beta^2]^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (458)$$

Разбиваемъ его на два интеграла слѣдующимъ образомъ:

$$\int \frac{(Az+A\alpha+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \int \frac{Az\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} + \int \frac{(A\alpha+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

Изучаемъ каждый изъ интеграловъ правой части отдѣльно. $\int \frac{Az\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}$ подстановкою: $z^2+\beta^2=y^2$ приводится къ

$$\int \frac{Ay\,dy}{y^{2n}} = \int \frac{A\,dy}{y^{2n-1}} = \int Ay^{-2n+1}\,dy = \frac{Ay^{-n2+2}}{-2n+2} = -\frac{A\,(y^2)^{-(n-1)}}{2\,(n-1)}$$

$$= -\frac{A}{2\,(n-1)} \cdot \frac{1}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (459)$$

Остается разсмотрѣть:

$$\int \frac{(A\alpha+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n},$$

который равенъ

$$(A\alpha+B)\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

Здѣсь пока не будемъ заботиться о множителѣ $A\alpha + B$, а остановимся на $\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$. Сначала дѣлаемъ такія простыя преобразованія:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\beta^2\, dz}{(z^2 + \beta^2)^n} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(\beta^2 + z^2 - z^2)\, dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{z^2\, dz}{(z^2 + \beta^2)^n} \quad \ldots\ldots \quad (460)$$

Послѣдній интегралъ интегрируемъ по частямъ такъ:

$$\int \frac{z^2\, dz}{(z^2 + \beta^2)^n} = \int z \cdot \frac{z\, dz}{(z^2 + \beta^2)^n} = -\int z \,.\, d\left[\frac{1}{2\,(n-1)\,(z^2 + \beta^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{z}{2\,(n-1)\,(z^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{1}{2\,(n-1)}\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}.$$

Вставляя это значеніе интеграла $\int \frac{z^2\, dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$ въ (460), получимъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{z}{\beta^2\, 2\,(n-1)\,(z^2 + \beta^2)^{n-1}}$$

$$- \frac{1}{2\beta^2\,(n-1)}\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} = \frac{z}{2\,\beta^2\,(n-1)\,(z^2 + \beta^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{2n-3}{2\beta^2\,(n-1)}\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (461)$$

Мы привели $\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$ къ $\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}$, въ которомъ знаменатель дроби уже не n-ой, но $(n-1)$-ой степени. Понижая такимъ же способомъ степень знаменателя еще и еще, дойдемъ до $\int \frac{dz}{z^2 + \beta^2}$, который по (439), полагая въ ней $x = z$; $a = \beta^2$; $b = 1$, равенъ:

$$\frac{1}{\beta}\, artg\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Примѣръ 1-ый. $\int \frac{(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4)\, dx}{(x^2 - 2x + 2)^2\,(x-1)}$.

Прежде всего, для разложенія знаменателя на множители, рѣшимъ уравненіе $x^2 - 2x + 2 = 0$. Получимъ $x = 1 \pm \sqrt{-1}$. Слѣдовательно:

$$x^2 - 2x + 2 = [x - (1 + \sqrt{-1})]\,[x - (1 - \sqrt{-1})].$$

$$\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = \frac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4}{[x - (1 + \sqrt{-1})]^2\,[x - (1 - \sqrt{-1})]^2\,(x-1)}$$

$$= \frac{A_1 x + B_1}{(x-1)^2 + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x-1)^2 + 1]^2} + \frac{C}{x-1}.$$

$$\varphi(x) = (A_1x + B_1)[(x-1)^2+1](x-1) + (A_2x+B_2)(x-1)$$
$$+ C[(x-1)^2+1]^2 = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4 \ldots \quad (462)$$
$$\varphi'(x) = (A_1x+B_1)[(x-1)^2+1] + 2(x-1)(A_1x+B_1)(x-1)$$
$$+ A_1[(x-1)^2+1](x-1) + A_2x + B_2 + A_2(x-1)$$
$$+ 2[(x-1)^2+1]\,2(x-1) = 4x^3 - 12x^2 + 18x - 9.$$

Подставляя сюда $x = 1 + \sqrt{-1}$, замѣтимъ, что всѣ члены, содержащіе $[(x-1)^2+1]$, обратятся въ 0, потому что

$$[(x-1)^2+1] = [x-(1+\sqrt{-1})][x-(1-\sqrt{-1})].$$

Подготовляемъ:

$$(1+\sqrt{-1})^2 = 1 - 1 + 2\sqrt{-1}$$
$$(1+\sqrt{-1})^3 = 2\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{-1}) = 2\sqrt{-1} - 2$$
$$(1+\sqrt{-1})^4 = (2\sqrt{-1})^2 = -4.$$

Зная, что члены, содержащіе $[x-1)^2+1]$, нечего и вычислять, потому что они при $x = 1 + \sqrt{-1}$ обращаются въ нули, вычисляемъ:

$$\varphi(1+\sqrt{-1}) = [A_2(1+\sqrt{-1}) + B_2]\sqrt{-1}$$
$$= -4 - 8\sqrt{-1} + 8 + 18\sqrt{-1} - 9 - 9\sqrt{-1} + 4.$$
$$\varphi'(1+\sqrt{-1}) = -2[A_1(1+\sqrt{-1}) + B_1] + A_2(1+\sqrt{-1})$$
$$+ B_2 + A_2\sqrt{-1} = 8\sqrt{-1} - 8 - 24\sqrt{-1} + 18 + 18\sqrt{-1} - 9.$$

Замѣчая, что

$$[A_2(1+\sqrt{-1}) + B_2]\sqrt{-1} = A_2\sqrt{-1} - A_2 + B_2\sqrt{-1}$$

и отдѣляя мнимыя части отъ дѣйствительныхъ, получимъ:

$$(A_2+B_2)\sqrt{-1} - A_2 = \sqrt{-1} - 1.$$
$$(A_2 - 2A_1 + A_2)\sqrt{-1} + A_2 - 2A_1 - 2B_1 + B_2 = 2\sqrt{-1} + 1$$

Такія величины могутъ быть равны только въ томъ случаѣ, если дѣйствительныя ихъ части равны дѣйствительнымъ, мнимыя—мнимымъ. Слѣдовательно:

$$A_2 + B_2 = 1; \quad 2A_2 - 2A_1 = 2.$$
$$A_2 = 1; \quad A_2 - 2A_1 - 2B_1 + B_2 = 1.$$

Отсюда:

$$A_2 = 1; \; B_2 = 0; \; A_1 = 0; \; B_1 = 0.$$

Для опредѣленія C положимъ $x = 1$ въ (462). Сначала вставимъ въ (462) найденныя величины A_1, A_2, B_1, B_2. Получимъ:

$$A_2x(x-1) + C[(x-1)^2+1]^2 = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4.$$

Полагая здѣсь $x = 1$, получимъ:

$$C = 1 - 4 + 9 - 9 + 4 = 1.$$

Итакъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x}{[(x-1)^2+1]^2} + \frac{1}{x+1}.$$

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{x\,dx}{[(x-1)^2+1]^2} + \int \frac{dx}{x-1}.$$

Полагая $x - 1 = z$, получимъ:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{z\,dz}{[z^2+1]^2} + \int \frac{dz}{[z^2+1]^2} + \int \frac{dz}{z} \quad . \; . (463)$$

По (459):

$$\int \frac{zdz}{[z^2+1]^2} = -\frac{1}{2(z^2+1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (464)$$

По (461):

$$\int \frac{dz}{[z^2+1]^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}.$$

Но по (432):

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = artg\, z\,.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\, artg\, z \quad . \; . \; . \; . \; . (465)$$

Кромѣ того по (424):

$$\int \frac{dz}{z} = lg\, z\,.$$

Складывая этотъ интегралъ съ (465) и (464), согласно (463), получимъ:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = -\frac{1}{2(z^2+1)} + \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\, artg\, z + lg\, z$$

$$= \frac{z-1}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\, artg\, z + lg\, z\,.$$

Припоминая, что мы положили $z = x - 1$, получимъ:

$$\int \frac{(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4)\,dx}{(x^2-2x+2)^2\,(x-1)} = \frac{x-2}{2(x^2-2x+2)}$$

$$+ \frac{1}{2}\, artg\,(x-1) + lg\,(x-1) + C.$$

Здѣсь чрез C мы обозначили обыкновенное постоянное интеграціи.

Примѣръ 2-ой. $\int \frac{dz}{(z^2+1)^3}$.

По (461) имѣемъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \frac{z}{4\,(z^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

По (461) имѣемъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2\,(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}.$$

По (432) имѣемъ:

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = artg\, z\,.$$

Соединяя всѣ эти выводы, получимъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \frac{z}{4\,(z^2+1)^2} + \frac{3z}{8\,(z^2+1)} + \frac{3}{8}\, artg\, z.$$

Интегрированіе функцій, содержащихъ радикалы.

Подъ корнями находятся только одночлены.

§ 263. Если въ подъинтегральномъ выраженіи находятся радикалы надъ одночленами, содержащими перемѣнное, то всегда можно выбрать такую подстановку, которая уничтожаетъ радикалы (корни). Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Положимъ что требуется вычислить

$$\int \frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})\;dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

Замѣняемъ корни дробными степенями. Получимъ:

$$\int \frac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}\right)dx}{1+x^{\frac{1}{3}}}.$$

Общій знаменатель у дробныхъ показателей здѣсь $=6$. Дѣлаемъ подстановку $x=z^6$; откуда $dx=6z^5\,dz$. Получимъ:

$$\int \frac{(1+z^3-z^4)\,6z^5\,dz}{1+z^2}.$$

Дѣло приведено къ интегралу, вычисляемому по правиламъ интегрированія дробей, изложеннымъ въ предъидущихъ параграфахъ.

Подъ радикалами находятся двучлены перваго порядка.

§ 264. Подобнымъ же образомъ вычисляются интегралы, содержащіе радикалы надъ двучленами вида $ax + b$. Напримѣръ:

$$\int \frac{(x + \sqrt{ax + b})\,dx}{x^2 - \sqrt[3]{ax + b}}$$

вычисляется подстановкою $ax + b = z^6$.

Преобразуемъ данный интегралъ въ:

$$\int \frac{\left[x + (ax + b)^{\frac{1}{2}}\right] dx}{x^2 - (ax + b)^{\frac{1}{3}}}.$$

Подстановка $ax + b = z^6$ дастъ:

$$dx = \frac{6z^5\,dz}{a}\,;\;\; x = \frac{z^6 - b}{a}.$$

Получимъ:

$$\int \frac{\left[\frac{z^6 - b}{a} + z^3\right] \frac{6z^5\,dz}{a}}{\left(\frac{z^6 - b}{a}\right)^2 - z^2},$$

который затѣмъ можно вычислить по правиламъ интегрированія дробей.

Дифференціалы, заключающіе въ себѣ квадратный корень $\sqrt{a + bx + cx^2}$.

§ 265. Если въ интегрируемомъ дифференціалѣ заключается

$$\sqrt{a + bx + cx^2},$$

то вопервыхъ всегда можно вывести коэффиціентъ c за радикалалъ, такъ

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{c}\,\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2},$$

Поэтому достаточно разсмотрѣть только радикалъ вида $\sqrt{a + bx \pm x^2}$, въ которомъ коэффиціентъ при x^2 равенъ $+1$ или -1.

1-ый случай. $\sqrt{a + bx + x^2}$ — здѣсь x^2 стоитъ со знакомъ $+$.

Дѣлаемъ подстановку полагая:

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (466)$$

Возводя обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ:

$$a + bx + x^2 = z^2 - 2zx + x^2,$$

откуда:

$$a + bx = z^2 - 2zx;$$

отсюда:

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z} \ldots \ldots \ldots \ldots (467)$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x = z - \frac{z^2 - a}{b + 2z} = \frac{a + bz + z^2}{b + 2z} \ldots (468)$$

$$dx = \left[\frac{(b + 2z)\,2z - (z^2 - a)\,2}{(b + 2z)^2}\right] dz = \frac{(a + bz + z^2)\,2\,dz}{(b + 2z)^2} \ldots (469)$$

Подставивъ въ данный интегралъ, вмѣсто величинъ: x; dx; $\sqrt{a + bx + x^2}$, ихъ выраженія чрезъ z, данныя формулами (467), (468), (469), избавимся отъ радикала.

Примѣръ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}$. По формуламъ (467), (468), (369) приводимъ данный интегралъ къ виду:

$$\int \frac{(a + bz + z^2)\,2\,dz\,(b + 2z)}{(a + bz + z^2)\,(b + 2z)^2} = \int \frac{2\,dz}{b + 2z} = \int \frac{dz}{\frac{b}{2} + z}.$$

Послѣдній же интегралъ по формулѣ (424) $= lg\left(\frac{b}{2} + z\right)$. Но по (466) $z = x + \sqrt{a + bx + x^2}$. Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = lg\left[\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right] + C \ldots (470)$$

2-ой случай. $\sqrt{a + bx - x^2}$ — здѣсь x^2 стоитъ со знакомъ —.

Рѣшимъ уравненіе $x^2 - bx - a = 0$, называя его корни чрезъ α и β, получимъ:

$$\alpha = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a};\quad \beta = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + a} \ldots (471)$$

Какъ извѣстно:

$$a + bx - x^2 = (x - \alpha)(\beta - x) \ldots \ldots (472)$$

Дѣлимъ подстановку:

$$\sqrt{a^2 + bx - x^2} = (x - \alpha)\,z \ldots \ldots (473)$$

Отсюда изъ (472) имѣемъ: $\beta - x = (x - \alpha)\,z^2$. Откуда:

$$x = \frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2} \ldots \ldots \ldots (474)$$

Поэтому:

$$(x - \alpha)\,z = \left(\frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2} - \alpha\right) z = \left(\frac{\beta + \alpha z^2 - \alpha - \alpha z^2}{1 + z^2}\right) z = \frac{(\beta - \alpha)\,z}{1 + z^2}.$$

Вставляя эту величину, вмѣстѣ $(x - a)\,z$, въ (473), получимъ:

$$\sqrt{a^2 + bx - x^2} = \frac{(\beta - \alpha)\,z}{1 + z^2} \ldots \ldots (475)$$

Вычислимъ dx изъ формулы (474):

$$dx = \frac{(1+z^2)\,2\alpha z\,dz - (\beta + \alpha z^2)\,2z\,dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2(\alpha - \beta)\,z\,dz}{(1+z^2)^2} \ldots (476)$$

Формулы: (474), (475), (476) позволяютъ освободиться отъ радикала и привести дѣло къ интегрированію раціональной дроби.

Примѣръ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$. По (475) и (476), получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{2(\alpha-\beta)\,z\,dz\,(1+z^2)}{(1+z^2)^2(\beta-\alpha)\,z} = -\int \frac{2\,dz}{1+z^2};$$

по (432):

$$-\int \frac{2\,dz}{1+z^2} = -2 artg\, z;$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -2\, artg\, z\,.$$

Но изъ (473) имѣемъ:

$$z = \frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{x-\alpha}\,.$$

Итакъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -2\, artg \frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{x-a} + C.$$

Впрочемъ этотъ интегралъ получается въ болѣе простой формѣ слѣдующимъ болѣе легкимъ пріемомъ. Не трудно видѣть, что:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}\,.$$

Дѣлаемъ подстановку:

$$\frac{b}{2} - x = t\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}, \ldots\ldots\ldots (477)$$

откуда:

$$dx = -dt\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}\,.$$

Подставляя, получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -\int \frac{dt\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}-\left(a+\frac{b^2}{4}\right)t^2}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcos\, t.$$

Но изъ (477) слѣдуетъ:

$$t = \frac{b - 2x}{\sqrt{4a + b^2}}.$$

Поэтому:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = arccos\left(\frac{b - 2x}{\sqrt{4a + b^2}}\right) \ldots\ldots (478)$$

Интегрированіе бинома.

Случаи интегрируемости бинома и его преобразованіе подстановкою

$$a + bx^n = z.$$

§ 266. Очень многіе интегралы имѣютъ видъ:

$$\int x^m \sqrt[r]{(a + bx^n)^q}\, dx.$$

Вычисленіе этого выраженія называется *интегрированіемъ бинома*, потому что здѣсь подъ корнемъ стоитъ биномъ (двучленъ).

Обыкновенно этотъ интегралъ представляютъ, полагая

$$\frac{q}{r} = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (479)$$

въ видѣ:

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots (480)$$

Биномъ можно интегрировать въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Если p цѣлое число. Тогда разлагаемъ $(a + bx^n)^p$ по биному Ньютона и интегрируемъ почленно.

2) Если

$$\frac{m + 1}{n} = \text{цѣлому числу} \ldots\ldots\ldots (481)$$

Въ этомъ случаѣ полагаемъ:

$$a + bx^n = z,$$

откуда:

$$x = \left(\frac{z - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};\ dx = \frac{1}{bn}\left(\frac{z - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1} dz.$$

Вставляя, получаемъ:

$$\frac{1}{bn}\int z^p \left(\frac{z - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n} - 1} dz.$$

Этотъ интегралъ можно вычислить, если $\frac{m + 1}{n}$ есть цѣлое число, сдѣлавъ подстановку $z = t^r$, гдѣ r есть знаменатель той дроби $\frac{q}{r}$, кото-

рая названа чрезъ p. Дѣйствительно эта подстановка уничтожаетъ радикалы (дробные показатели).

3) Если

$$\frac{m+1}{n}+p = \text{цѣлому числу} \ldots \ldots \quad (482)$$

Въ этомъ случаѣ дѣлаемъ такое преобразованіе:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m+np} (ax^{-n}+b)^p\,dx \ldots \quad (483)$$

Условіе интегрируемости (481) принимаетъ въ преобразованнномъ интегралѣ видъ $\frac{m+np+1}{-n} =$ цѣлому числу. или:

$$\frac{m+1}{n}+p = \text{цѣлому числу.}$$

Примѣръ. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Пишемъ его въ видѣ:

$$\int x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Здѣсь $m=1$; $n=2$; $p=-\frac{1}{2}$ условіе интегрируемости (481) удовлетворено, потому что:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Полагаемъ $1-x^2=z$; отсюда:

$$x=\sqrt{1-z} = (1-z)^{\frac{1}{2}};\ dx = -\frac{1}{2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Поэтому:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\,dz}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= -z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Итакъ:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C \ldots \ldots \quad (484)$$

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

Простѣйшій случай.

§ 267. Интегралы вида:

$$\int f(e^x)\,e^x\,dx;\ \int f(lg\,x)\,\frac{dx}{x};\ \int f(\sin x)\cos x\,dx;\ \int f(\cos x)\sin x\,dx;$$

$$\int f(\arcsin x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ \int f(\operatorname{artg} x)\,\frac{dx}{1+x^2},$$

въ которыхъ подъ интеграломъ находится произведеніе алгебраической функціи f отъ какой нибудь простой трансцендентной на дифференціалъ этой трансцендентной, вычисляются простою подстановкою.

Примѣръ. $\int \sin^3 x \,.\, \cos x\, dx$. Здѣсь кубъ отъ синуса помноженъ на дифференціалъ синуса: $\cos x\, dx$. Полагаемъ $\sin x = y$. Получимъ:

$$\int \sin^3 x \,.\, \cos x\, dx = \int y^3\, dy = \frac{y^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4}.$$

Интегралы вида $\int z^n P\, dx$.

§ 268. Пусть z есть нѣкоторая трансцендентная функція отъ x; P нѣкоторая алгебраическая функція отъ x. Научимся вычислять интегралы вида:

$$\int z^n P\, dx,$$

если знаемъ интегрировать $\int P\, dx$.

Полагаемъ:

$$\int P\, dx = Q; \quad \int Q \frac{dz}{dx}\, dx = R; \quad \int R \frac{dz}{dx}\, dx = s \ldots$$

Пользуясь этими обозначеніями и интегрированіемъ по частямъ, вычисляемъ:

$$\int z^n P\, dx = \int z^n\, dQ = Qz^n - n \int Q z^{n-1}\, dz$$

$$\int Qz^{n-1}\, dz = \int z^{n-1}\, dR = Rz^{n-1} - (n-1) \int z^{n-2} R\, dz$$

$$\int z^{n-2} R\, dz = \int z^{n-2}\, ds = s z^{n-2} - (n-2) \int z^{n-3} s\, dz$$

. . . .

Вставляя въ верхнія изъ этихъ строкъ значенія интеграловъ, данныя нижними, получимъ:

$$\int z^n P\, dx = Qz^n - n\, Rz^{n-1} + n\,(n-1)\, sz^{n-2} \;.\;.\;. \tag{485}$$

Законъ дальнѣйшаго составленія этой формулы ясенъ. Если умѣемъ вычислять Q, R, S ... и число n есть число цѣлое и положительное, то по формулѣ (485) вычислимъ и $\int z^n P\, dx$.

Примѣръ. $\int x^{m-1} (lg\, x)^3\, dx$.

Здѣсь:

$$z = lg\,(x); \quad n = 3; \quad P = x^{m-1}.$$

Вычисляемъ:

$$Q = \int P\,dx = \int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m}$$

$$R = \int Q\,\frac{dz}{dx}\,dx = \int \frac{x^m}{m}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{m}\int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m^2}$$

$$S = \int R\,\frac{dz}{dx}\,dx = \int \frac{x^m}{m^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{m^2}\int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m^3}\,.$$

Ясно уже, что затѣмъ получимъ $\frac{x^m}{m^4}$, $\frac{x^m}{m^5}$ . . . Вставляя въ формулу (485) получимъ:

$$\int x^{m-1}\,(lg\,x)^3\,dx = \frac{x^m}{m}\,(lg\,x)^3 - 3\,\frac{x^m}{m^2}\,(lg\,x)^2 + 3\,.\,2\,.\,\frac{x^m}{m^3}\,lg\,x$$

$$-\,3\,.\,2\,.\,1\,\frac{x^m}{m^4}.$$

Какъ видимъ, рядъ закончился потому, что слѣдующій членъ по этому закону былъ бы $3\,(3-1)\,(3-2)\,(3-3)$, то есть—равенъ нулю, благодаря тому, что $3-3=0$.

§ 269. Интегралъ вида $\int sin^m\,x\,.\,cos^n\,x\,dx$ приводится интегрированіемъ по частямъ къ болѣе простому виду слѣдующимъ способомъ:

$$\int sin^m\,x\,.\,cos^n\,x\,dx = \int cos^{n-1}\,x\,.\,sin^m\,x\,.\,cos\,x\,dx =$$

$$= \int cos^{n-1}\,x\,.\,sin^m\,x\,.\,d\,(sin\,x) = \int cos^{n-1}\,x\,.\,d\left(\frac{sin^{m+1}\,x}{m+1}\right).$$

Интегрируя по частямъ находимъ, что послѣдній интегралъ равенъ

$$cos^{n-1}\,x\,.\,\frac{sin^{m+1}\,x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int sin^{m+2}\,x\,.\,cos^{n-2}\,x\,.\,dx.$$

Итакъ:

$$\int sin^m\,x\,.\,cos^n\,x\,.\,dx = cos^{n-1}\,x\,.\,\frac{sin^{m+1}\,x}{m+1}$$

$$+\,\frac{n-1}{m+1}\int sin^{m+2}\,x\;\;cos^{n-2}x\,.\,dx\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(486)$$

Но

$$sin^{m+2}\,x\,.\,cos^{n-2}\,x = sin^m\,x\,.\,(1-cos^2\,x)\,.\,cos^{n-2}\,x$$

$$= sin^m\,x\,.\,cos^{n-2}\,x - sin^m\,x\,.\,cos^n\,x\,.$$

Поэтому:

$$\int sin^{m+2} x \cdot cos^{n-2} x \,.\, dx = \int sin^m x \,.\, cos^{n-2} x\, dx$$

$$- \int sin^m x \,.\, cos^n x \,.\, dx \,.$$

Вставляя эту величину въ (486) получимъ:

$$\int sin^m x \,.\, cos^n x \,.\, dx = cos^{n-1} x \,.\, \frac{sin^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \left[\int sin^m x \,.\, cos^{n-2} x\, dx - \int sin^m x \,.\, cos^n x\, dx\right] \cdot$$

Соединяя здѣсь интегралъ лѣвой части равенства съ равнымъ ему интеграломъ правой части, получимъ:

$$\int sin^m x \,.\, cos^n x \,.\, dx = \frac{sin^{m+1} x \quad cos^{n-1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n} \int sin^m x \,.\, cos^{n-2}\, dx \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (487)$$

Здѣсь мы понизили степень косинуса съ $cos^n x$ на $cos^{n-2} x$. Прилагая этотъ пріемъ къ интегралу правой части равенства (487), и такъ далѣе, дойдемъ до одного изъ интеграловъ:

$$\int sin^m x\, dx \quad \text{или} \quad \int sin^m x \,.\, cos\, x\, dx\,,$$

которые умѣемъ вычислять указанными въ §§ 267 и 268 способами.

Нѣкоторые наиболѣе употребительные въ приложеніяхъ интегралы.

§ 270. Иногда интегралы, которые подходятъ подъ формулы и способы изложенной общей теоріи, могутъ быть, по ихъ частному характеру, вычисляемы проще. Съ другой стороны, въ послѣдующихъ приложеніяхъ неудобно было бы намъ въ этой книгѣ отвлекаться вычисленіями интеграловъ. Поэтому мы приводимъ здѣсь вычисленіе интеграловъ, встрѣчающихся особенно часто.

Формулы, содержащіяся въ этомъ параграфѣ, обозначаемъ особою нумераціею [1], [2]...

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot$$

Полагая въ (470), вмѣсто a, постоянное $-a^2$; $b = 0$, получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = lg\left[x + \sqrt{x^2 - a^2}\right] + C \;.\;.\;.\;.\;. \quad [1]$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Но

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^3}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\, dx}{\sqrt{x^2 - x^2}}$$

$$= \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Но по формулѣ [1] этого параграфа:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = lg\,[x + \sqrt{x^2 - a^2}].$$

Слѣдовательно:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$- \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2\, lg\,[x + \sqrt{x^2 - a^2}].$$

Перенося изъ правой части равенства $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ въ лѣвую, получимъ:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\, lg\,[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C \; . \; . \; . \; [2]$$

Подобнымъ же образомъ вычислимъ $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Именно:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$+ \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$- \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Но полагая въ (478), вмѣсто a, постоянное a^2; $b = 0$ получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arccos\left(-\frac{x}{a}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; [3]$$

Поэтому:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \,.\, arccos\left(-\frac{x}{a}\right) - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Соединяя въ этомъ равенствѣ одинаковые интегралы, получимъ:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\, arccos\left(-\frac{x}{a}\right). \; . \; . \; [4]$$

Не трудно вычислить слѣдующіе интегралы:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\, artg \left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [5]$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lga} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [6]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\, lg \left(\frac{x-a}{x+a}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [7]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = lg \left[\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x}{a}\right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [8]$$

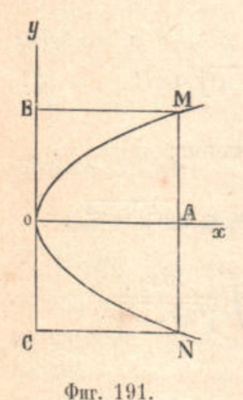
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = lg \left[\frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x}{a}\right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [9]$$

Вычисленіе площадей.

Площадь параболы.

§ 271. Вычислимъ площадь параболы $y^2 = 2px$ (фиг. 191). Изъ ея уравненія имѣемъ:

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p}\; x^{\frac{1}{2}}.$$



Фиг. 191.

Согласно (415), площадь AOM равна:

$$\int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{2p}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^x$$

$$= \sqrt{2p}\, \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3}\sqrt{2px}\; x = \frac{2}{3}\, yx \quad . \; . \; . \; (487)$$

$=$ двумъ третямъ прямоугольника $AOBM$. Слѣдовательно площадь

$$NOM = \frac{2}{3}\, NCBM.$$

Площадь эллипса.

§ 272. Вычислимъ площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Изъ этого уравненія слѣдуетъ (фиг. 192).

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (488)$$

Площадь $POBM$, заключенная между осью y, кривою, ординатою y и осью абсциссъ по (415) будетъ:

$$u = \int_0^x y\, dx.$$

Вставляя сюда величину y изъ (488), получимъ:

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Пользуясь формулою [4] параграфа 270 получимъ:

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} \left[\frac{x \sqrt{a^2 - x}}{2} + \frac{a^2}{2} \, arccos \left(- \frac{x}{a} \right) \right]_0^x$$

$$= \frac{b}{a} \left[\frac{x \sqrt{a^2 - x}}{2} + \frac{a^2}{2} \, arccos \left(- \frac{x}{a} \right) - \frac{a^2}{2} \, arccos \, (0) \right].$$

Но *arccos* 0 = дугѣ косинусъ которой равенъ нулю $= \frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно

$$u = \frac{b}{a} \left[\frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \, arccos \left(- \frac{x}{a} \right) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] \quad . \quad . \quad (489)$$

Полагая здѣсь $x = a$, получимъ, площадь AOB четверти (квадранта) эллипса:

$$AOB = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} \, arccos \, (-1) - \frac{a^2 \pi}{2 \, . \, 2} \right].$$

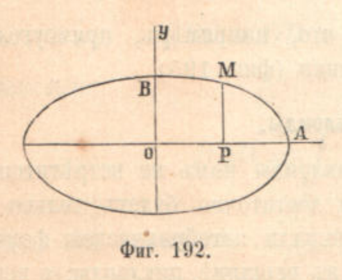
Но $arccos \, (-1) = \pi$. Слѣдовательно:

$$AOB = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2 \pi}{2} - \frac{a^2 \pi}{4} \right] = \frac{b}{a} \frac{a^2 \pi}{4} = \frac{ab\pi}{4}.$$

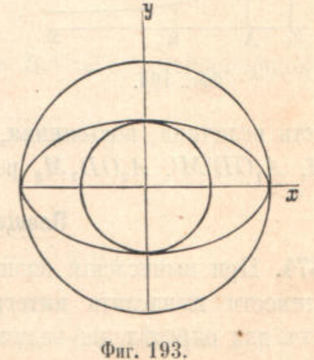
Площадь же всего эллипса въ 4 раза болѣе этой площади эллиптическаго квадранта. Итакъ:

Площадь эллипса $= \pi ab$ . . (490)

При $a = b$ эллипсъ обращается въ



Фиг. 192.



Фиг. 193.

кругъ и получается извѣстная формула площади круга πa^2 (если назвать a чрезъ R, то πR^2).

Площади круговъ, описанныхъ изъ центра эллипса его полуосями какъ радіусами, суть πa^2 и πb^2. Между ними и площадью πab эллипса существуетъ соотношеніе

$$\pi ab = \sqrt{\pi a^2 \, . \, \pi b^2},$$

показывающее, что: *площадь эллипса есть средняя пропорціональная площадей описаннаго около него и вписаннаго въ него круговъ* (фиг. 193).

Площадь гиперболы.

§ 273. Вычислимъ площадь равносторонней гиперболы (фиг. 194):

$$xy = m.$$

Имѣемъ:

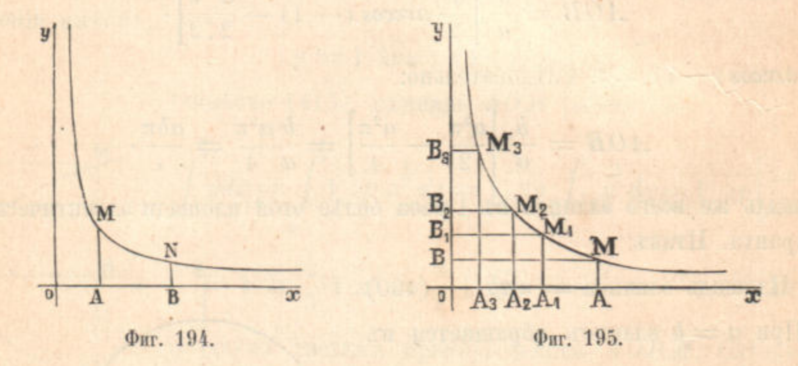
$$y = \frac{m}{x}$$

$$AMNB = \int_p^q y\,dx = m\int_p^q \frac{dx}{x} = m\,[lg\,x]_p^q = m\,lg\,q - m\,lg\,p$$

$$= m\,lg\,\frac{q}{p} = lg\,\frac{q^m}{p^m},$$

гдѣ $OA = p;\quad OB = q.$

Замѣтимъ, что въ этой гиперболѣ, какъ показываетъ самое ея уравненіе $xy = m$, площадь прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ и орди-



Фиг. 194. Фиг. 195.

натѣ есть величина постоянная, такъ что, напримѣръ, прямоугольники $AOBM$, $A_1OB'M'$, $A_2OB_2M_2$ равновелики (фиг. 195).

Площадь циклоиды.

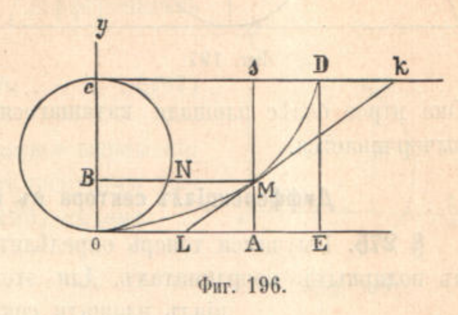
§ 274. При вычисленіи площади циклоиды намъ не встрѣтится даже необходимости вычислять интегралы, а достаточно будетъ только знать видъ ихъ для опредѣленія величины площади алгебраическою формулою.

Принимаемъ за ось x касательную въ вершинѣ циклоиды; а вершину примемъ за начало координатъ (фиг. 196). По формулѣ (383):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (491)$$

Но эта формула выведена была при томъ, что начало координатъ было въ D. Однако уголъ наклоненія касательной въ той системѣ былъ CKL;

въ системѣ же фигуры 196-ой уголъ наклоненія касательной есть KLE, равный CKL, какъ накрестлежащій. Для написанія дифференціальнаго уравненія циклоиды для новой системы координатъ остается въ формулѣ (491) замѣнить прежній y, равный SM, новымъ равнымъ AM, но $SM = 2a - AM$. Слѣдовательно нужно, для переходя къ новымъ осямъ, замѣнить только въ правой части (491)-го y чрезъ $2a - y$. Получимъ:



Фиг. 196.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \quad (492)$$

Вычислимъ площадь AMO.

$$AMO = \int_o^x y\,dx\,.$$

Вставляя сюда, вмѣсто dx, его величину изъ (492), получимъ:

$$AMO = \int_o^x y\,dx = \int_o^y y\sqrt{\frac{2a-y}{y}} \cdot dy = \int_o^y \sqrt{(2ay - y)\,y}\,dy \quad . (493)$$

Вычислимъ теперь площадь BNO круговаго полусегмента. Она будетъ:

$$\int_o^y XdY\,,$$

гдѣ X, Y координаты точки N. Но $X = BN =$ среднепропорціональной между

$$BC \text{ и } OB = \sqrt{(2a - y)\,.\,y}\,.$$

Слѣдовательно:

$$BNO = \int_o^y \sqrt{(2a - y)\,y}\,dy.$$

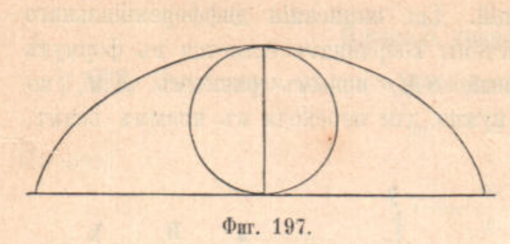
Сравнивая это выраженіе съ (493) видимъ, что $AMO = BNO$. Когда сдѣлаемъ OB равнымъ OC, то BNO обратится въ площадь $\frac{\pi a^2}{2}$ полукруга, OAM обратится въ OED. Эти площади будутъ равны и въ предѣлѣ. Слѣдовательно:

$$OED = \frac{\pi\,a^2}{2}.$$

Вычитая OED изъ $OCDE$, получимъ площадь $OMDC$ полуциклоиды. Но $OCDE = 2a\,.\,CD$. Сторона же $CD = \pi a$, по условію катанія круга

по прямой. Слѣдовательно $OCDE = \pi a \,.\, 2a = 2\pi a^2$. Итакъ:

$$OMDC = 2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$


Фиг. 197.

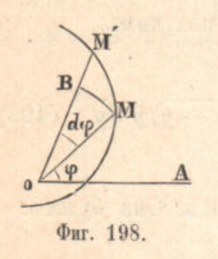
Площадь же $ABCD$ цѣлой циклоиды, заключенная (фиг. 197) между этою кривою и ея основаніемъ равна:

$$3\pi a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (494)$$

Она втрое болѣе площади катящагося круга, точкою котораго циклоида вычерчивается.

Дифференціалъ сектора въ полярныхъ координатахъ.

§ 275. Выучимся теперь опредѣлять площади кривыхъ, выраженныхъ въ полярныхъ координатахъ. Для этого опредѣлимъ сначала дифференціалъ площади сектора кривой, выраженной въ полярныхъ координатахъ (фиг. 198).



Фиг. 198.

Пусть OA есть полярная ось, O полюсъ и на кривой дана точка M своими координатами: $r = OM$; $\varphi = AOM$. Дифференціаломъ сектора называется площадь OMM', заключенная между радіусами векторами безконечно близкихъ на кривой точекъ M и M' и дугою MM'. Опишемъ изъ O радіусомъ OM окружность. Площадь сектора отличается на безконечно малую величину 2-го порядка отъ площади круговаго сектора OMB, которую, въ свою очередь можно принять за треугольникъ съ основаніемъ $MB = r\,d\varphi$, и высотою r. Площадь его будетъ:

$$\frac{r}{2} \,.\, r\,d\varphi \text{ или } \frac{r^2\,d\varphi}{2}.$$

Итакъ дифференціалъ du сектора равенъ:

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} = du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (495)$$

Дифференціалъ сектора въ Декартовыхъ координатахъ.

§ 276. Весьма полезные выводы дѣлаются иногда изъ выраженія этого дифференціала сектора въ Декартовыхъ координатахъ точки M (фиг. 199). Выведемъ это выраженіе.

Изъ чертежа имѣемъ:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

Но $cos\varphi = \frac{x}{r}$. Слѣдовательно:

$$\frac{r^2 d\varphi}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

откуда:

$$r^2 d\varphi = xdy - ydx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (496)$$

Слѣдовательно, согласно (495), дифференціалъ сектора будетъ:

$$\frac{xdy - ydx}{2} = du \quad . \ . \ . \ . \ (497)$$

Отсюда получается также интересное выраженіе угла θ, составляемаго касательною съ радіусомъ сектора. Именно: изъ чертежа (фиг. 199) имѣемъ:

$$r^2 = x^2 + y^2;$$

Фиг. 199.

дифференцируя, получимъ:

$$rdr = xdx + ydy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (498)$$

Дѣля (496) на (498), получимъ:

$$\frac{rd\varphi}{dr} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (499)$$

Но, по (349), $\frac{rd\varphi}{dr} = tg\,\theta$. Слѣдовательно:

$$tg\,\theta = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (500)$$

Площадь сектора.

§ 277. Интегрируя уравненіе (495), получимъ формулу:

$$U = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (501)$$

для вычисленія площади сектора, ограниченнаго двумя какими-либо радіусами векторами и заключенною между ними дугою кривой, выраженной въ полярныхъ координатахъ.

Секторъ логариѳмической спирали.

§ 278. Опредѣлимъ площадь сектора логариѳмической спирали (фиг. 200):

$$r = e^{m\varphi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (374)$$

По (501) имѣемъ:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\varphi'} e^{2m\varphi}\, d\varphi = \left[\frac{e^{2m\varphi}}{4m}\right]_{\varphi}^{\varphi'} = \frac{e^{2m\varphi'} - e^{2m\varphi}}{4m}.$$

Фиг. 200.

Согласно съ уравненіемъ кривой, получимъ:

$$U = \frac{e^{2m\varphi'} - e^{2m\varphi}}{4m} = \frac{r'^2 - r^2}{4m}.$$

Выпрямленіе дугъ кривыхъ.

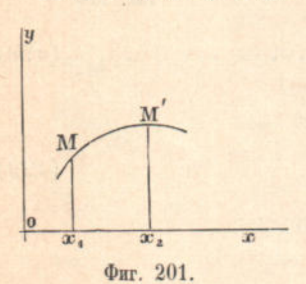
Общая формула выпрямленія дугъ кривыхъ въ Декартовыхъ координатахъ.

§ 279. Подъ именемъ выпрямленія (или ректификаціи) дугъ разумѣется вычисленіе длины дугъ кривыхъ данныхъ уравненіями.

Дифференціалъ дуги кривой мы уже вывели въ формулѣ (313) въ видѣ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (313)$$

Его, очевидно, можно представить въ видѣ:



Фиг. 201.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; . \; dx.$$

Интегрируя, получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}} \; . \; dx \; . \; . \; . \; (502)$$

Здѣсь интегрируется дифференціалъ пропорціональный dx, поэтому и предѣлы должны быть взяты для x: отъ $x = x_1$ до $x = x_2$, то есть опредѣляемъ длину дуги, заключающейся между точками M и M', соотвѣтствующими абсциссамъ x_1 и x_2 (фиг. 201).

По уравненію $y = f(x)$ кривой опредѣляемъ $\frac{dy}{dx}$; вставляемъ ея выраженіе въ (502) и, интегрируя, получимъ искомую длину дуги.

Выпрямленіе циклоиды.

§ 280. Отнесемъ циклоиду къ той же системѣ, какъ и въ § 280-омъ, то есть къ вершинѣ и проходящей чрезъ нея касательной (фиг. 193). Въ этой системѣ координатъ дифференціальное уравненіе циклоиды будетъ по формулѣ (492):

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (492)$$

Слѣдовательно формула (502) приметъ, для циклоиды, видъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{y}{2a - y}} \, dx.$$

Замѣнивъ здѣсь, посредствомъ (492), dx чрезъ dy и вычисляя, получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{y}{2a - y}} \sqrt{\frac{2a - y}{y}}\, dy = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2a}{2a - y}} \sqrt{\frac{2a - y}{y}}\, dy$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2a}{y}}\, dy = \sqrt{2a} \int_{x_1}^{x_2} y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \sqrt{2a} \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= 2\sqrt{2a} \left[\sqrt{y}\right]_{x_1}^{x_2} = 2\sqrt{2a} \left(\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}\right),$$

гдѣ y_2 и y_1 суть ординаты, соотвѣтствующія x_1 и x_2.

Интегрируя же въ предѣлахъ отъ $y = 0$ до $y = y_1$, получимъ:

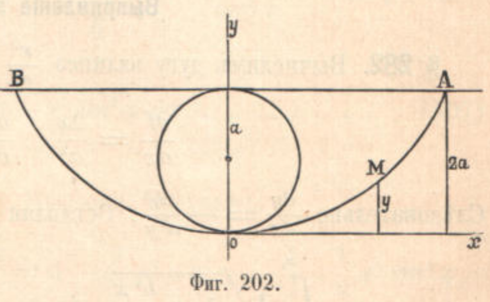
$$s = 2\sqrt{2ay}\,.$$

Если хотимъ опредѣлить дугу OMA (фиг. 202) полуциклоиды, то слѣдуетъ интегрировать отъ $y = 0$ до $y = 2a$ (какъ видно изъ чертежа), и тогда получимъ.

Дуга $OMA = 2\sqrt{2a\,2a} = 4a$.

Слѣдовательно дуга BOA всей вѣтви циклоиды будетъ:

$$s = 8a \quad . \quad . \quad . \quad (503)$$



Фиг. 202.

Оказывается, что длина циклоиды *соизмѣрима* съ радіусомъ a круга, производящаго ее своимъ катаньемъ. Длину окружности можно опредѣлить только приблизительно по ея радіусу, съ которымъ она несоизмѣрима (число П несоизмѣримо); длина же циклоиды опредѣляется совершенно точно по радіусу производящаго круга: она равна 8 радіусамъ или 4 діаметрамъ катящагося круга.

Выпрямленіе параболы.

§ 281. Опредѣлимъ длину дуги параболы $y^2 = 2px$. Имѣемъ (см. § 215):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (504)$$

Вставляя въ (502), получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, dx.$$

Замѣняя здѣсь dx величиною $\frac{dy}{p}\,y$, выводимою изъ (504), получимъ:

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\,\frac{dy}{p}\,y = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left(\frac{y^2+p^2}{y^2}\right)\frac{y^2}{p^2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{p}\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y^2+p^2}\,dy.$$

Этотъ интегралъ вычислимъ, замѣняя въ формулѣ [2] параграфа 270-го величину $(-a^2)$ чрезъ p^2. Получимъ:

$$s = \frac{1}{p}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{y^2+p^2}\,dy = \frac{1}{p}\left[\frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\,lg\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right)\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \left[\frac{y\sqrt{y^2+a^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,lg\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right)\right]_{y_1}^{y_2}.$$

Выраженіе весьма сложное.

Выпрямленіе эллипса.

§ 282. Вычислимъ дугу эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

Слѣдовательно $\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{a^2y}$. Вставляя въ (502), получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}\,dx \quad . \ . \ (505)$$

Опредѣляя y изъ уравненія $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипса, получимъ:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Вставляя эту величину въ (505), получимъ:

$$s = \int_{x}^{x_2}\sqrt{\frac{\frac{a^4b^2}{a^2}(a^2-x^2)+b^4x^2}{\frac{a^4b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx$$

Вводя эксцентриситетъ

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

эллипса, то есть полагая: $a^2 - b^2 = a^2e^2$, получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots (506)$$

Всѣ эти интегралы не могутъ быть выражены въ тѣхъ простыхъ функціяхъ, которыя до сихъ поръ указаны были въ нашемъ руководствѣ: они выражаются особыми, высшими трансцендентными *эллиптическими функціями* (см. алфавитный указатель).

Можно однако стремиться найти приближенное выраженіе интеграла (506). Будемъ его брать въ предѣлахъ отъ 0 до x. Введемъ вмѣсто x другое перемѣнное φ посредствомъ уравненія:

$$x = a \,.\, sin\,\varphi \,.\,; \quad \text{откуда } dx = a \,.\, cos\,\varphi\, d\varphi.$$

Формула (506) приметъ видъ:

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{a^2 - a^2e^2\, sin^2\varphi}{a^2 - a^2\, sin^2\varphi}}\, a\, cos\,\varphi\, d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1 - e^2\, sin^2\varphi}{cos^2\varphi}}\, a\, cos\,\varphi \,.\, d\varphi$$

$$= a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2\, sin^2\varphi}\, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (507)$$

Разлагая $\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}$ по биному Ньютона, получимъ:

$$\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi} = (1 - e^2\, sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\, e^2\, sin^2\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\, e^4\, sin^4\varphi$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}\, e^6\, sin^6\varphi - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\, e^8\, sin^8\varphi \ldots.$$

Вставляя въ (507), получимъ:

$$s = a \left[\varphi - \frac{1}{2}\, e^2 \int_0^{\varphi} sin^2\varphi \,.\, d\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^4}{4} \int_0^{\varphi} sin^4\varphi \,.\, d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\, e^6 \int_0^{\varphi} sin^6\varphi \,.\, d\varphi - \ldots \right] \ldots\ldots (508)$$

Далѣе мы не будемъ производить подробнаго вычисленія, а скажемъ только, что по вычисленіи входящихъ въ (508) интеграловъ, взявъ сначала предѣлы 0 и $\frac{\pi}{2}$, получили бы величину дуга четверти эллипса. Учетверивъ

этотъ результатъ, получили бы для длины s всего эллипса такое выраженіе:

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} = 2a\pi\Big[1 - \left(\frac{1}{2}\, e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\, e^2\right)^2$$

$$- \frac{1}{5}\left(\frac{1 \cdot 3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{5}{6}\, e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\, e^4\right)^2 - \ldots\Big] \; . \; . \; . \; (509)$$

При достаточно маломъ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, то есть когда полуоси a и b не слишкомъ отличаются одна отъ другой (эллипсъ не слишкомъ растянутъ), рядъ довольно быстро сходящійся (члены его быстро уменьшаются) и потому годится для приближеннаго вычисленія. Но удобнѣе для этого формула *), тоже приблизительная, слѣдующая: полная длина эллипса s почти равна:

$$s = \pi\left[\frac{a + b}{2} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (510)$$

при чемъ ошибка, получающаяся при вычисленіи длины эллипса по этой формулѣ, менѣе, чѣмъ

$$\frac{4a\pi\, e^6}{180\,(1 - e^3)},$$

гдѣ e есть эксцентриситетъ $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Общій способъ выпрямленія дугъ въ полярныхъ координатахъ.

§ 283. По формулѣ (348):

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2}.$$

Можно это представить такъ:

$$ds = d\varphi\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (511)$$

или такъ:

$$ds = dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (512)$$

Интегрируя, получимъ слѣдующія формулы, изъ коихъ и та и другая годятся для выпрямленія кривыхъ, выраженныхъ въ полярныхъ координатахъ:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi^2}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (513)$$

$$s = \int_{r_1}^{r^2}\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (514)$$

---

*) *Schlömilch*. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analisis; Aufgaben aus der Integralrechnung. 1874; p. 82.

Выпрямленіе дуги архимедовой спирали.

§ 284. Вычислимъ длину дуги архимедовой спирали, взятой отъ начала до точки, соотвѣтствующей углу φ. Интегралъ придется брать отъ 0 до φ. Уравненіе архимедовой спирали таково:

$$r = a\varphi,$$

откуда

$$\frac{dr}{d\varphi} = a.$$

По (513) имѣемъ:

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 + r^2} \cdot d\varphi.$$

Вставляя сюда, вмѣсто r, величину $a\varphi$ изъ уравненія спирали, получимъ

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\, d\varphi = a \int_0^\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$

По формулѣ [2] параграфа 270-го, принимая въ ней $-a^2 = 1$, получимъ:

$$s = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + lg\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right)\right].$$

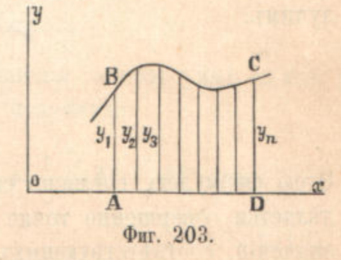
Приблизительное опредѣленіе площадей и точное вычисленіе средняго значенія функцій.

Элементарный способъ.

§ 285. Въ приложеніяхъ иногда удобнѣе, не гонясь за совершенною точностью, опредѣлять площади приблизительно.

Самымъ простымъ, но и наименѣе точнымъ, средствомъ является для этого слѣдующій способъ.

Положимъ требуется опредѣлить площадь $ABCD$, заключенную между кривою, хотя бы она была и незакономѣрная (см. § 8), двумя ея ординатами и осью абсциссъ (фиг. 203). Дѣлимъ AD на n равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проводимъ ординаты. Назовемъ y_1 ординату AB, y_2 слѣдующую и такъ далѣе; измѣряемъ ихъ. Сумма прямоугольниковъ, построенныхъ на этихъ ординатахъ, очевидно, будетъ тѣмъ менѣе отличаться отъ площади $ABCD$, чѣмъ на большее число частей раздѣленъ отрѣзокъ AD. Эту сумму и принимаемъ за площадь кривой. Она



Фиг. 203.

будетъ равна:

$$U = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_2)\,AD}{n} \quad \ldots \quad (515)$$

такъ какъ величина какого нибудь m-го прямоугольника будетъ $\frac{y_m AD}{n}$, потому что высота его $= y_m$, основаніе $= \frac{AD}{n}$.

Средняя ариѳметическая ординатъ.

§ 286. Среднею ариѳметическою нѣсколькихъ величинъ называется, какъ извѣстно, частное, происходящее отъ раздѣленія суммы этихъ величинъ на ихъ число.

Изъ формулы (515) видно, что среднее ариѳметическое *отмѣченныхъ* ординатъ равно

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_2}{n} = \frac{U}{AD}$$

= площади дѣленной на ея основаніе.
Отсюда слѣдуетъ, что среднее ариѳметическое *всѣхъ ординатъ* равно:

$$\frac{\int\limits_a^b y\,dx}{b - a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (516)$$

потому что интегралъ $\int\limits_a^b y\,dx$ выражаетъ, какъ мы видѣли (415), площадь $ABCD$ (фиг. 203), если a и b суть абсциссы ординатъ AB и DC; основаніе же AD площади равно $b - a$.

Формула (516) примѣнима только къ закономѣрнымъ кривымъ, выражаемымъ уравненіемъ

$$y = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (517)$$

Опредѣленіе средняго значенія функціи.

§ 287. Подставляя въ (516), вмѣсто y, его величину изъ (517) получимъ:

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b - a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (518)$$

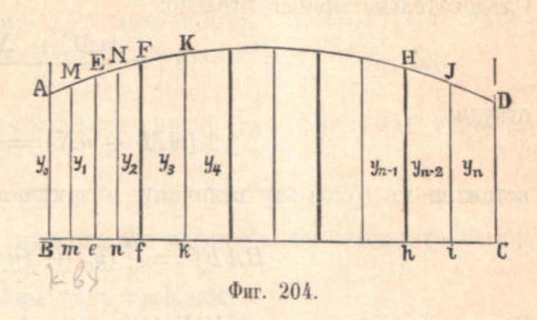
Этою формулою, согласно сказанному въ предъидущемъ параграфѣ, опредѣляется совершенно точно среднее значеніе функціи $f(x)$ изо всѣхъ ея значеній, соотвѣтствующихъ всѣмъ значеніямъ икса въ предѣлахъ отъ $x = a$ до $x = b$.

Этотъ выводъ чрезвычайно важенъ для многихъ приложеній и по истинѣ велика мощь интегральнаго исчисленія, дающаго возможность опре-

дѣлять среднее значеніе функціи изо *всѣхъ* ея значеній въ данныхъ предѣлахъ такъ же точно, какъ будто бы мы вычислили все безконечное множество значеній, принимаемыхъ функціею при непрерывномъ ея измѣненіи.

Правило Симпсона.

§ 288. Въ самыхъ разнообразныхъ изслѣдованіяхъ встрѣчается необходимость или въ опредѣленіи средняго значенія какой нибудь перемѣнной величины (функціи) или въ опредѣленіи площади. Между тѣмъ формула (518) примѣнима только къ закономѣрнымъ функціямъ, способъ же элементарный требуетъ проведенія весьма большого числа ординатъ для достиженія желаемой степени точности. Поэтому изобрѣтено было много другихъ способовъ, которые не требовали бы интегрированія и давали бы или болѣе точное сравнительно съ элементарнымъ способомъ рѣшеніе при томъ же числѣ ординатъ, или рѣшеніе той же точности при меньшемъ числѣ ординатъ.



Фиг. 204.

Одинъ изъ наиболѣе практичныхъ способовъ представляетъ собою правило Симпсона, къ описанію котораго мы и приступаемъ.

Положимъ, что намъ нужно опредѣлить площадь $ABCD$ (фиг. 204).

Дѣлимъ основаніе BC на *четное* число, $2n$, частей. Проводимъ изъ точекъ дѣленія ординаты y_0, y_1, y_2, $y_3 \dots y_{2n-2}$, y_{2-1}, y_{2n}. Вычисляемъ полосы, заключенныя между четными ординатами; напримѣръ вычислимъ площадь полосы $BAFf$, заключенный между ординатами y_0 и y_2. Для этого раздѣлимъ прямую Bf на 3 равныя части: $Bm = mn = nf$. Изъ точекъ дѣленія m и n проведемъ ординаты. Полоса $BAFf$ весьма мало отличается отъ суммы трехъ трапецій:

$$BAMm + mMNn + nNFf.$$

Вычисляемъ эту сумму по теоремѣ: площадь трапеціи = полусуммѣ ея параллельныхъ сторонъ, помноженной на высоту; получимъ:

$$\frac{1}{2}(y_0 + mM) \,.\, Bm + \frac{1}{2}(mM + nN) \,.\, mn + \frac{1}{2}(nN + fF) \,.\, nf \,.$$
$$= BAFf \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (519)$$

Назовемъ чрезъ b величину Be; такъ что:

$$b = \frac{BC}{2n}.$$

Сдѣлавъ въ (519) приведеніе и замѣтивъ, что

$$Bm = mn = nf = \frac{2b}{3}.$$

Получимъ:

$$BAFf = \frac{b}{3}[y_0 + 2(mM + nN) + fF] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (520)$$

Но въ трапеціи $mMNn$ ордината y_1 весьма мало отличается отъ ея средней линіи равной, какъ извѣстно, полусуммѣ параллельныхъ сторонъ. Слѣдовательно приблизительно:

$$y_1 = \frac{mM + Nn}{2},$$

откуда:

$$2(mM + nN) = 4y_1;$$

вставляя въ (520) эту величину, и замѣчая, что $fF = y_2$, получимъ:

$$BAFf = \frac{b}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Вычисляемая площадь $ABCD$ равна суммѣ такихъ полосъ. Слѣдовательно:

$$ABCD = \frac{b}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots$$

$$+ \frac{b}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) = \frac{b}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5$$

$$+ \ldots 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n} = \frac{b}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5$$

$$+ \ldots y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}].$$

Полагая

$s_1 =$ суммѣ нечетныхъ ординатъ,

$s_2 =$ суммѣ четныхъ ординатъ,

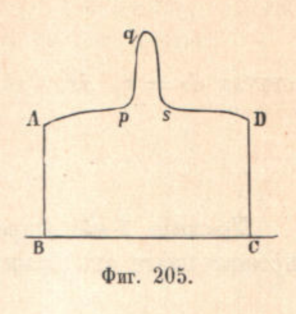
видимъ что:

$$ABCD = \frac{b}{3}[y_0 + 4s_1 + 2s_2 + y_{2n}] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (521)$$

Это и есть знаменитая приблизительная формула Симпсона: *площадь равна произведенію трети разстоянія* между сосѣдними ординатами *на сумму: первой и послѣдней* ординатъ, *учетверенной* суммы *нечетныхъ* и *удвоенной* суммы *четныхъ* ординатъ.

Еслибы мы просто складывали полоски вродѣ $mMNn$ даже болѣе узкія, чѣмъ полоски между сосѣдними ординатами y_0 и y_1, то получили бы площадь меньшую чѣмъ $ABCD$. Но при выводѣ формулы Симпсона мы дѣлаемъ кромѣ того другую ошибку, какъ разъ въ обратную сторону, замѣняя среднюю линію cE нѣсколько бо́льшею, сравнительно съ ней, орди-

натою y_1 и поступая такъ во всѣхъ полосахъ. Поэтому формула Симпсона во много разъ точнѣе элементарнаго способа при проведенiи того же числа ординатъ. Число это $2n$, потому что такiя ординаты какъ mM или nN входятъ въ разсужденiе но не въ формулу: измѣрить нужно только $2n$ ординатъ: $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$.



Фиг. 205.

Если бы упомянутыя ошибки, уклоняющiя выводъ въ противоположныя стороны, были одинаковы, то получилась бы совершенно точная величина; однако ошибки эти не одинаковы, и потому формула Симпсона всетаки приближенная.

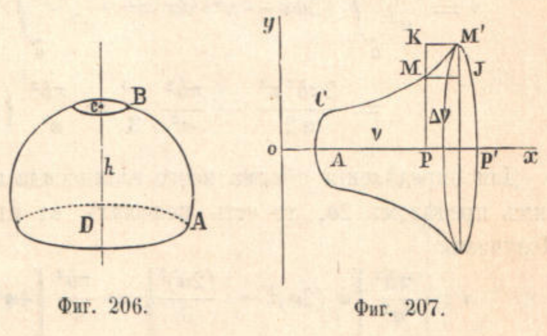
Само собою разумѣется, что мѣста, вродѣ pqs (фиг. 205), надо вычислять особо.

Вычисленiе объемовъ помощью простыхъ интеграловъ.

Объемы тѣлъ вращенiя.

§ 289. Тѣломъ вращенiя (фиг. 206) называется всякое тѣло, образованное вращенiемъ около оси h какой-нибудь кривой AB, находящейся съ h въ одной плоскости. Иногда говорятъ, что такое тѣло образовано вращенiемъ площади $ABCD$ около h.

Научимся вычислять объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенiя площади $ACMP$ (фиг. 207) около оси x.



Фиг. 206. Фиг. 207.

Если x возрастетъ на Δx, то объемъ v тѣла вращенiя возрастетъ на объемъ Δv, происходящiй отъ вращенiя площади $PMM'P'$. Этотъ объемъ Δv менѣе того, который происходитъ отъ вращенiя прямоугольника $PKM'P'$ и болѣе того, который происходитъ отъ вращенiя прямоугольника $PMJP'$. Эти два объема суть цилиндры: радiусъ основанiя 1-го равенъ y, радiусъ основанiя 2-го равенъ $y + \Delta y$; высоты же ихъ равны Δx.

Слѣдовательно:

$$\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x > \Delta v > \pi y^2 \Delta x.$$

Дѣля на Δx, получимъ:

$$\pi (y + \Delta y)^2 > \frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi y^2.$$

Величины, между которыми стоитъ $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ сольются въ предѣлѣ, и получимъ:

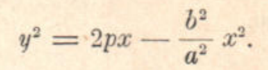
$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2,$$

откуда $dv = \pi y^2\, dx$. Слѣдовательно:

$$v = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (522)$$

Примѣръ 1-ый. Опредѣлить объемъ эллипсоида вращенія (фиг. 208), происшедшаго отъ вращенія эллипса около большой оси.

Отнесемъ эллипсъ къ его вершинѣ; по (99) уравненіе эллипса будетъ:



$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Фиг. 208.

Подставивъ сюда, вмѣсто p, его величину $\frac{b^2}{a}$, получимъ:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

По (522) имѣемъ для объема описаннаго площадью OAB:

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^x (2ax - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2 2a}{a^2}\int_0^x x\, dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^x x^2\, dx$$

$$= \frac{2\pi b^2 x^2}{a\, 2} - \frac{\pi b^2}{a^2}\,\frac{x^3}{3} = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Для опредѣленія объема всего эллипсоида вращенія нужно взять верхнимъ предѣломъ $2a$, то есть положить въ сдѣланномъ выводѣ $x = 2a$. Получимъ:

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a\,(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{3}\right] = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Итакъ:

$$v = \frac{4}{3}\pi a b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (523)$$

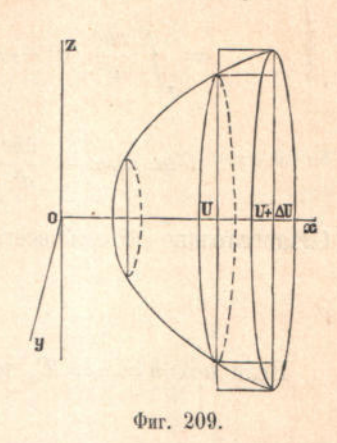
При $a = b = R$ получимъ объемъ шара $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Объемъ тѣла, площади сѣченій котораго параллельными плоскостями извѣстны.

§ 290. Если извѣстна площадь сѣченія тѣла плоскостью перпендикулярною къ оси x, проведенною на разстояніи x отъ начала, то опредѣляемъ объемъ тѣла слѣдующимъ образомъ (фиг. 209).

Назовемъ чрезъ u площадь такого сѣченія. Съ приращеніемъ икса на Δx площадь u перемѣщается и получаетъ приращеніе Δu. Полученное при этомъ приращеніе Δv объема будетъ заключено между двумя цилиндрами съ основаніями u и $u + \Delta u$, съ высотами Δx. Поэтому:

$$(u + \Delta u)\,\Delta x > \Delta v > u\Delta x.$$



Фиг. 209.

Дѣля на Δx, получимъ:

$$u + \Delta u > \frac{\Delta v}{\Delta x} > u.$$

Въ предѣлѣ:

$$\frac{dv}{dx} = u,$$

откуда $dv = udx$. Слѣдовательно:

$$v = \int_{x_1}^{x_2} u\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (524)$$

гдѣ x_1 и x_2 суть разстоянія отъ начала координатъ тѣхъ сѣченій, которыми ограниченъ вычисляемый объемъ.

Примѣръ. Опредѣлить объемъ трехоснаго эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Уравненіе кривой, получаемой въ сѣченіи эллипсоида плоскостью GHP проведенною на разстояніи x_1 отъ начала будетъ (фиг. 210):

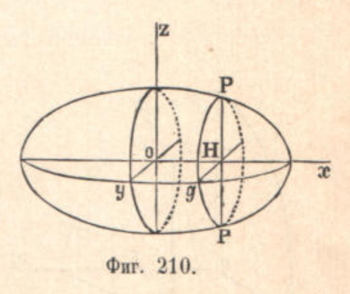
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_1^{\,2}}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (525)$$

Если сдѣлаемъ въ немъ $z = 0$, то получимъ:

$$y = GH = b\sqrt{1 - \frac{x_1^{\,2}}{a^2}}\,.$$

Если сдѣлаемъ въ (525) $y = 0$, то получимъ:

$$z = HP = c\sqrt{1 - \frac{x_1^{\,2}}{a^2}}\,.$$



Фиг. 210.

Это будутъ оси эллиптическаго сѣченія. Но по (490) площадь такого эллипса $= HP \,.\, GH \,.\, \pi$. Слѣдовательно площадь сѣченія будетъ:

$$HP \,.\, GH \,.\, \pi = \pi \,.\, bc\left(1 - \frac{x_1^{\,2}}{a^2}\right).$$

Дѣлая x_1 перемѣннымъ, мы должны замѣнить здѣсь x_1 чрезъ x. Получимъ: площадь сѣченія $u = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Вставляя въ (524) найдемъ поло-

вину всего объема:

$$\frac{v}{2} = \int_0^a u\,du = \int_0^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \int_0^a \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx = \pi bc \int_0^a dx - \frac{\pi bc}{a^2} \int_0^a x^2\, dx$$

$$= \pi bca - \frac{\pi bc\, a^3}{a^2 \,.\, 3} = \frac{\pi bc}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2\ \pi abc}{3}\,.$$

Слѣдовательно объемъ всего эллипсоида будетъ:

$$v = \frac{4}{3}\ \pi abc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (526)$$

Если $a = b = c = R$, то получаемъ объемъ шара $\frac{4}{3}\ \pi R^3$.

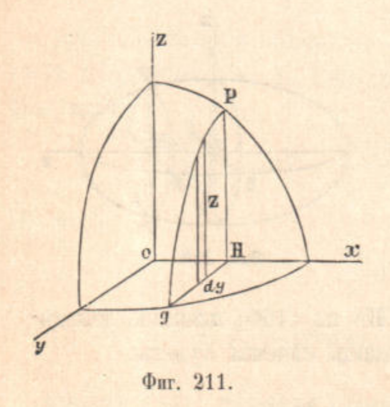
Вычисленіе объемовъ тѣлъ помощью двойныхъ интеграловъ.

Общія формулы

§ 291. Иногда опредѣленіе самой площади u сѣченія, разсматриваемаго въ предъидущемъ параграфѣ, требуетъ особаго интегрированія. Въ такомъ случаѣ получаются двойные интегралы.

Пояснимъ, какъ это выходитъ и что значитъ двойной интегралъ.

Для вычисленія объема по формулѣ (524) нужно знать площадь U сѣченія GHP (фиг. 211). Элементъ этого сѣченія, какъ видно изъ чертежа, равенъ zdy. Интегрируя этотъ дифференціалъ въ предѣлахъ отъ 0 до y, получимъ площадь U. Итакъ по (524):



Фиг. 211.

$$v = \int_0^a u dx \quad \ldots \quad (524)$$

по приведенному разсужденію:

$$u = \int_0^y z\, dy.$$

Вставляя въ (524) эту величину u, получимъ:

$$v = \int_0^a \left[\int_0^y z\ dy\right] dx = \int_{x=0}^{x=a} \left[\int_{y=0}^{y=y} z\ dy\right] dx.$$

Пишется это такъ:

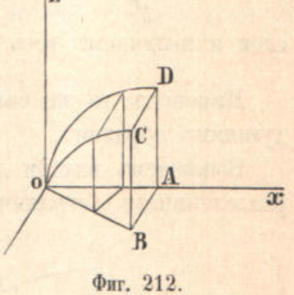
$$\mathsf{v} = \int_0^a \int_0^y z\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=y} z\,dx\,dy \;.\;.\;.\;.\;.\;(527)$$

или такъ

$$\mathsf{v} = \int_0^a dx \int_0^y z\,dy = \int_{x=0}^{x=a} dx \int_{y=0}^{y=y} z\,dy \;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(528)$$

Примѣръ. Опредѣлить объемъ $ABCDO$ (фиг. 212), ограниченный: плоскостью $(x,\ z)$, плоскостью (xy), плоскостью OCB, уравненіе которой $y = \frac{b}{a}\,x$, плоскостью $ABCD$ проведенною перпендикулярно оси x на разстояніи a отъ начала и поверхностью CDO, уравненіе которой:

$$z = \frac{1}{2}\,(Ax^2 + By^2).$$



Фиг. 212.

По формулѣ (528):

$$\mathsf{v} = \int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}x} \frac{1}{2}\,(Ax^2 + By^2)\,dy.$$

Верхній предѣлъ интеграціи по y есть y, опредѣляемое изъ уравненія $y = \frac{b}{a}\,x$ плоскости OCB, потому что подвижная площадь u ограничивается этою плоскостью (фиг. 212).

Интегрируемъ по y въ предположеніи, что x постоянное, такъ какъ интеграція по y распространяется на площадь u, которая пока неподвижна: интеграціею же по x перемѣщаемъ эту площадь. Поэтому:

$$\mathsf{v} = \int_0^a dx\,\left[\frac{1}{2}\,Ax^2 \int_0^{\frac{b}{a}x} dy + \frac{1}{2}\,B \int_0^{\frac{b}{a}x} y^2\,dy\right]$$

$$= \int_0^a dx\left[\frac{1}{2}\;Ax^2\,[y]_0^{\frac{b}{a}x} + \frac{1}{2}\,B\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{a}x}\,\right]$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{2}\,Ax^2\;\frac{b}{a}\;x + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{B}{}\;\frac{b^3}{a^3}\;x^3\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\;A\;\frac{b}{a} + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{B}{}\;\frac{b^3}{a^3}\right)\int_0^a x^3\,dx = \left(\frac{1}{2}\;A\;\frac{b}{a} + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{B}{}\;\frac{b^3}{a^3}\right)\;\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \left(\frac{1}{2}\;A\;\frac{b}{a} + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{B}{}\;\frac{b^3}{a^3}\right)\;\frac{a^4}{4} = \frac{ab}{8}\;\left(Aa^2 + \frac{1}{3}\;Bb^2\right).$$

Формулы § 291-го съ другой точки зрѣнія.

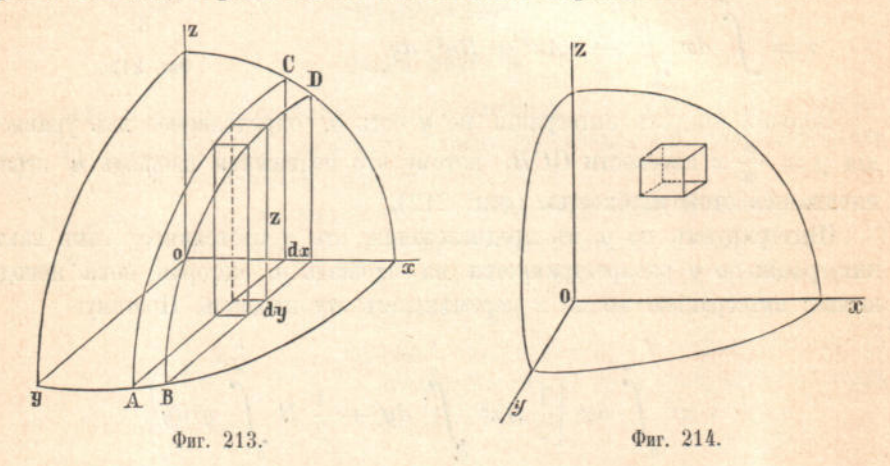
§ 292. Формула (527) можетъ быть истолкована еще слѣдующимъ образомъ. Въ этой формулѣ:

$$\nu = \int_0^a \int_0^y z\,dx\,dy$$

величина $dx\,dy$ есть безконечно малый прямоугольникъ, представляющій собою основаніе безконечно тонкаго столбика (фиг. 213), высота котораго z. Интегрируя по y, суммируемъ такіе столбики и получаемъ слой $ABCD = \int_0^y z\,dx\,dy$. Интегрируя этотъ интегралъ по x суммруемъ такіе слои и получаемъ весь объемъ $\nu = \int_0^a \int_0^y z\,dx\,dy$.

Наконецъ та же самая формула можетъ быть разсматриваема слѣдующимъ образомъ.

Вырѣзаемъ внутри даннаго (фиг. 214) объема безконечно малый параллелепипедъ, ограниченный плоскостями параллельными плоскостямъ



Фиг. 213.

Фиг. 214.

координатъ и притомъ такой величины, что ребра его суть $dx\,dy\,dz$ и параллельны тѣмъ осямъ, обозначенія коихъ x, y, z, стоятъ подъ знаками этихъ дифференціаловъ. Объемъ такого параллелепипида будетъ:

$$dx\,dy\,dz.$$

Напишемъ:

$$\int_0^a \int_0^y \int_0^z dx\,dy\,dz \quad \dots\dots\dots \quad (529)$$

Интегралъ $\int_0^z$ складываетъ такіе параллелепипеды по направленію параллельному оси z, при чемъ получается столбикъ (фиг. 213). Инте-

гралъ $\int\limits_0^y$ складываетъ такіе столбики по направленію параллельному оси y, при чемъ получается слой $ABCD$ (фиг. 213). Наконецъ интегралъ $\int\limits_0^a$ складываетъ такіе слои по направленію параллельному оси x, при чемъ получается весь объемъ v.

Интегрируя по z мы считаемъ постоянными x и y, такъ что приходится все выносить за знакъ $\int\limits_0^z$ кромѣ dz; но $\int\limits_0^z dz = z$. Поэтому:

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^y \int\limits_0^z dx\,dy\,dz = \int\limits_0^a \int\limits_0^y z\,dx\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; (530)$$

и мы опять получили формулу (527):

$$v = \int\limits_0^a \int\limits_0^y z\,dx\,dy.$$

Многократные интегралы.

§ 293. Въ послѣднихъ параграфахъ мы невольно встрѣтились съ *двойными* и *тройными* интегралами. Можно обобщить это понятіе и разсматривать n кратные интегралы вида:

$$\int\limits_0^a \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \ldots \int\limits_{w_1}^{w_2} f(x, y, z \ldots w)\,dx\,dy\,dz \ldots dw.$$

Необходимо отличать эти интегралы, относящіеся ко многимъ перемѣннымъ (при чемъ каждый отдѣльный интегралъ, входящій въ составъ такого кратнаго интеграла, распространяется на свое перемѣнное), *отъ послѣдовательнаго интегрированія по одному и тому же перемѣнному*, напримѣръ такого:

$$\int\limits_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int\limits_0^x \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{x^4}{12}$$

$$\int \frac{x^4}{12}\,dx = \frac{x^5}{60}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Примѣръ 1-ый. Вычислимъ $\int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^c z^m\,dx\,dy\,dz$.

Послѣдовательный ходъ вычисленія будетъ въ подробностяхъ таковъ:

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^c z^m\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[\frac{z^{m+1}}{m+1}\right]_0^c dx\,dy=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\frac{c^{m+1}}{m+1}\,dx\,dy$$

$$=\frac{c^{m+1}}{m+1}\int\limits_0^a\int\limits_0^b dx\,dy=\frac{c^{m+1}}{m+1}\int\limits_0^a[y]_0^b\,dx=\frac{c^{m+1}}{m+1}\int\limits_0^a b\,dx$$

$$=\frac{c^{m+1}\,b}{m+1}\int\limits_0^a dx=\frac{c^{m+1}\,b}{m+1}[x]_0^a=\frac{c^{m+1}\,ba}{m+1}.$$

Примѣръ 2-ой. Вычислимъ $\int\limits_a^b\int\limits_0^y\int\limits_0^y z^m\,dx\,dy\,dz$, отличающійся отъ даннаго въ предъидущемъ примѣрѣ только предѣлами. Вычисленіе будетъ таково:

$$\int\limits_a^b\int\limits_0^y\int\limits_{z=0}^{z=y} z^m\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b\int\limits_0^y\left[\frac{z^{m+1}}{m+1}\right]_0^y dxdy=\int\limits_a^b\int\limits_0^y\frac{y^{m+1}}{m+1}\,dx\,dy$$

$$=\int\limits_a^b\left[\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\right]_0^y dx=\int\limits_a^b\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\,dx=\left[\frac{y^{m+2}\,x}{(m+1)(m+2)}\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$=\frac{y^{m+2}\,b}{(m+1)(m+2)}-\frac{y^{m+2}\,a}{(m+1)(m+2)}=\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)}(b-a).$$

Примѣръ 3-ій. Вычислимъ $\int\limits_0^a\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{z=0}^{z=y} z^m\,dx\,dy\,dz$, отличающійся только предѣлами отъ интеграловъ двухъ предъидущихъ примѣровъ.

$$\int\limits_0^a\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{z=0}^{z=y} z^m\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^a\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{y^{m+1}}{m+1}\,dx\,dy=\int\limits_0^a\left[\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\right]_{b_1}^{b_2}dx$$

$$=\int\limits_0^a\left[\frac{b_2^{\,m+2}}{(m+1)(m+2)}-\frac{b_1^{\,m+2}}{(m+1)(m+2)}\right]dx$$

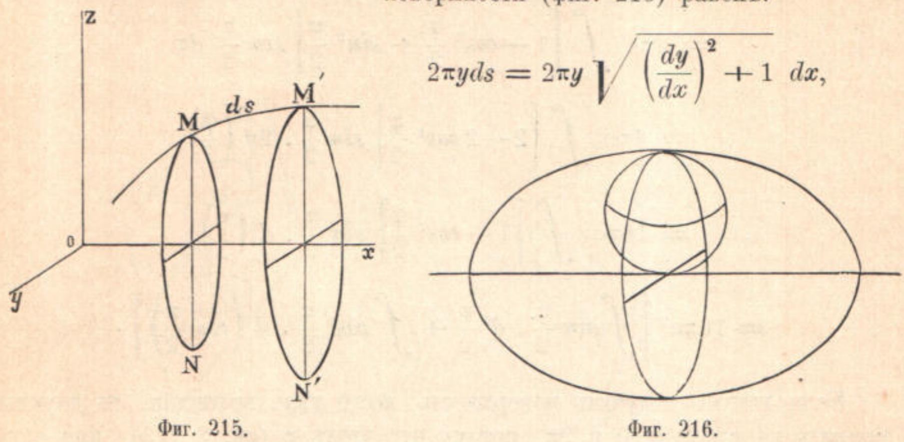
$$=\frac{a}{(m+1)(m+2)}\left(b_2^{\,m+2}-b_1^{\,m+2}\right).$$

Вычисленіе величины поверхностей.

Величина поверхностей вращенія.

§ 294. Если y есть ордината данной кривой и отъ вращенія этой кривой около оси x происходитъ поверхность, то элементъ $MM'N'N$ этой поверхности (фиг. 215) равенъ:

$$2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\ dx,$$



Фиг. 215. Фиг. 216.

гдѣ $ds = MM' =$ элементъ дуги данной кривой. Поэтому вся поверхность пояса, ограниченнаго плоскостями $x = x_1$; $x = x_2$ будетъ:

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\ dx = 2\pi \int y\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \ (531)$$

Примѣръ. Опредѣлить величину (площадь) поверхности, образованной вращеніемъ циклоиды около ея основанія (фиг. 216).

Уравненіе циклоиды (см. § 223) суть:

$$x = a\ (\varphi - \sin \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (380)$$

$$y = a\ (1 - \cos \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (381)$$

Вычисляемъ:

$$dx = a\ (1 - \cos \varphi)\ d\varphi$$

$$dy = a\ .\ \sin \varphi\ d\varphi$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2\ (1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}\ d\varphi$$

$$= a \sqrt{2\ (1 - \cos \varphi)}\ d\varphi$$

$$ds = a \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}\ \ d\varphi = 2a \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi.$$

Вставляя въ (531), получимъ:

$$2\pi \int y \,.\, 2a \,.\, \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 4\pi a^2 \int (1 - \cos\varphi) \,.\, \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 4\pi a^2 \int \left(1 - \cos 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 4\pi a^2 \int \left[1 - \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right] \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= 4\pi a^2 \int \left[2 - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right] \sin\frac{\varphi}{2} \,.\, 2d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 16\pi a^2 \int \left[1 - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right] \sin\frac{\varphi}{2} \,.\, d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 16\pi a^2 \left[\int \sin\frac{\varphi}{2} \,.\, d\,\frac{\varphi}{2} + \int \cos^2\frac{\varphi}{2} \,.\, d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Если хотимъ получить поверхность всего тѣла вращенія, то должны принять за предѣлы 0 и 2π, потому что уголъ φ (см. § 223), при описаніи точкою катящагося круга полной вѣтви циклоиды, измѣняется отъ 0 до 2π. Получимъ:

$$16\pi a^2 \left[\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\,\frac{\varphi}{2} + \int_0^{2\pi} \cos^2\frac{\varphi}{2} \,.\, d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$= 16\pi a^2 \left[-\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 16\pi a^2 \left[-\cos\pi + \cos 0 + \frac{1}{3}\cos^3\pi - \frac{1}{3}\cos^3 0\right]$$

$$= 16\pi a^2 \left[1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right] = 16\pi a^2 \left[2 - \frac{2}{3}\right] = 16\pi a^2 \,.\, \frac{4}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

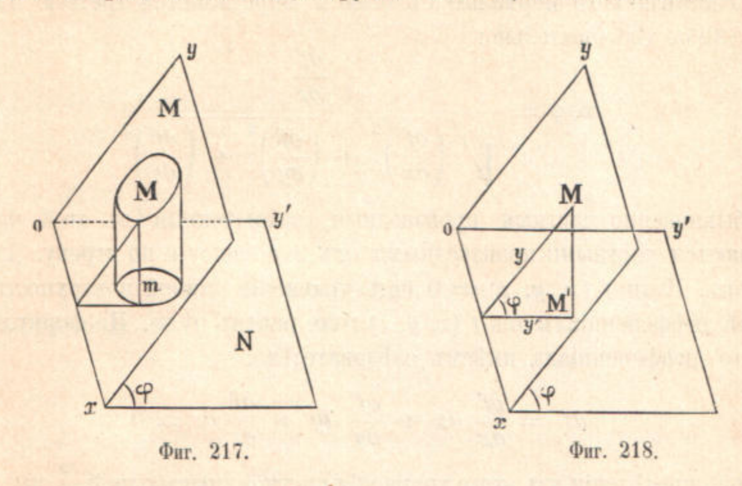
Итакъ, полная поверхность тѣла, происходящаго отъ вращенія циклоиды около ея основанія $= \frac{64\,\pi a^2}{3}$. Поверхность шара, образованннаго отъ вращенія около діаметра образующаго круга $= 4\pi a^2$. Слѣдовательно поверхность циклоидальнаго тѣла болѣе поверхности этого шара въ $\frac{16}{3}$ разъ.

Проекція площади на плоскость.

§ 295. Представимъ себѣ двѣ плоскости *M* и *N* (фиг. 217). Положимъ, что въ плоскости *M* дана фигура *M*. Геометрическое мѣсто осно-

ванiй перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ линiи, ограничивающей M, на плоскость N, называется проекцiею фигуры m на плоскость N.

Пусть φ есть уголъ, составляемый плоскостью M фигуры и плоскостью N ея проекцiи. Примемъ прямую пересѣченiя этихъ плоскостей за ось x и какой-нибудь перпендикуляръ, проведенный къ ней въ плоскости M, за ось y. Перпендикуляръ же проведенный къ ox изъ o въ плоскости N примемъ за ось y' другой системы, лежащей въ N.



Фиг. 217. Фиг. 218.

Изъ чертежа (фиг. 218) видно, что ордината проекцiи M' равна ординатѣ точки M помноженной на $\cos\varphi$;

$$y' = y\cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (532)$$

Но по (415):

$$\text{площадь } M = \int y\,dx$$

$$\text{площадь } m = \int y'\,dx = \int y\cos\varphi\,.\,dx = \cos\varphi\int y\,dx = M\cos\varphi.$$

Слѣдовательно: *площадь проекцiи равна произведенiю площади проектируемой фигуры на косинусъ угла, составляемаго плоскостью фигуры съ плоскостью проекцiи:*

$$m = M\cos\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (533)$$

Вычисленiе площадей поверхностей.

§ 296. Мы видѣли въ § 294 какъ вычисляются площади поверхностей вращенiя; посмотримъ, какъ вычисляются площади какихъ бы то ни было закономѣрныхъ поверхностей.

Элементъ поверхности можно представить себѣ какъ элементъ касательной плоскости. Пусть уголъ, составляемый касательною плоскостью съ плоскостью (x, y) будетъ φ. Назовемъ элементъ поверхности $d\sigma$, проек-

цію этого элемента на плоскости (x, y) обозначимъ чрезъ $d\sigma'$. По сказанному въ предъидущемъ параграфѣ:

$$d\sigma' = d\sigma \,.\, \cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (534)$$

Опредѣлимъ теперь уголъ φ. Уголъ φ, составляемый касательною плоскостью съ плоскостью (x, y) равенъ углу, составляемому соотвѣтственно перпендикулярными къ нимъ: нормалью и осью z. Но косинусъ угла, составляемаго нормалью съ осью z опредѣляется третьею изъ формулъ (395). Слѣдовательно:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \quad \ldots \ldots \quad (535)$$

Обыкновенно частныя производныя, заключенныя въ этой формулѣ, замѣняются частными производными отъ z по иксу и по игреку. Дѣлается это такъ. Если $f(x, y, z) = 0$ есть уравненіе данной поверхности, то и полный дифференціалъ отъ $f(x, y, z)$ тоже равенъ нулю. По формулѣ (256) полнаго дифференціала имѣемъ слѣдовательно:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,\partial z = 0 \quad \ldots \ldots \quad (536)$$

При опредѣленіи изъ этого уравненія частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ мы должны въ немъ y считать постояннымъ, слѣдовательно $\frac{\partial f}{\partial y}$ нулемъ. Поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (537)$$

Точно также найдемъ изъ (536), полагая x постояннымъ:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (538)$$

Эти величины $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ встрѣчаются въ анализѣ весьма часто, и для нихъ существуетъ особое обозначеніе буквами p и q:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (539)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (540)$$

Чтобы замѣнить въ (535) частныя производныя отъ f частными производными отъ z, дѣлимъ и числителя и знаменателя на $\frac{\partial f}{\partial z}$. Получимъ:

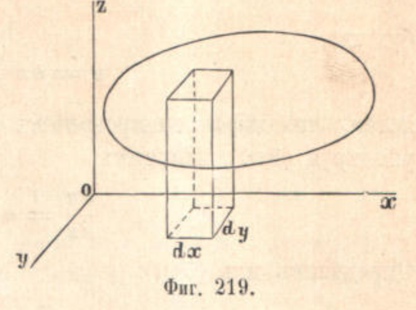
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (541)$$

Подставляя эту величину въ (534), получимъ:

$$d\sigma' = \frac{d\sigma}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \quad . \quad . \quad (542)$$

Принимая за элементъ проекціи $dx\,dy$ (фиг. 219), получимъ изъ (542):

$$dx\,dy = \frac{d\sigma}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$



Фиг. 219.

откуда

$$\sqrt{p^2+q^2+1}\;dx\,dy = \text{дифференціалъ поверхности} \quad . \quad . \quad . \quad (543)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\sigma = \int\!\!\int \sqrt{p^2+q^2+1}\;dx\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (544)$$

По этой формулѣ и вычисляются площади поверхностей, хотя бы онѣ и не были поверхностями вращенія.

ГЛАВА III.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

Опредѣленіе.

§ 297. Дифференціальнымъ уравненіемъ n-го порядка съ двумя перемѣнными называется уравненіе, заключающее въ себѣ: независимое перемѣнное, функцію этого перемѣннаго и производныя или дифференціалы этой функціи до n-го порядка включительно.

Такъ напримѣръ дифференціальное уравненіе 1-го порядка съ двумя перемѣнными имѣетъ видъ:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

урвненіе же:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

будетъ второго порядка.

Интегрировать дифференціальное уравненіе съ двумя перемѣнными x, y значитъ найти такое соотношеніе между независимымъ перемѣн-

нымъ x и его функціею y, которое не заключало бы производныхъ, но удовлетворяло бы данному дифференціальному уравненію, то есть, приводилось бы дифференцированіемъ къ данному.

Напримѣръ, интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - xy = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (545)$$

будетъ:

$$y = ax + C\sqrt{1 + x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (546)$$

потому что дифференцированіемъ его придемъ къ (545). Именно: дифференцируя (546), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = a + \frac{Cx}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (547)$$

Опредѣливъ изъ (546):

$$C = \frac{y - ax}{\sqrt{1 + x^2}},$$

и вставляя эту величину въ (547), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = a + \frac{xy - ax^2}{1 + x^2},$$

или:

$$\frac{dy}{dx}(1 + x^2) = a + ax^2 + xy - ax^2.$$

Здѣсь $+ ax^2$ и $- ax^2$ уничтожаются и получается данное дифференціальное уравненіе (545).

Отдѣленіе перемѣнныхъ.

§ 298. Всего проще интегрируются тѣ уравненія, въ которыхъ можно вынести перемѣнное x и dx въ одну сторону уравненія, а перемѣнныя y и dy—въ другую; другими словами, когда легко привести данное уравненіе къ виду:

$$f(x) \,.\, dx = \varphi(x) \,.\, dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (548)$$

Приведеніе дифференціальнаго уравненія къ такому виду называется *отдѣленіемъ* перемѣнныхъ.

Если такое отдѣленіе перемѣнныхъ исполнено, то изъ (548) получимъ:

$$\int \varphi(x)\, dx = \int \varphi(x)\, dy$$

и остается только вычислить интегралы.

Примѣръ. Интегрировать уравненіе:

$$x^m + y^n \frac{dy}{dx} = 0;$$

Отдѣливъ перемѣнныя, получимъ:

$$x^m\,dx + y^n\,dy = 0\,,$$

откуда:

$$\int x^m\,dx + \int y^n\,dy = 0\,.$$

Отсюда получимъ:

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C\,.$$

Мы увидимъ, что далеко не во всѣхъ уравненіяхъ перемѣнныя такъ легко отдѣляются.

Однородныя уравненія.

§ 299. Однородною функціею перемѣнныхъ x, y называется такая ихъ функція, всѣ члены которой одинаковаго измѣренія по отношенію къ перемѣннымъ. Напримѣръ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + y$$

есть однородная функція 1-го порядка; функція:

$$Ax\sqrt{x^2 + 3xy} + x^2 + Bxy + y^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (549)$$

однородная функція 2-го порядка, потому что всѣ члены ея 2-го измѣренія относительно перемѣнныхъ.

Всякая однородная функція m-го порядка можетъ быть выражена въ видѣ:

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (550)$$

Напримѣръ (549), если въ ней вывести за скобки x^2, получитъ видъ:

$$x^2\left[A\sqrt{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)} + 1 + B\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right].$$

Однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ съ двумя перемѣнными называется уравненіе вида:

$$M\,dx + N\,dy = 0\,,$$

въ которомъ M и N суть однородныя функціи отъ (x, y).

Такія уравненія интегрируются слѣдующимъ образомъ. По формулѣ (550) его приводятъ къ виду:

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0\,.$$

Дѣля на x^m, получаютъ:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) dx + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (551)$$

Дѣлаютъ затѣмъ подстановку:

$$\frac{y}{x} = z,$$

откуда: $$dy = x\,dz + z\,dx.$$

Подставляя эти величины $\left(\frac{y}{x}\right)$, dy въ (551), получаютъ:

$$f(z)\,dx + \varphi(z)\,.\,[x\,dz + z\,dx] = 0.$$

или:

$$[f(z) + z\,.\,\varphi(z)]\,dx + x\,.\,\varphi(z)\,.\,dz = 0.$$

Дѣля обѣ части этого уравненія на $x\,[f(z) + z\varphi(z)]$, получаютъ уравненіе:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z)\,dz}{f(z) + z\,.\,\varphi(z)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (552)$$

въ которомъ перемѣнныя оказываются отдѣленными.

Изъ (562) получимъ:

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{\varphi(z)\,dz}{f(z) + z\,.\,\varphi(z)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (553)$$

Остается только вычислить интегралы, или, какъ говорятъ, *задача приведена къ квадратурамъ* (къ вычисленію интеграловъ вида $\int F(x)\,dx$). Затѣмъ нужно еще вставить $\frac{y}{x}$ вмѣсто z.

Примѣръ. Интегрировать уравненіе:

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Здѣсь перемѣнныя не отдѣляются: способъ § 298-го непримѣнимъ.

Вынося x за скобки, получимъ:

$$dy - \left(\frac{y}{x}\right)dx = dx\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

или:

$$\left[\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right)\right]dx = dy;$$

полагая:

$$\left(\frac{y}{x}\right) = z, \quad \text{откуда } dy = x\,dz + z\,dz,$$

получимъ:

$$[\sqrt{1 + z^2} + z]\,dx = x\,dz + z\,dx,$$

или:

$$\sqrt{1 + z^2}\,dx = x\,dz.$$

Дѣля на $x\sqrt{1 + z^2}$ получимъ:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Здѣсь перемѣнныя уже отдѣлены. Получимъ:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Вычисляя квадратуры (интегралы), и пользуясь формулою [1] параграфа 270-го, получимъ:

$$lg\, x = lg\, (z + \sqrt{1 + z^2}) + C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (554)$$

Остается замѣнить, обратно, z чрезъ $\frac{y}{x}$; послѣ этой замѣны получимъ:

$$lg = lg \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) + C \; . \; . \; . \; . \; . \; (555)$$

Было бы удобнѣе, пользуясь совершенною произвольностью постояннаго C, дать ему въ (554) видъ lgc. Тогда получили бы:

$$lg\, x = lg\, (z + \sqrt{1 + z^2}) + lgc,$$

или:

$$lg\, x = lg\, c\, .\, (z + \sqrt{1 + z^2}),$$

или:

$$x = c\, (z + \sqrt{1 + z^2}).$$

Подставляя, вмѣсто z, величину $\frac{y}{x}$, получимъ:

$$x = c \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right)$$

или:

$$x^2 = c\, (y + \sqrt{x^2 + y^2})$$

или:

$$(x^2 - cy)^2 = c^2\, (x^2 + y^2)$$

или:

$$x^4 + c^2y^2 - 2cx^2y = c^2x^2 + c^2y^2$$

или:

$$x^4 - 2cx^2y = c^2x^2$$

или наконецъ:

$$x^2 = 2cy + c^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (556)$$

Провѣримъ это рѣшеніе. Дифференцируя, получимъ:

$$2x\, dx = 2c\, dy$$

откуда:

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (557)$$

Дѣля (556) на c^2, получимъ:

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{2y}{c} - 1 = 0$$

откуда, пользуясь (557), получимъ:

$$\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$$

или:

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx,$$

то есть данное дифференціальное уравненіе.

Уравненіе $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right) + f(x) \,.\, F\left(\frac{y}{x}\right)$.

§ 300. Такою же подстановкою $\left(\frac{x}{y}\right) = z$ приводится къ квадратурѣ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right) + f(x) \,.\, F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (558)$$

Дѣйствительно, полагая $z = \frac{y}{x}$, откуда $dy = x\,dz + z\,dx$, получимъ:

$$x\,dz + z\,dx = z\,dx + f(x) \,.\, F(z)\,dx$$

или

$$x\,dz = f(x)\,F(z)\,dx$$

или

$$\frac{dz}{F(z)} = \frac{f(x)\,dx}{x}$$

откуда:

$$\int \frac{dz}{F(z)} + \int \frac{f(x)\,dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (559)$$

Уравненіе вида.

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$.

§ 301. Довольно значительный классъ уравненій 1-го порядка заключенъ въ формулѣ:

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \,.\, y = \varphi(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (560)$$

при всемъ разнообразіи функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$. Положимъ, для краткости: $f(x) = P$; $\varphi(x) = Q$, такъ что уравненіе (560) представится въ видѣ:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (561)$$

Оно интегрируется подстановкою:

$$y = uz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (562)$$

А именно: изъ (562) слѣдуетъ:

$$u\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dx}z=\frac{dy}{dx}$$

вслѣдствіе чего (561) принимаетъ видъ:

$$u\frac{dz}{dx}+\frac{du}{dx}z+Puz=Q$$

или:

$$u\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)z+Q \quad \ldots\ldots (563)$$

Избираемъ такіе u и z, чтобы $\frac{du}{dx}+Pu=0$.
Для этого нужно, чтобы:

$$\frac{du}{u}=-Pdx$$

откуда:

$$lg\, u=-\int P\,dx$$

$$u=e^{-\int Pdx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (564)$$

Между тѣмъ (563) при такихъ u и z обратится въ:

$$u\frac{dz}{dx}=Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (565)$$

Подставляя въ (565) величину u изъ (564), получимъ:

$$e^{-\int Pdx}\frac{dz}{dx}=Q$$

или:

$$\frac{dz}{dx}=Qe^{\int Pdx}.$$

Отсюда:

$$z=\int Qe^{\int Pdx}\,dx+C$$

и вслѣдствіе этого согласно (562) и (564):

$$y=uz=e^{-\int Pdx}z=e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}\,dx=C\right] \quad . \; . (566)$$

Примѣръ. $\frac{dy}{dx}+y=x^3$.
Здѣсь $P=1$; $Q=x^3$. Слѣдовательно по (566):

$$y=e^{-\int dx}\left[\int x^3e^{\int dx}\,dx+C\right]=e^{-x}\left[\int x^3\,e^x\,dx+C\right]$$

или:

$$y=Ce^{-x}+e^{-x}\int x^3\,e^x\,dx=Ce^{-x}+x^3-3x^2+6x-6.$$

Условіе интегрируемости полнаго дифференціала.

§ 302. Мы видѣли въ § 152-мъ, что, если

$$z = f(x, y), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (567)$$

то величина

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dz + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad \ldots (568)$$

называется полнымъ дифференціаломъ функціи $f(x, y)$.

Дифференціалъ функціи одного перемѣннаго всегда имѣетъ свой интегралъ, хотя бы его было трудно найти или даже мы не умѣли бы его найти. Дифференціалъ же многихъ перемѣнныхъ не всегда имѣетъ интегралъ. Можетъ найтись такой дифференціалъ, для котораго не существуетъ соотвѣтствующаго интеграла. Мы сейчасъ это покажемъ, уяснивъ—какія условія должны быть соблюдены для того, чтобы данный дифференціалъ обладалъ соотвѣтствующимъ ему интеграломъ: для того чтобы данный дифференціалъ былъ *полнымъ* дифференціаломъ нѣкоторой функціи.

Посмотримъ, именно, какому условію долженъ удовлетворять дифференціалъ вида:

$$M\,dx + N\,dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (569)$$

для того, чтобы обладать интеграломъ. Здѣсь M и N суть нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ икса и игрека.

Сравнивая (569) съ (568), видимъ, что:

$$M = \frac{\partial z}{\partial x};\ N = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (570)$$

Изъ этихъ равенствъ (570) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (571)$$

Вотъ какому условію должны удовлетворять M и N, для того, чтобы дифференціалъ:

$$M\,dx + N\,dy$$

имѣлъ бы интегралъ, то есть была бы такая $f(x)$, которая, при дифференцированіи по x, давала бы M, при дифференцированіи по y давала бы N.

Итакъ, могутъ существовать такіе дифференціалы:

$$M\,dx + N\,dy,$$

для которыхъ не имѣется функціи $f(x, y)$, обладающей сказанными свойствами, то есть нѣтъ интеграла.

Уравненіе (571) называется условіемъ интегрируемости дифференціала $M\,dx + N\,dy$. Для того, чтобы $M\,dx + N\,dy$ было полнымъ дифференціаломъ, необходимо соблюденіе условія (571).

Существованіе дифференціаловъ, не имѣющихъ интеграла, имѣетъ чрезвычайно важное значеніе въ физикѣ, равно какъ и условіе интегрируемости.

Интегрирующій множитель.

§ 303. Покажемъ на дифференціальномъ уравненіи 1-го порядка чрезвычайно важное свойство дифференціальныхъ уравненій.

Разсмотримъ уравненіе

$$f(x, y) \,.\, dx + \varphi(x, y)\, dy = 0. \qquad \ldots \ldots (572)$$

Пусть:

$$F(x, y) = C \qquad \ldots \ldots \ldots (573)$$

будетъ его интегралъ. Продифференцировавъ (573), получимъ:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = 0. \qquad \ldots \ldots \ldots (574)$$

Это уравненіе (574) представляетъ связь между dx и dy совершенно такую же, какъ уравненіе (572), а такъ какъ существованіе интеграла (573) предполагаетъ опредѣленную связь между dx и dy, то слѣдовательно (574) можетъ отличаться отъ (572) только нѣкоторымъ множителемъ, на который всегда можно помножить уравненіе, не измѣняя его. Пусть M есть тотъ множитель, на который надо помножить уравненіе (572) для того, чтобы получить (574). Отъ такого умноженія на M уравненіе не измѣнится, но *лѣвая часть его сдѣлается полнымъ дифференціаломъ,* такъ какъ лѣвая часть (574)-го имѣетъ видъ полнаго дифференціала $dF(x, y)$.

Итакъ, вотъ къ какому выводу мы пришли: *для всякаго уравненія*:

$$f(x, y) \,.\, dx + \varphi(x, y)\, dy = 0 \qquad \ldots \ldots (575)$$

существуетъ такой множитель, помноженіемъ на который лѣвая часть даннаго уравненія (575) *обращается въ полный дифференціалъ* $dF(x, y)$; *интегралъ же* $F(x, y)$ *этого дифференціала, будучи приравненъ постоянному и представитъ собою интегралъ* $F(x, y) = C$ *даннаго уравненія.*

Изъ сказаннаго соотношенія между уравненіями (572) и (574) слѣдуетъ, что:

$$M \,.\, f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \qquad \ldots \ldots \ldots (576)$$

$$M \,.\, \varphi(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \qquad \ldots \ldots \ldots (577)$$

Но:

$$\frac{\partial \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{\partial x},$$

потому что обѣ эти величины равны: $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \,.\, \partial y}$. Слѣдовательно:

$$\frac{\partial (M \,.\, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial (M \,.\, \varphi(x. y))}{\partial x} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (578)$$

Это уравненіе и служитъ для опредѣленія множителя M, называемаго *интегрирующимъ множителемъ*.

Еслибы это уравненіе (578) легче интегрировалось, чѣмъ данное уравненіе (572), то получился бы общій способъ интегрированія; но къ несчастью въ большинствѣ случаевъ (578) труднѣе интегрируется, чѣмъ (572). Хотя бываетъ и обратно, какъ увидимъ ниже. Во всякомъ случаѣ свойство интегрирующаго множителя имѣетъ капитальное значеніе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Убѣдимся на примѣрѣ въ существованіи интегрирующаго множителя.

Примѣръ. Уравненіе $(x^m + y)\, dx - x\, dy = 0$ мы не умѣемъ интегрировать. Лѣвая часть его не имѣетъ интеграла, потому что:

$$\frac{\partial (x^m + y)}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial (-x)}{\partial x} = -1$$

величины 1 и — 1 не равны: условіе интегрируемости:

$$\frac{\partial (x^m + y)}{\partial y} = \frac{\partial (-x)}{\partial x} \text{ не соблюдено.}$$

Но помножимъ данное уравненіе на $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Получимъ:

$$\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2} - x^{m-2}\, dx = 0; \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (579)$$

теперь сразу видно, что лѣвая часть этого уравненія есть полный дифференціалъ:

$$d\left[\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1}\right].$$

Интегралъ этого дифференціала есть:

$$\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1}.$$

Интегралъ даннаго уравненія, слѣдовательно, есть:

$$\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1} = C.$$

Теперь и условіе интегрируемости:

$$\frac{\partial\left(x^{m-2}+\frac{y}{x^2}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x}$$

соблюдено, потому что:

$$\frac{\partial\left(x^{m-2}+\frac{y}{x^2}\right)}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x}=\frac{1}{x^2}.$$

Интегрирующихъ множителей даннаго уравненія существуетъ безконечное множество.

§ 304. Итакъ, если имѣемъ дифференціальное уравненіе:

$$f(x, y) \,.\, dx+\varphi(x, y)\, dy=0 \quad \ldots\ldots (580)$$

и M есть его интегрирующій множитель, а $F(x, y)=0$, интегралъ, то:

$$M\,[f(x, y) \,.\, dx+\varphi(x, y) \,.\, dy]=dF(x, y)=0.$$

Помножимъ это уравненіе еще на какую бы то ни было функцію

$$\mathcal{T}\,[F(x, y)].$$

Получимъ:

$$M\mathcal{T}\,[F(x, y)]\,[f(x, y) \,.\, dx+\varphi(x, y) \,.\, dy]=\mathcal{T}\,[F(x, y)]\,dF(x, y)$$
$$=d\int\mathcal{T}\,[F(x, y)]\,dF(x, y).$$

Послѣднее равенство очевидно. Но послѣднее выраженіе есть полный дифференціалъ отъ $\int\mathcal{T}\,[F(x, y)]\,dF(x, y)$. Слѣдовательно, лѣвая часть уравненія (580) обращается въ полный дифференціалъ не только отъ умноженія на M, но и отъ умноженія на $M\mathcal{T}\,(F(x, y))$. Значитъ всякое дифференціальное уравненіе 1-го порядка имѣетъ безконечное множество интегрирующихъ множителей, потому что существуетъ безконечное множество функцій $\mathcal{T}\,(F(x, y))$. Всѣ интегрирующіе множители имѣютъ видъ:

$$M\mathcal{T}\,(F(x, y))$$

произведенія M на функцію отъ $F(x, y)$.

Примѣръ: $x\,dy-y\,dx=0$. Здѣсь:

$$f(x, y)=\text{коэффиціентъ при } dx=-y$$
$$\varphi(x, y)=\text{коэффиціентъ при } dy=x.$$

Данное уравненіе легко преобразовать въ

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$lg\, y = lg\, x + lg\, C$$

$$\frac{y}{x} = C.$$

Уравненіе: $x\,dy - y\,dx = 0$ легко проинтегрировалось, и его интегралъ получается:

$$\frac{y}{x} = C.$$

Слѣдовательно, то, что мы называли $F(x, y)$, есть $\frac{y}{x}$.

По этимъ выводамъ опредѣлимъ интегрирующій множитель M. Именно: по (576):

$$M \,.\, f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}.$$

Въ настоящемъ случаѣ это будетъ:

$$-M \,.\, y = \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}.$$

Слѣдовательно:

$$M = -\frac{1}{x^2}.$$

По сказанному всякая величина $M\mathcal{T}(F(x, y))$, которая въ настоящемъ случаѣ равна $M\mathcal{T}\left(\frac{y}{x}\right)$, будетъ тоже интегрирующимъ множителемъ. Каждый изъ нихъ будетъ обращать лѣвую часть

$$x\,dy - y\,dx$$

даннаго уравненія въ полный дифференціалъ. Возьмемъ нѣсколько функцій $\mathcal{T}\left(\frac{y}{x}\right)$.

1) Положимъ:

$$\mathcal{T}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}.$$

Множитель будетъ $\frac{My}{x} = -\frac{y}{x^3}$.

Получимъ:

$$-\frac{y}{x^3}(x\,dy - y\,dx) = -\frac{yx\,dy - y^2\,dx}{x^3} = -d\left(\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{x^2}\right).$$

2) Положимъ:

$$\mathcal{T}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x}{y}.\ \text{Множитель}=\frac{Mx}{y}=-\frac{1}{xy}.$$

$$-\frac{1}{xy}(x\,dy-y\,dx)=-\left[\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}\right]=-d\,lg\,\frac{y}{x}.$$

3) Положимъ:

$$\mathcal{T}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}.\ \text{Множитель}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$-\frac{1}{x^2+y^2}[x\,dy-y\,dx]=-\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=d\,artg\,\frac{y}{x}.$$

Какую бы функцію отъ $\left(\frac{y}{x}\right)$ мы ни взяли, всегда, помноживъ лѣвую часть $x\,dy-y\,dx$ даннаго уравненія на эту функцію и на M, получили бы полный дифференціалъ, точно также какъ получили здѣсь полные дифференціалы:

$$-d\left(\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{x^2}\right);\quad -d\,lg\left(\frac{y}{x}\right);\quad -d\left(artg\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Замѣтимъ, что подъ $\mathcal{T}\left(\frac{y}{x}\right)$ въ настоящемъ случаѣ разумѣются только такія функціи, которыя не содержатъ никакого другого перемѣннаго, кромѣ $\left(\frac{y}{x}\right)$. Напримѣръ $\left(x+\frac{y}{x}\right)$ уже не годится потому, что въ нее входитъ еще x. Такая же, напримѣръ, функція:

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+5\left(\frac{y}{x}\right)}\ \text{— годится.}$$

Геометрическое значеніе дифференціальнаго уравненія и его интеграла.

§ 305. Дифференціальное уравненіе перваго порядка имѣетъ видъ:

$$f(x,\ y)\,.\,dx+\varphi(x,\ y)\,dy=0.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (581)$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (582)$$

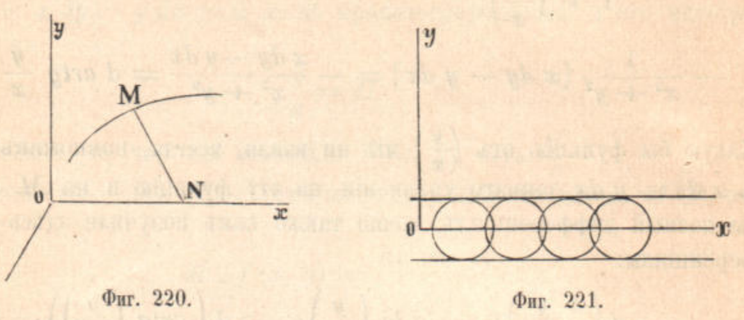
Такимъ образомъ дифференціальное уравненіе представляетъ собою нѣкоторое соотношеніе между призводной $\frac{dy}{dx}$ и перемѣнными $(x,\ y)$. Геометрически говоря, дифференціальное уравненіе представляетъ нѣкоторое геометрическое свойство касательной или находящихся въ связи съ ка-

сательною линій. Интегралъ же дифференціальнаго уравненія содрежитъ въ себѣ произвольное постоянное интеграціи C, и потому получается въ видѣ:

$$F(x, y, c) = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (583)$$

и представляетъ собою цѣлый рядъ кривыхъ: для каждаго значенія C получается своя кривая.

Съ геометрической точки зрѣнія, интегрировать дифференціальное съ двумя перемѣнными, значитъ *найти кривыя, обладающія тѣмъ общимъ свойствомъ, которое выражено этимъ уравненіемъ.* Свойства же эти относятся, такъ или иначе, къ $\frac{dy}{xp}$ равной тангенсу угла наклоненія касательной.



Фиг. 220. Фиг. 221.

Примѣръ. Найти кривыя, нормаль которыхъ имѣла бы постоянную, для всѣхъ точекъ этихъ кривыхъ, величину a.

Длина нормали MN (фиг. 220) выражается формулою (308):

$$MN = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a. \ldots \ldots \ldots (308)$$

Слѣдовательно, требуемое отъ кривыхъ свойство выражается дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2.$$

Для интегрированія представимъ его въ видѣ:

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\int dx = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + c$$

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2. \ldots \ldots \ldots \ldots (584)$$

Этотъ интегралъ (584) даннаго уравненія (308) представляетъ собою, согласно § 20-ому, окружности, радіусы которыхъ равны a, центры же расположены по оси x (фиг. 221). Дѣйствительно, нормали ихъ имѣютъ постоянную величину во всѣхъ ихъ точкахъ, потому что онѣ равны a.

Особый интегралъ.

§ 306. Однако съ перваго взгляда можетъ показаться очень страннымъ, что дифференціальному уравненію (308) удовлетворяютъ не только линіи, выражаемыя интеграломъ (584) при различныхъ значеніяхъ c, но и линія, выражаемая уравненіемъ

$$y^2 = a^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (585)$$

которое не получается изъ (584) ни при какомъ значеніи c, и не выражаетъ собою вовсе окружности. Между тѣмъ, дѣйствительно, (585) удовлетворяетъ (308)-ому, потому что изъ него слѣдуетъ: $\frac{dy}{dx} = 0$, и лѣвая часть уравненія (308) обращается въ a^2, чему равна и правая часть.

Сначала разъяснимъ это дѣло геометрически. Уравненіе (585) представляетъ собою пару прямыхъ: $y = + a$; $y = - a$ (фиг. 221), нормали которыхъ равны a, какъ это требуется уравненіемъ (308). Значитъ (585) есть тоже интегралъ (308)-го, но какой-то особѐнный, не получаемый изъ интеграла (584) ни при какомъ значеніи c.

Разъяснимъ дѣло окончательно: геометрическими свойствами, требуемыми уравненіемъ (308) обладаетъ не только рядъ кривыхъ, выражаемыхъ интеграломъ (584), но и огибающая этихъ кривыхъ, которая имѣетъ особую, не одинаковую съ этими кривыми, форму и особое уравненіе; въ нашемъ примѣрѣ эта огибающая есть пара прямыхъ.

Интегралъ (585) называется *особымъ интеграломъ.* Итакъ, кромѣ обыкновеннаго интеграла

$$F(x, y, c) = 0,$$

дифференціальному уравненію

$$f(x, y) . dx + \varphi(x, y)\, dy = 0$$

удовлетворяетъ еще *особый интегралъ*, который не получается изъ обыкновеннаго ни при какомъ значеніи c, но выражаетъ собою огибающую кривыхъ, выраженныхъ обыкновеннымъ интеграломъ, и потому (согласно § 184) можетъ быть найденъ исключеніемъ c изъ уравненій

$$F(x, y, c) = 0$$

$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0,$$

изъ коихъ первое есть обыкновенный интегралъ даннаго уравненія, а второе получается приравненіемъ нулю производной лѣвой части обыкновеннаго интеграла по c.

Такъ и въ нашемъ примѣрѣ, исключая c изъ уравненій

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots (586)$$

$$2(x - c) = 0,$$

получимъ:

$$y^2 = a^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (587)$$

представляющее собою особый интегралъ.

Въ подробныхъ курсахъ можно найти болѣе обстоятельное и болѣе строгое изслѣдованіе особыхъ интеграловъ.

Во многихъ вопросахъ надо быть осмотрительнымъ, чтобы не пропустить рѣшенія, доставляемаго особымъ интеграломъ.

Линейное уравненіе n-го порядка.

§ 307. Перейдемъ теперь къ интегрированію *линейнаго* уравненія. Линейнымъ уравненіемъ n-го порядка называется такое, въ которомъ заключаются производныя различныхъ порядковъ до n-го включительно, при чемъ всѣ онѣ въ первой степени; кромѣ того оно заключаетъ въ себѣ еще y въ первой степени и какія бы то ни было функціи независимаго перемѣннаго x. Оно имѣетъ видъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V, \quad . \; . \; . \quad (588)$$

гдѣ: P, $T \ldots U$, V суть какія бы то ни было функціи икса.

Линейныя уравненія безъ 2-го члена.

§ 308. Членъ V уравненія (588) называется 2-мъ членомъ. Разсмотримъ уравненіе болѣе простое, именно, не заключающее въ себѣ 2-го члена. Такое уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0. \; . \; . \; . \; . \quad (589)$$

Докажемъ его основное свойство, заключающееся въ томъ, что, *если ему удовлетворяютъ n функцій:* $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$, *то и сумма этихъ функцій* $(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)$, *и даже сумма произведеній этихъ функцій на какія-либо постоянныя* $(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n)$, *должны ему удовлетворять.*

Дѣйствительно, положимъ:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_n y_n, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (590)$$

отсюда вычисляемъ:

$$\frac{dy}{dx} = c_1\frac{dy_1}{dx} + c_2\frac{dy_2}{dx} + \ldots + c_n\frac{dy_n}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + c_n\frac{d^2y_n}{dx^2}$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\frac{d^ny}{dx^2} = c_1\frac{d^ny_1}{dx^n} = c_2\frac{d^ny_2}{dx^n} + \ldots + c_n\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Вставивъ эти величины въ (589), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} c_1 \left[\frac{d^n y_1}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy_1}{dx} + Uy_1\right] \\ + c_1 \left[\frac{d^n y_2}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy_2}{dx} + Uy_2\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (591)$$

Но, по сдѣланному предположенію, каждая изъ $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ въ отдѣльности удовлетворяетъ уравненію (589)-му. Вслѣдствіе этого величины, стоящія въ скобкахъ лѣвой части уравненія (591)-го, будутъ равны нулю, а потому и уравненіе это удовлетворится. Слѣдовательно, сумма $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ удовлетворяетъ уравненію (591)-му, что и требовалось доказать.

Линейное уравненіе безъ 2-го члена и съ постоянными коэффиціентами.

§ 309. Въ настоящемъ руководствѣ мы разсмотримъ только такія линейныя уравненія, въ которыхъ нѣтъ 2-го члена V и коэффиціенты $P, Q \ldots T, U$ суть величины постоянныя. Сдѣлаемъ въ такомъ уравненіи подстановку

$$y = e^{\int z\, dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (592)$$

Замѣтимъ предварительно, что изъ (592) слѣдуетъ: по формулѣ (249):

$$dy = e^{\int z\, dx} d\int z\, dx = e^{\int z\, dx} z\, dx,$$

и потому:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int z\, dx} z; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int z\, dx}\left(\frac{dz}{dx} + z^2\right);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int z\, dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 3z\frac{dz}{dx} + z^3\right)\ldots$$

Подставляя эти величины въ данное уравненіе:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0, \ \ldots (593)$$

сокращая на $e^{\int z\, dx}$ и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + (z^n + P_1 z^{n-1} + \ldots + T_1 z + U) = 0. \ldots (594)$$

Если коэффиціенты $P, Q \ldots T, U$, согласно сдѣланному предположенію, постоянны, то и коэффиціенты $P_1, Q_1 \ldots T_1, U_1$, а слѣдовательно и корни уравненія:

$$z^n + P_1 z^{n-1} + \ldots + T_1 z + U = 0 \ \ldots (595)$$

постоянны. Положимъ, что эти корни суть: $r_1, r_2 \ldots r_n$. Тогда:

$$z = r,$$

гдѣ r есть любой изъ такихъ корней, представляетъ собою интегралъ уравненія (594)-го, потому что, вставляя въ него r вмѣсто z, обратимъ въ нуль величину, стоящую въ скобкахъ, такъ какъ r есть корень уравненія (595)-го; величина же $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ будетъ нулемъ, потому что r—постоянное, и уравненіе (594) такимъ образомъ удовлетворится. Но если $z = r$ есть корень уравненія (594)-го, то, согласно (592):

$$y = e^{\int r\,dx} = ce^{rx}$$

будетъ интеграломъ уравненія (593)-го. Если же такъ, то, на основаніи теоремы предъидущаго параграфа, и

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + c_3e^{r_3x} + \ldots + c_ne^{r_nx} \quad \ldots \quad (596)$$

будетъ интеграломъ даннаго уравненія (593)-го.

Примѣръ: $\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0$.

Дѣлаемъ подстановку $y = e^{\int z\,dx}$. Вычисляемъ:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int z\,dx}\,z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (597)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int z\,dx}\frac{dz}{dx} + z^2e^{\int z\,dx} = e^{\int z\,dx}\left(\frac{dz}{dx} + z^2\right).$$

Внося эти величины въ данное уравненіе, получимъ:

$$e^{\int z\,dx}\left[\frac{dz}{dx} + z^2\right] - n^2e^{\int z\,dx} = 0,$$

или:

$$\frac{dz}{dx} + (z^2 - n^2) = 0.$$

Корни уравненія

$$z^2 - n^2$$

суть $r_1 = +n$; $r_2 = -n$. Слѣдовательно, по (596):

$$y = c_1e^{nx} + c_2e^{-nx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (598)$$

Замѣчаніе.

§ 310. Интересующихся интегрированіемъ линейныхъ уравненій съ перемѣнными коэффиціентами и со 2-мъ членомъ V и уравненіями не линейными высшихъ порядковъ отсылаемъ къ подробнымъ курсамъ и мемуарамъ.

Здѣсь же мы ограничимся замѣчаніемъ, что степенью дифференціальнаго уравненія называется наибольшая степень, въ которой въ него вхо-

дитъ производная $\frac{dy}{dx}$ или функція y. Порядкомъ же его называется наибольшій порядокъ входящихъ въ него производныхъ.

Дифференціальныя уравненія съ частными производными.

Образованіе уравненій съ частными производными.

§ 311. Существуютъ такія уравненія, интегралы которыхъ содержатъ уже не произвольныя постоянныя, но произвольныя функціи.

Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ такое конечное (не дифференціальное) уравненіе

$$y - bz = f(x - az), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (599)$$

гдѣ f есть произвольная (не извѣстно какая) функція отъ $(x - az)$; *z есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y.*

Продифференцировавъ уравненіе (599) по x, получимъ:

$$-b\frac{dz}{dx} = f'(x - az) - a\frac{dz}{dx}f'(x - az)$$

$$= f'(x - az) . \left(1 - a\frac{dz}{dx}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (600)$$

Продифференцируемъ уравненіе (599) по y. Получимъ:

$$1 - b\frac{dz}{dy} = -f'(x - az)\left(-a\frac{dz}{dy}\right) = -f'(x - az) . a\frac{dz}{dy} \quad . \quad . \quad (601)$$

Исключимъ изъ уравненій (600) и (601) $f'(x - az)$. Получимъ: изъ (600):

$$f'(x - az) = \frac{b\frac{dz}{dx}}{a\frac{dz}{dx} - 1},$$

изъ (601):

$$f'(x - az) = -\frac{1 - b\frac{dz}{dy}}{a\frac{dz}{dy}},$$

а потому:

$$\frac{b\frac{dz}{dx}}{a\frac{dz}{dx} - 1} = \frac{-\left(1 - b\frac{dz}{dy}\right)}{a\frac{dz}{dy}},$$

или:

$$+ab\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy} = -a\frac{dz}{dx} + 1 + ab\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy} - b\frac{dz}{dy},$$

или:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \dots\dots\dots\dots (602)$$

Это уравненіе (602) произошло отъ дифференцированія уравненія (599) и потому (599) есть его интегралъ. Это можно впрочемъ повѣрить еще такъ: опредѣлимъ z изъ (599):

$$z = \frac{y}{b} - \frac{f(x - az)}{b}.$$

Вставивъ эту величину въ (602), получимъ:

$$a \cdot \frac{\partial \left[\frac{y}{b} - \frac{f(x - az)}{b}\right]}{\partial x} + b \frac{\partial \left[\frac{y}{b} - \frac{f(x - az)}{b}\right]}{\partial y} = 1.$$

Произведя указанныя здѣсь дифференцированія, получимъ:

$$-\frac{a}{b} f'(x - az) + \frac{a^2}{b} f'(x - az) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{b}{b} + \frac{a}{b^2} f'(x - az) \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

или:

$$-\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a}{b^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

или:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Но это уравненіе послужило намъ при повѣркѣ исходнымъ пунктомъ. Слѣдовательно z, опредѣленное изъ (599) удовлетворяетъ (602)-ому.

Итакъ (599) есть интегралъ дифференціальнаго уравненія (602), и содержитъ въ себѣ произвольную функцію. Уравненіе (602) и представляетъ собой примѣръ такого уравненія, интегралъ котораго содержитъ произвольную функцію.

Дифференціальныя уравненія съ частными производными.

§ 312. Этимъ свойствомъ обладаютъ всѣ дифференціальныя уравненія, которыя содержатъ въ себѣ (какъ 602): нѣсколько независимыхъ перемѣнныхъ, частныя производныя по нимъ отъ нѣкоторой ихъ функціи z и самую z. Дифференціальныя уравненія съ частными производными имѣютъ, слѣдовательно, видъ:

$$f\left(x, y, \dots z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \dots\right) = 0 \dots\dots\dots (603)$$

Въ настоящемъ руководствѣ мы разсмотримъ только дифференціальныя уравненія 1-го порядка и первой степени (линейныя) съ частными производными для двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y и ихъ функціи z.

Линейное дифференціальное уравненіе 1-го порядка съ частными производными.

§ 313. Общій видъ такого уравненія таковъ:

$$\varphi(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \phi(x, y, z), \quad . \; . \; . \; (604)$$

гдѣ φ, ψ и ϕ суть нѣкоторыя функціи. Для краткости введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\varphi(x, y, z) = P$$

$$\psi(x, y, z) = Q$$

$$\phi(x, y, z) = R$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (605)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (606)$$

Послѣднее обозначеніе частныхъ производныхъ отъ z чрезъ p и q получило всеобщее употребленіе. При этихъ сокращенныхъ обозначеніяхъ уравненіе (604) приметъ видъ:

$$Pp + Qq = R. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (607)$$

Научимся интегрировать такія уравненія. Мы уже видѣли на примѣрѣ предъидущаго параграфа, что интегралъ уравненія такого вида, какъ (607). можетъ заключать произвольную функцію и имѣть видъ:

функція отъ x, y, z = произвольной функціи отъ функціи x, y, z, подобно уравненію (599). Пусть α и β суть нѣкоторыя функціи отъ x, y, z; допустимъ, что интегралъ уравненія (607) будетъ:

$$\alpha = f(\beta), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (608)$$

гдѣ f есть знакъ произвольной функціи, и посмотримъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять α и β, чтобы (608) было интеграломъ (607)-го. Продифференцируемъ (608) по x и потомъ, отдѣльно, по y, помня, что α и β зависятъ отъ x, содержа его во первыхъ явно и, во вторыхъ, содержа z, которое есть функція икса, и что такая же двоякая зависимость существуетъ для y. Дифференцируя (608) по x, получимъ:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \; \frac{\partial z}{\partial x} = f'(\beta) \left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Дифференцируя (608) по y, получимъ:

$$\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Вводя обозначенія (605) и (606), получимъ:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \cdot p = f'(\beta) \cdot \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \cdot p\right) \quad \ldots \quad (609)$$

$$\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \cdot q = f'(\beta) \cdot \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \cdot q\right). \quad \ldots \quad (610)$$

Помноживъ (609) на P, (610) на Q и сложивъ, получимъ:

$$P\frac{d\alpha}{dx} + Q\frac{d\alpha}{dy} + (Pp + Qq)\frac{\partial\alpha}{\partial z}$$
$$= f'(\beta)\left[P\frac{d\beta}{dx} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial\beta}{\partial z}\right].$$

Подставляя сюда, на основаніи (607), вмѣсто $Pp + Qq$, равную величину R, получимъ:

$$P\frac{d\alpha}{dx} + Q\frac{d\alpha}{dy} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} = f'(\beta)\left[P\frac{d\beta}{dx} + Q\frac{d\beta}{dy} + R\frac{d\beta}{dz}\right].$$

Это уравненіе обратится въ тожество при какомъ бы то ни было значеніи $f'(\beta)$ если:

$$\left.\begin{aligned} P\frac{d\alpha}{dx} + Q\frac{d\alpha}{dy} + R\frac{d\alpha}{dz} = 0 \\ P\frac{d\beta}{dx} + Q\frac{d\beta}{dy} + R\frac{d\beta}{dz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (611)$$

Эти же уравненія (611) удовлетворятся, если за α и β примемъ такія функціи, которыя, будучи приравнены произвольнымъ постояннымъ c и c' были бы интегралами уравненій:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad \ldots \ldots \quad (612)$$

Потому что, дѣйствительно, дифференцируя:

$$\alpha = c$$
$$\beta = c'$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z}dz = 0 \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}dy + \frac{\partial\beta}{\partial z}dz = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (613)$$

называя же общую величину отношеній (612) чрезъ W, получимъ изъ (612)

$$dx = PW; \quad dy = QW; \quad dz = RW$$

и вставляя отсюда въ (613) величины dx, dy, dz, получимъ:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} PW + \frac{\partial\alpha}{\partial y} QW + \frac{\partial\alpha}{\partial z} RW = 0$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} PW + \frac{\partial\beta}{\partial y} QW + \frac{\partial\beta}{\partial z} RW = 0.$$

Сокращая на W, получимъ уравненія (611).

Итакъ: $$\alpha = c;\ \ \beta = c' \ldots\ldots\ldots\ldots (614)$$

суть интегралы уравненій (612).

Сводя во едино все сказанное въ настоящемъ параграфѣ, видимъ, что интегралъ уравненія (607)-го есть:

$$\alpha = f(\beta), \ldots\ldots\ldots\ldots (615)$$

гдѣ f есть произвольная функція; α и β суть тѣ функціи, которыя, будучи приравнены произвольнымъ постояннымъ: c и c' представляютъ собою интегралы совмѣстныхъ уравненій (612).

Интегрированіе уравненія: $Pp + Qq = R$.

§ 314. Изъ сказаннаго въ предъидущемъ параграфѣ слѣдуетъ такое правило для интегрированія уравненія:

$$\varphi(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + \psi(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = \phi(x, y, z), \ldots\ldots (604)$$

сокращенно обозначаемаго въ видѣ:

$$Pp + Qq = R. \ldots\ldots\ldots\ldots (607)$$

Составляемъ уравненія:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \ldots\ldots\ldots\ldots (612)$$

Интегрируя ихъ получаемъ интегралы:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = c\\ \beta = c_1\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (614)$$

Интегралъ (607)-го будетъ:

$$\alpha = f(\beta), \ldots\ldots\ldots\ldots (615)$$

гдѣ f есть совершенно произвольная функція.

Примѣръ 1-ый. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Сокращенно представится въ видѣ:

$$xp - yq = 0.$$

Составляемъ уравненія:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Интегрируя ихъ, имѣемъ:

$$lg\,x = -\,lg\,y;\quad z = c;$$

или:

$$lg\,x + lg\,y = lg\,(xy) = c_1;\quad z = c;$$

или:

$$z = c$$

$$xy = c_1.$$

Интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$z = f\,(xy).$$

Повѣрка: дифференцируемъ уравненіе:

$$z = f\,(xy),$$

получимъ:

$$\frac{dz}{dx} = f'\,(xy)\,.\,y$$

$$\frac{dz}{dy} = f'\,(xy)\,.\,x,$$

отсюда:

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{y} = \frac{\frac{dz}{dy}}{x}$$

$$px - qy = 0. \ldots \ldots \ldots \ldots (616)$$

Убѣждаемся, что дѣйствительно дифференцированіе уравненія

$$z = f\,(xy)$$

и исключеніе произвольной функціи приводятъ къ данному уравненію $px - qy = 0$; что, слѣдовательно, $z = f\,(xy)$ есть интегралъ уравненія $px - qy = 0$.

Примѣръ 2-ой. $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}$. Сокращенно пишемъ:

$$p - q = 0.$$

Составляемъ уравненіе:

$$\frac{dx}{1} = -\,\frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}.$$

Интегрируя эти уравненія, получаемъ:

$$z = c$$

$$x + y = c_1.$$

Интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$z = f\,(x + y).$$

Примѣръ 3-ій. $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$

$$py - qx = 0$$

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

$$z = c$$

$$x^2 + y^2 = c_1$$

$$z = f(x^2 + y^2).$$

Примѣръ 4-ый. $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = \frac{z}{a}$. Сокращенно пишемъ:

$$p + q = \frac{z}{a}.$$

Составляемъ:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{a\,dz}{z}.$$

Отсюда:

$$x - a\,lg\,z = c$$

$$y - a\,lg\,z = c_1$$

$$x - a\,lg\,z = f(y - a\,lg\,z).$$

Образованіе поверхностей.

Замѣчаніе.

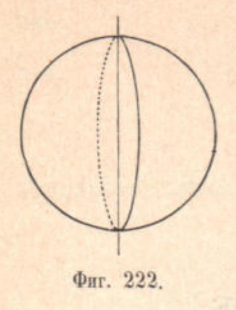
§ 315. Дифференціальныя уравненія обладаютъ большою общностью: одно дифференціальное уравненіе охватываетъ весьма много свойствъ весьма многихъ объектовъ. Впослѣдствіи мы это увидимъ особенно ясно въ уравненіяхъ механики. Теперь же покажемъ, какъ однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ охватывается цѣлый классъ поверхностей. Тутъ же мы познакомимся съ наиболѣе интересными классами поверхностей и способами ихъ образованія.

Образующія и направляющія.

§ 316. Если какая-нибудь кривая линія движется въ пространствѣ, то совокупность (или геометрическое мѣсто) всѣхъ ея положеній образуетъ поверхность. Въ этомъ смыслѣ говорятъ, что поверхность можетъ быть образована движеніемъ линіи.

Напримѣръ, если полуокружность вращается около діаметра (фиг. 222), то геометрическое мѣсто всѣхъ ея положеній, занимаемыхъ ею послѣдо-

вательно въ пространствѣ при такомъ вращеніи, есть шаровая поверхность. Въ каждомъ своемъ отдѣльномъ положеніи движущаяся окружность представляетъ меридіанъ шаровой поверхности, образованной ея вращеніемъ.



Фиг. 222.

Движущаяся линія называется при этомъ *образующею*. Въ приведенномъ примѣрѣ полуокружность есть образующая шаровой поверхности. Отдѣльныя положенія образующей тоже называются образующими. Въ приведенномъ примѣрѣ меридіаны суть *образующія*. Движеніе образующей опредѣляется иногда тѣмъ условіемъ, что она должна опираться на нѣкоторыя линіи, называемыя *направляющими*.

Напримѣръ, если прямолинейная образующая опирается на окружность и проходитъ постоянно чрезъ одну и ту же точку, находящуюся на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ центра этой окружности къ ея плоскости, то получается поверхность прямого круглаго конуса. Здѣсь движущаяся прямая есть образующая; окружность же—направляющая.

Цилиндрическія поверхности.

§ 317. Поверхности, прямолинейныя образующія которыхъ параллельны между собою называются *цилиндрическими*. Въ элементарной геометріи разсматривается только такая цилиндрическая поверхность, направляющая которой есть окружность. Но, какова бы ни была направляющая, если поверхность образована движеніемъ прямолинейной образующей, остающейся постоянно параллельною одной и той же прямой, то такая поверхность называется цилиндрическою.

Пусть уравненія образующей прямой будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (617)$$

Съ измѣненіемъ α и β измѣняется положеніе образующей; если бы мы стали измѣнять также a или b, то направленіе образующей тоже измѣнялось бы. Если же a и b остаются безъ измѣненія, то всѣ образующія имѣютъ одно направленіе.

Это явствуетъ изъ слѣдующаго: уравненіе (617) можно представить въ видѣ:

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-0}{1},$$

откуда видно (см. § 98), что направленіе прямой (617) измѣняется только съ измѣненіемъ a и b. Итакъ, оставляя a и b въ (617) неизмѣнными, будемъ мѣнять только α и β; получимъ множество параллельныхъ между собою прямыхъ.

Подчинимъ теперь эти прямыя еще тому условію, чтобы онѣ опирались на направляющую:

$$\left.\begin{aligned} F\ (x, y, z) = 0 \\ F_1\ (x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (618)$$

Если образующая (617) опирается на направляющую (618), то эти линіи встрѣчаются одна съ другою: имѣютъ общія точки. Слѣдовательно существуютъ такія x, y, z, которыя удовлетворяютъ 4-мъ уравненіемъ (617) и (618). Но три величины x. y, z могутъ удовлетворять 4-мъ уравненіямъ только въ томъ случаѣ, если, опредѣливъ ихъ изъ трехъ такихъ уравненій и вставивъ полученныя величины въ четвертое, получимъ вѣрное равенство между коэффиціентами. Другими словами: условіе встрѣчи образующей (617) съ направляющею (618), получится, если мы исключимъ изъ (617) и (618) перемѣнныя x, y, z. Оно будетъ имѣть видъ уравненія заключающаго только коэффиціенты уравненій (617) и (618); среди этихъ коэффиціентовъ мы должны, по условіямъ задачи, считать перемѣнными только α и β. Итакъ, условіе встрѣчи образующей (617) съ направляющей (618) будетъ имѣть видъ:

$$\varphi\,(\alpha, \beta) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (619)$$

Но образующая вполнѣ опредѣлена и занимаетъ опредѣленное положеніе, покуда α и β опредѣлены. Если же мы исключимъ α и β изъ уравненій (617) и (618), то получимъ уравненіе вида:

$$\varphi\,(x - az;\ y - bz) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (620)$$

которое выразитъ собою совокупность всѣхъ образующихъ параллельныхъ между собою и опирающихся на направляющую (618). Это и будетъ, слѣдовательно, уравненіе цилиндрической поверхности. Рѣшая его относительно $(y - bz)$, получимъ:

$$y - bz = f\,(x - az) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (621)$$

Мы получили очень общее уравненіе, годное для всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей; но оно имѣетъ то неудобство, что содержитъ произвольную функцію f.

Дифференціальное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей.

§ 318. Избавиться отъ произвольной функціи f въ уравненіи (621) можно дифференцированіемъ. Такое дифференцированіе и исключеніе функціи f нами уже произведено въ § 311, гдѣ мы получили изъ уравненія (599), тожественнаго съ (621), уравненіе:

$$a\,\frac{dz}{dx} + b\,\frac{dz}{dy} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (622)$$

Это и есть дифференціальное уравненіе съ частными производными всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей. При такой общности оно уже не

содержитъ произвольной функціи. Принимая обычныя обозначенія: $\frac{dz}{dx} = p$; $\frac{dz}{dy} = q$, мы его представимъ въ видѣ:

$$ap + bq = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (623)$$

Интегрируя его, вернемся къ (621). Дѣйствительно, поступая по правиламъ § 314, получимъ:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

откуда:

$$x - az = c; \quad y - bz = c_1; \quad y - bz = f(x - az).$$

Коническія поверхности.

§ 319. Коническими называются такія поверхности, прямолинейныя образующія которыхъ, проходя чрезъ одну точку (вершину конуса), опираются на какую-либо направляющую:

$$\left.\begin{aligned} F\ (x, y, z) &= 0 \\ F_1\ (x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (624)$$

Пусть уравненія образующей будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (625)$$

Координаты вершины назовемъ чрезъ: k, m, n. Образующая проходитъ чрезъ вершину. Слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} k &= an + \alpha \\ m &= bn + \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (626)$$

Вычитая соотвѣтственно уравненія (626) изъ (625), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x - k &= a\,(z - n) \\ y - m &= b\,(z - n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (627)$$

Исключая x, y, z изъ (627) и (624), получимъ (какъ въ § 317) условіе встрѣчи образующей съ направляющею въ видѣ:

$$\varphi\,(a, b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (628)$$

Исключая a и b изъ (628) и (627), получимъ (какъ въ § 317) уравненіе поверхности въ видѣ:

$$\varphi\left(\frac{x-k}{z-n},\ \frac{y-m}{z-n}\right) = 0$$

приводимомъ въ виду:

$$\frac{y-m}{z-n} = f\left(\frac{x-k}{z-n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (629)$$

Это и есть общее уравненіе коническихъ поверхностей.

Дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей.

§ 320. Дифференцируя (629) по x, получимъ, вводя обозначенія p и q для производныхъ $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$:

$$\frac{-(y-m)\,p}{(z-n)^2} = \phi'\left[\frac{x-k}{z-n}\right]\cdot\left[\frac{z-n-(x-k)\,p}{(z-n)^2}\right]$$

$$\frac{(z-n)-(y-m)\,q}{(z-n)^2} = \phi'\left[\frac{x-k}{z-n}\right]\cdot\left[\frac{-(x-k)\,q}{(z-n)^2}\right].$$

Исключая $\phi'\left[\frac{x-k}{z-n}\right]$, получимъ:

$$\frac{(y-m)\,p}{(z-n)-(y-m)\,q} = \frac{z-n\,(x-k)\,p}{(x-k)\,q},$$

или

$$z-n = (x-k)\,p + (y-m)\,q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (630)$$

Дифференціальное уравненіе всѣхъ коническихъ поверхностей, каковы бы ни были направляющія.

Коноидальныя поверхности.

§ 321. Поверхность, образованная прямыми параллельными данной плоскости, проходящими чрезъ данную прямую и опирающимися на данную направляющую, называются *коноидальными.*

Дифференціальное уравненіе коноидовъ, образующія которыхъ параллельны плоскости (x, y) и проходятъ чрезъ ось z таково:

$$px + qy = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (631)$$

Интегралъ этого уравненія таковъ:

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Изъ коноидальныхъ поверхностей наиболѣе замѣчательны:

1) Косая винтовая поверхность, описанная въ § 246-мъ, и

2) Коноидъ Плюккера или *цилиндроидъ.* Направляющая этой поверхности представляетъ собою эллипсъ, лежащій въ плоскости перпендикулярной къ плоскости (yz), но наклонной къ плоскости (xy) и проходящей чрезъ ось x.

Поверхности вращенія.

§ 322. Поверхности, образованныя вращеніемъ криволинейной или прямолинейной образующей около оси, находящейся съ нею въ одной плоскости, называются *поверхностями вращенія.* Мы ихъ уже неоднократно встрѣчали.

Дифференціальное уравненіе такихъ поверхностей вращенія, ось которыхъ проходитъ чрезъ начало координатъ, таково:

$$(cy - bz)\,p + (az - cx)\,q = bx - ay \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (632)$$

Интегралъ его таковъ:

$$ax + by + cz = f\,(x^2 + y^2 + z^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (633)$$

Дифференціальное уравненіе такихъ поверхностей вращенія, ось которыхъ направлена по оси z есть частный случай уравненія (632) и имѣетъ видъ:

$$py - qx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (634)$$

Интегралъ его таковъ:

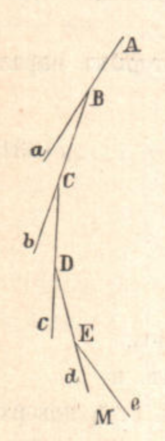
$$z = f\,(x^2 + y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (635)$$

Развертывающіяся поверхности.

§ 323. Представимъ себѣ такую поверхность, въ которой каждыя двѣ сосѣднія образующія взаимно пересѣкаются (фиг. 223). Тутъ могутъ быть слѣдующіе случаи:

1) Всѣ образующія пересѣкаются въ одной точкѣ; получается конусъ или плоскость.

2) Каждая образующая пересѣкаетъ сосѣднюю, но всѣ онѣ лежатъ въ одной плоскости; получается плоскость.



Фиг. 223.

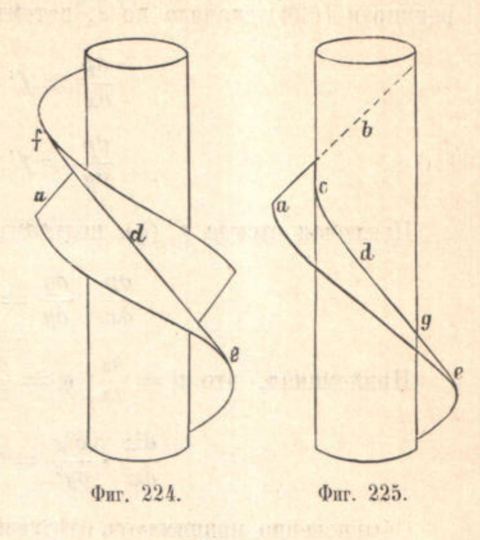
3) Каждая образующая пересѣкается съ сосѣднею, но 3-я образующая уже не лежитъ въ плоскости первыхъ двухъ, 4-я не лежитъ въ плоскости 2-й и 3-й и такъ далѣе. Этотъ послѣдній случай мы и разберемъ.

Рядъ послѣдовательныхъ пересѣченій образующихъ образуетъ въ этомъ случаѣ кривую AM (фиг. 223) и при томъ кривую двойной кривизны. Образующія же составляютъ нѣкоторую поверхность. Замѣчательное свойство этой поверхности будетъ состоять въ томъ, что ее можно, безъ складокъ и разрывовъ, развернуть на плоскость. Дѣйствительно, представимъ себѣ плоскость a, составленную образующими AB и BC, неподвижною и будемъ вращать около BC плоскость b, составленную образующими BC и CD, до тѣхъ поръ, пока она не составитъ продолженія плоскости a; затѣмъ вращаемъ около CD плоскость c, покуда она тоже не совмѣстится съ плоскостью a. Поступая далѣе такимъ образомъ, мы и развернемъ всю поверхность на плоскость a.

Итакъ: поверхности, представляющія собою геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривой двоякой кривизны, можно развернуть на плоскость. Такія поверхности называются *развертывающимися*. Кривая AM, къ ко-

торой касательны образующія развертывающейся поверхности, называется *ребромъ возврата*.

Въ § 245 мы уже видѣли такую поверхность *винтовую развертывающуюся*, представляющую собою геометрическое мѣсто касательныхъ къ винтовой линіи. Для нея эта винтовая линія и служитъ ребромъ возврата. На (фиг. 225) изображена только одна полость описываемая однимъ концомъ касательной. На (фиг. 224) мы изобразили и другую полость образованную другимъ концомъ касательной. Изъ одной полости въ другую касательная переходитъ, не изгибаясь, но тѣмъ не менѣе винтовая линія представляется рѣзко очерченною на поверхности. и въ сѣченіи, если оно не находится въ плоскости образующей, получается кривая съ угловою точкою. Вотъ причина названія «ребро возврата»: оно представляетъ собою нѣчто вродѣ лезвія. Но каждая образующая переходитъ чрезъ ребро возврата изъ одной полости въ другую не переламываясь. Съ перваго раза, не видавъ хорошо исполненныхъ нитяныхъ моделей, это трудно себѣ представить.



Фиг. 224. Фиг. 225.

Самыя простыя развертывающіяся поверхности—это коническія и цилиндрическія, но къ несчастью ребро возврата въ коническихъ поверхностяхъ сливается въ одну точку—вершину; въ цилиндрическихъ же оно представляетъ собою безконечно удаленную точку.

Линейчатыя поверхности.

§ 324. Поверхности, образованныя движеніемъ прямолинейной образующей называются *линейчатыми*.

Линейчатыя поверхности раздѣляются на два большихъ отдѣла: 1) поверхности *развертывающіяся*, какъ винтовая развертывающаяся и 2) поверхности *косыя*, которыя, какъ однополый гиперболоидъ, будучи линейчатыми, не могутъ быть развернуты на плоскость.

Дифференціальное уравненіе развертывающейся поверхности.

§ 325. Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что дифференціальное уравненіе развертывающихся поверхностей таково:

$$p = f(q), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (636)$$

гдѣ f есть произвольная функція, имѣющая различный видъ для раз-

личныхъ развертывающихся поверхностей. Напримѣръ для цилиндрическихъ поверхностей изъ (623) получимъ:

$$p = \frac{1 - bq}{a}.$$

Если захотимъ избавиться отъ этой произвольной функціи f дифференцированіемъ, то получимъ уравненіе 2-го порядка. Именно: дифференцируя (636) сначала по x, потомъ по y, получимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(q) \cdot \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = f'(q) \cdot \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Исключая отсюда $f'(q)$, получимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (637)$$

Припоминая, что $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, получимъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, . \, \partial y}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (638)$$

Обыкновенно принимаютъ слѣдующія сокращенія для обозначенія вторыхъ производныхъ отъ z:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} = r \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial q}{\partial y} = t \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \, . \, \partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (639)$$

При такихъ сокращеніяхъ уравненіе (638) приметъ видъ:

$$rt - s^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (640)$$

Вотъ это и есть чрезвычайно важное уравненіе 2-го порядка съ частными производными развертывающихся поверхностей.

Огибающія поверхности.

§ 326. *Поверхность s, касательная къ различнымъ положеніямъ движущейся и измѣняющейся поверхности s', называется огибающею, если движеніе и измѣненіе поверхности s' происходитъ отъ измѣненія только одного ея параметра.*

Разсужденіями, подобными тѣмъ, которыя приведены были въ § 184-мъ, доказывается, что, при измѣненіи параметра α въ уравненіи

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (641)$$

измѣняющейся поверхности, уравненіе огибающей поверхности получится по исключеніи параметра α изъ уравненія

$$\frac{dF(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (642)$$

и уравненія (641).

Примѣръ. Сфера $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2$ движется такъ, что ея центръ c описываетъ въ плоскости (x, y) окружность:

$$a^2 + b^2 = R^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (643)$$

Найти огибающую всѣхъ положеній движущейся сферы.

Опредѣляя изъ (643): $b = \sqrt{R^2 - a^2}$ и вставляя въ уравненіе движущейся сферы, получимъ:

$$(x-a)^2 + (y - \sqrt{R^2 - a^2})^2 + z^2 = r^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (644)$$

Здѣсь остался одинъ только параметръ a. Дифференцируя (644) по a, получимъ:

$$-2(x-a) + \frac{2(y - \sqrt{R^2 - a^2})\,a}{\sqrt{R^2 - a^2}} = 0,$$

или:

$$(y - \sqrt{R^2 - a^2})\,a = (x-a)\sqrt{R^2 - a^2},$$

или:

$$ay = x\sqrt{R^2 - a^2};$$

откуда:

$$a^2y^2 = R^2x^2 - a^2x^2,$$

или:

$$a^2 = \frac{R^2x^2}{x^2 + y^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (645)$$

Исключая α изъ (644) и (645), получимъ:

$$\left(x - \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + z^2 = r^2,$$

или:

$$(x\sqrt{x^2 + y^2} - Rx)^2 + (y\sqrt{x^2 + y^2} - Ry)^2 + z^2(x^2 + y^2) = r^2(x^2 + y^2);$$

или:

$$x^2(x^2 + y^2) - 2Rx^2\sqrt{x^2 + y^2} + R^2x^2 + y^2(x^2 + y^2) - 2Ry^2\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$+ R^2y^2 + (z^2 - r^2)(x^2 + y^2) = 0;$$

или:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2}\,(x^2 + y^2) + R^2(x^2 + y^2) + (z^2 - r^2)(x^2 + y^2) = 0;$$

или:

$$(x^2 + y^2) + R^2 + z^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2};$$

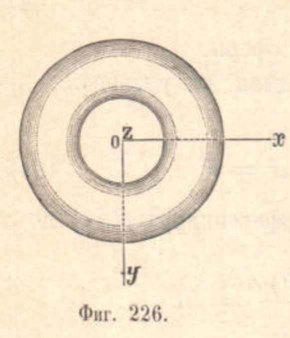
или:

$$[x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2]^2 = 4R^2 (x^2 + y^2).$$

Вотъ каково уравненіе огибающей поверхности. Она имѣетъ видъ кольца и называется *торъ* (фиг. 226).

Трубчатыя поверхности.

§ 327. Поверхности, образованныя движеніемъ шара, называются *трубчатыми*. Не надо смѣшивать трубчатыхъ поверхностей съ цилиндрическими: у цилиндрическихъ поверхностей образующія прямолинейны и параллельны между собою; трубчатыя поверхности, вообще говоря, не имѣютъ прямолинейныхъ образующихъ. Только прямой круглый цилиндръ есть въ одно и то же время и цилиндрическая и трубчатая поверхность. Моделью трубчатой поверхности можетъ служить всякая форма принимаемая при различныхъ изгибаніяхъ, безъ складокъ, гуттаперчевой трубки, изъ которой можно согнуть и модель *тора*.



Фиг. 226.

Примѣромъ трубчатой поверхности можетъ еще служить *трубчатая винтовая поверхность*, представляющая собою огибающую различныхъ положеній шара, центръ котораго движется по винтовой линіи.

Трубчатыя поверхности не линейчатыя и потому не развертывающіяся, кромѣ прямого круглаго цилиндра.

Второй способъ образованія развертывающихся поверхностей.

§ 328. Представимъ себѣ плоскость:

$$z = xf(\alpha) + y\varphi(\alpha) + F(\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (646)$$

движущуюся при измѣненіи параметра α. Посмотримъ, какова будетъ огибающая различныхъ положеній такой плоскости.

Чтобы найти огибающую, нужно, согласно § 326, исключить α изъ (646) и его произведеній по α:

$$0 = xf'(\alpha) + y\varphi'(\alpha) + F'(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (647)$$

Чтобы исключить и произвольныя функціи f, φ, F, дифференцируемъ (646) по x и потомъ по y; получимъ:

$$\frac{dz}{dx} = f(\alpha); \quad \frac{dz}{dy} = \varphi(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (648)$$

Исключая изъ уравненій α, получимъ уравненіе вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

или:

$$p = F(q) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (649)$$

По (636) это—дифференціальное уравненіе развертывающихся поверхностей.

Итакъ: развертывающаяся поверхность есть огибающая плоскости, движеніе которой происходитъ отъ измѣненія *одного* параметра.

Кривизна поверхностей и линій, лежащихъ на поверхности.

Замѣчаніе.

§ 329. Изъ всѣхъ геометрическихъ истинъ едва ли можно встрѣтить болѣе красивыя и имѣющія столь общій характеръ какъ тѣ, которыя относятся къ теоріи кривизны поверхностей и линій, проведенныхъ на поверхностяхъ. Приступая къ изученію главнѣйшихъ положеній этой теоріи, мы начнемъ съ разсмотрѣнія кривизны, которую имѣютъ въ данной точкѣ какой-либо поверхности линіи, проведенныя на этой поверхности чрезъ данную точку.

Индикатриса.

§ 330. Возьмемъ начало координатъ (фиг. 227) въ данной точкѣ поверхности и примемъ за плоскость (x, y) касательную плоскость, такъ что ось z пойдетъ по нормали, проведенной къ поверхности чрезъ данную точку 0. Разсмотримъ точки безконечно близкія къ 0. Разложимъ z по формулѣ (296):

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 y +$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 y\right]^{(2)} + \ldots$$

Фиг. 227.

Пользуясь сокращенными обозначеніями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t;$$

получимъ:

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}\,rx^2 + sxy + \frac{1}{2}\,ty^2 + \; . \; . \; . \; . \; (650)$$

Но при $x = 0$; $y = 0$ величина $z_0 = 0$; $p_0 = 0$; $q_0 = 0$, такъ какъ послѣднія двѣ суть тангенсы наклоненія касательныхъ параллельныхъ осямъ x и y къ этимъ осямъ; но при $x = 0$; $y = 0$, то есть въ точкѣ O, эти касательныя сливаются съ осями x и y. Поэтому:

$$z = \frac{1}{2} rx^2 + sxy + \frac{1}{2} ty^2 + \ldots \ldots \ldots \quad (651)$$

Полагая въ этомъ уравненіи $z = h$, гдѣ h весьма мало, получимъ уравненіе сѣченія mB данной поверхности плоскостью параллельною плоскости (x, y) и отстоящею отъ (x, y) на весьма малое разстояніе $h = OC$ (фиг. 227). Величинами высшихъ порядковъ малости можемъ пренебречь и получимъ уравненіе сѣченія mB въ видѣ:

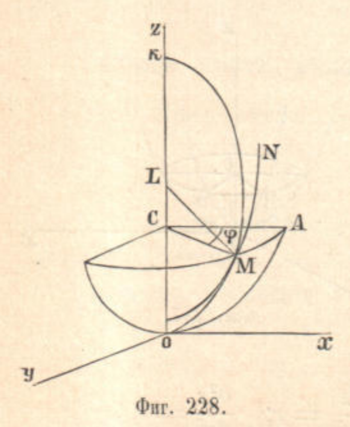
$$h = \frac{1}{2} rx^2 + sxy + \frac{1}{2} ty^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (652)$$

Это уравненіе 2-го порядка, и потому представляетъ собою эллипсъ или гиперболу.

Кривая (652) называется индикатрисою. Само по себѣ чрезвычайно интересно, что пересѣкая какую бы то ни было непрерывную и допускающую разложеніе (650) поверхность плоскостью весьма близкою къ касательной плоскости и параллельною ей, получаемъ либо эллипсъ, либо гиперболу. Сейчасъ увидимъ, какое важное значеніе имѣетъ индикатриса и почему ей дано такое названіе (индикатриса = указательница).

Кривизна нормальныхъ сѣченій.

§ 331. Разсмотримъ кривыя, происходящія отъ пересѣченія данной поверхности плоскостями, проходящими чрезъ нормаль OZ. Эти кривыя называются *нормальными сѣченіями* поверхности въ точкѣ O. Пусть OMN будетъ одна изъ такихъ кривыхъ (фиг. 228).



Фиг. 228.

Радіусъ кривизны кривой OMN въ точкѣ O будетъ радіусомъ круга, представляющаго собою предѣлъ круга проведеннаго чрезъ O и M. Пусть L есть центръ окружности проведенной чрезъ O и M; пусть MC есть перпендикуляръ, опущенный изъ M на діаметръ OK. Изъ геометріи извѣстно, что:

$$\frac{OK}{OM} = \frac{OM}{OC}.$$

Въ предѣлѣ, при приближеніи M къ O, получимъ $OL = \rho =$ радіусу кривизны. Слѣдовательно:

$$\frac{2\rho}{OM} = \frac{OM}{OC};$$

или:

$$\rho = lim\ \frac{OM^2}{2OC} = lim\ \frac{OM^2}{2h}$$

Но мы знаемъ, что $lim\ \frac{sin\varphi}{\varphi} = 1$. Слѣдовательно и предѣлъ отношенія $lim\ \frac{OM}{OC}$, хорда къ CM, равенъ 1. Поэтому, въ предѣлѣ, можно OM замѣнить чрезъ CM. Получимъ:

$$\rho = \frac{CM^2}{2h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (653)$$

Обозначимъ уголъ ACM, составляемый прямою CM съ плоскостью $(x,\ z)$ чрезъ φ. Тогда:

$$x = CM\ .\ cos\,\varphi$$
$$y = CM\ sin\,\varphi.$$

Вставивъ эти величины въ уравненіе (652) индикатрисы, получимъ:

$$CM^2\ (r\ cos^2\varphi + 2s\ .\ sin\,\varphi\ .\ cos\,\varphi + t\ sin^2\varphi) = 2h.$$

Опредѣляя отсюда CM и вставивъ въ (653), получимъ:

$$\rho = \frac{2h}{r\ cos^2\varphi + 2s\ .\ sin\,\varphi\ .\ cos\,\varphi + t\ .\ sin^2\varphi} \quad \ldots \quad (654)$$

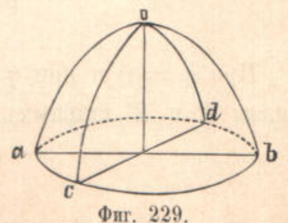
Эта замѣчательная формула даетъ радіусы кривизны для всѣхъ нормальныхъ сѣченій, проходящихъ чрезъ точку 0, какъ функцію угла φ составляемаго плоскостью такого сѣченія съ плоскостью $(x,\ z)$. Кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r\ cos^2\varphi + 2s\ .\ sin\,\varphi\ .\ cos\,\varphi + t\ .\ sin^2\varphi}{2h} \quad \ldots \quad (655)$$

Но и самое уравненіе (653) даетъ уже многое для соображенія о кривизнѣ нормальныхъ сѣченій. Именно оказывается, что ρ пропорціональны радіусамъ-векторамъ индикатрисы проведеннымъ изъ ея центра. Вотъ почему она и названа индикатрисой (указательницей); потому что ея радіусы-векторы, проведенные изъ центра, пропорціональны радіусамъ кривизны нормальныхъ сѣченій, плоскости которыхъ проходятъ чрезъ этотъ радіусъ-векторъ CM.

Закономѣрность распредѣленія кривизны нормальныхъ сѣченій.

§ 332. Но мы знаемъ, что какъ въ эллипсѣ, такъ и въ гиперболѣ, центральные радіусы-векторы имѣютъ максимальную и минимальную величину по осямъ и что оси ихъ перпендикулярны. Теорія индикатрисы показываетъ, слѣдовательно, что *всегда существуютъ два взаимно перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченія: одно съ наибольшей, а другое съ наименьшей кривизной.* Эти сѣченія aob и cod (фиг. 229) называются *главными*; ихъ радіусы кривизны мы будемъ обозначать чрезъ R и R'.



Фиг. 229.

Опредѣленіе положенія главныхъ сѣченій.

§ 333. Найдемъ теперь тѣ углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$, которые составляютъ съ плоскостью (x, z) главныя нормальныя сѣченія. Такъ какъ эти сѣченія соотвѣтствуютъ наибольшему и наименьшему значенію ρ, то, для нахожденія опредѣляющихъ ихъ угловъ φ, нужно (см. § 170) приравнять нулю производную отъ знаменателя выраженія (654). Получимъ:

$$\frac{d\,[r\,cos^2\varphi + 2s\,.\,sin\varphi\,.\,cos\varphi + t\,sin^2\varphi]}{d\varphi} = 0,$$

или:

$$-2r\,cos\varphi\,sin\varphi + 2s\,.\,cos^2\varphi - 2s\,.\,sin^2\varphi + 2t\,sin\varphi\,.\,cos\varphi = 0;$$

или:

$$(t - r)\,sin\varphi\,.\,cos\varphi + s\,(cos^2\varphi - sin^2\varphi) = 0;$$

или:

$$s\,.\,tg^2\varphi + (r - t)\,.\,tg\varphi - s = 0 \quad \ldots\ldots \quad (656)$$

Это уравненіе дастъ два дѣйствительныхъ корня для $tg\varphi$, которыхъ произведеніе = коэффиціенту при постоянномъ членѣ этого квадратнаго уравненія = — 1. Слѣдовательно углы будутъ отличаться одинъ отъ другого на $\frac{\pi}{2}$, такъ какъ $tg\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\varphi}$.

Опредѣленіе R и R'.

§ 334. Опредѣлимъ теперь радіусы кривизны R и R' главныхъ сѣченій. Для этого примемъ плоскости главныхъ сѣченій за плоскости (x, z) и (y, z), такъ что уголъ φ, опредѣляемый изъ (656), будетъ теперь представлять уголъ между плоскостью (x, z) одного изъ главныхъ сѣченій и плоскостью какого-нибудь промежуточнаго сѣченія, при чемъ величины φ соотвѣтствующія наибольшему и наименьшему ρ будутъ теперь O и $\frac{\pi}{2}$. Но уравненіе (656) только въ томъ случаѣ можетъ дать значенія O и ∞ для $tg\varphi$, соотвѣтствующія значеніямъ $\varphi = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, когда $s = 0$. Поэтому при такой системѣ координатъ $s = 0$, и формула (654) обращается въ:

$$\rho = \frac{2h}{r\,.\,cos^2\varphi + t\,.\,sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (657)$$

При $\varphi = 0$ и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получимъ изъ этой формулы радіусы кривизны R и R' главныхъ сѣченій:

$$R = \frac{2h}{r} \quad \ldots\ldots \quad (658)$$

$$R' = \frac{2h}{t} \quad \ldots\ldots \quad (659)$$

Откуда:

$$r = \frac{2h}{R}; \quad t = \frac{2h}{R'}.$$

Но вѣдь:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Теперь мы видимъ, наконецъ, геометрическое значенiе частныхъ производныхъ 2-го порядка: онѣ суть величины, пропорцiональныя кривизнѣ главныхъ сѣченiй, если за плоскость (x, y) принята касательная плоскость, и нормаль—за ось z.

Изъ (657) имѣемъ: $\frac{2h}{\rho} = r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi$. Опредѣляя изъ (658) и (659) r и t и вставляя въ это выраженiе $\frac{1}{\rho}$, получимъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R'} \sin^2 \varphi \quad \dots\dots\dots (660)$$

По этой формулѣ опредѣляется кривизна $\frac{1}{\rho}$ промежуточнаго нормальнаго сѣченiя по радiусамъ кривизны R и R' главныхъ сѣченiй. Для кривизны $\frac{1}{\rho_1}$ сѣченiя перпендикулярнаго тому, кривизна котораго равна $\frac{1}{\rho}$, получимъ выраженiе, замѣнивъ въ (660) φ чрезъ $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$. Получимъ:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} \sin^2 \varphi + \frac{1}{R'} \cos^2 \varphi \quad \dots\dots\dots (661)$$

Складывая (670) и (671), получимъ:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad \dots\dots\dots (662)$$

Сумма кривизнъ двухъ нормальныхъ сѣченiй, плоскости которыхъ взаимно перпендикулярны, есть величина для данной точки поверхности постоянная, равная суммѣ кривизнъ главныхъ сѣченiй.

Вставляя въ (660), вмѣсто φ, его величину изъ равенствъ:

$$x = CM \cos \varphi; \quad y = CM \sin \varphi,$$

получимъ:

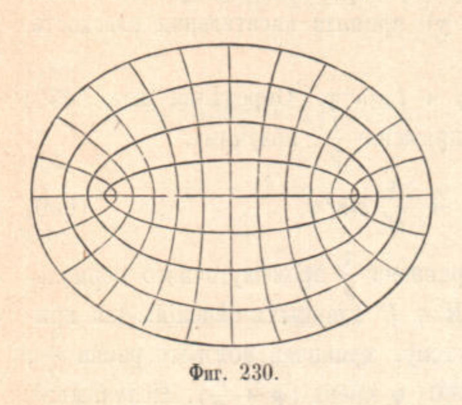
$$\frac{1}{\rho} = \frac{x^2}{R\,CM^2} + \frac{y^2}{R'\,CM^2}.$$

Линiи кривизны.

§ 335. *Линiею кривизны на поверхности называется линiя касательная во всѣхъ своихъ точкахъ къ главнымъ сѣченiямъ поверхности въ этихъ точкахъ.* Въ каждой точкѣ поверхности имѣются два взаимно перпендикулярныя главныя сѣченiя; слѣдовательно чрезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ взаимно-перпендикулярныя линiи кривизны. Вся поверхность, поэтому, покрыта сплошь двумя семействами линiй кривизны,

при чемъ линіи одного семейства пересѣкаютъ подъ прямыми углами линіи другого семейства: это значитъ, что элементы ихъ въ точкахъ пересѣченія взаимно-перпендикулярны, слѣдовательно и касательныя, проведенныя въ точкѣ пересѣченія взаимно-перпендикулярны. Такія линіи называются *взаимно-ортогональными.* Итакъ, два семейства линій кривизны взаимно-ортогональны.

На поверхностяхъ вращенія, напримѣръ, одно изъ семействъ линій кривизны состоитъ изъ меридіановъ (образуемыхъ пересѣченіемъ поверхности плоскостями, проходящими чрезъ ось вращенія), а другое семейство линій кривизны состоитъ изъ параллелей (образуемыхъ пересѣченіемъ поверхности плоскостями, перпендикулярными къ оси вращенія).

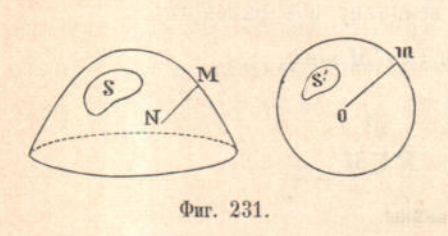


Фиг. 230.

На (фиг. 230) изображены линіи кривизны трехоснаго эллипсоида: онѣ представляются на плоскомъ чертежѣ въ видѣ софокусныхъ эллипсовъ и гиперболъ. Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что данное выше опредѣленіе линій кривизны равносильно такому опредѣленію: *линіи кривизны* суть такія линіи на данной поверхности, нормали которыхъ, проведенныя чрезъ двѣ сосѣднія точки, взаимно пересѣкаются.

Кривизна поверхности.

§ 336. Математики видѣли, что понятіе о кривизнѣ линій весьма плодотворно, и потому хотѣли съ такою же точностью опредѣлить понятіе о кривизнѣ поверхности. Но долго не могли этого сдѣлать. Наконецъ Гауссъ опредѣлилъ точно, что именно надо разумѣть подъ кривизною поверхности въ данной ея точкѣ. Какъ увидимъ, Гауссово опредѣленіе кривизны поверхности, съ перваго взгляда не имѣющее ничего похожаго на опредѣленіе кривизны линіи, оказывается вполнѣ съ нимъ сходнымъ.



Фиг. 231.

Гауссъ *) сравниваетъ линіи, начерченныя на какой-либо поверхности съ линіями, проведенными на шарѣ, радіусъ котораго равенъ единицѣ (фиг. 231). Онъ называетъ *соотвѣтственными* такую точку на поверх-

---

*) Гауссъ (Gauss, 1777 г.—1855 г.) профессоръ въ Геттингенѣ—одинъ изъ величайшихъ геометровъ настоящаго столѣтія; его называли princeps mathematicorum—глава математиковъ.

ности и такую точку на сферѣ, нормали которыхъ взаимно параллельны. Каждой точкѣ поверхности соотвѣтствуетъ въ этомъ смыслѣ своя точка на шарѣ; слѣдовательно и каждой линіи, проведенной на поверхности, соотвѣтствуетъ своя линія на шарѣ. Проведемъ на поверхности замкнутый контуръ S; ему будетъ соотвѣтствовать замкнутый контуръ (фиг. 231) S' на шарѣ. *Полною кривизною* части, ограниченной контуромъ S, Гауссъ называетъ площадь S' соотвѣтственнаго контура на шарѣ.

Среднею кривизною части S называется отношеніе $\frac{S'}{S}$ полной кривизны къ площади контура S, взятаго на поверхности.

Кривизною поверхности въ данной ея точкѣ Гауссъ назвалъ среднюю кривизну безконечно малаго элемента поверхности, окружающаго данную точку.

Укажемъ сходство Гауссова опредѣленія съ опредѣленіемъ кривизны линій.

Полная кривизна дуги = углу, составляемому касательными, проведеными въ ея концахъ = углу составляемому нормалями проведенными въ концахъ дуги = дугѣ круга (радіуса = 1), заключенной между радіусами параллельными нормалямъ, проведеннымъ въ концахъ дуги кривой.

Средняя кривизна дуги = отношенію $\frac{\alpha}{s}$ = отношенію упомянутой дуги окружности къ дугѣ кривой.

Кривизною кривой въ данной ея точкѣ называется средняя кривизна элемента кривой.

Полная кривизна части поверхности, ограниченной контуромъ S = равна площади соотвѣтственнаго контура на шарѣ, заключеннаго между нормалями параллельными нормалямъ, проведеннымъ въ точкахъ контура S поверхности.

Средняя кривизна части поверхности, ограниченной контуромъ $S_1 = \frac{S'}{S}$ = отношенію площади упомянутаго контура на шарѣ къ площади контура на поверхности.

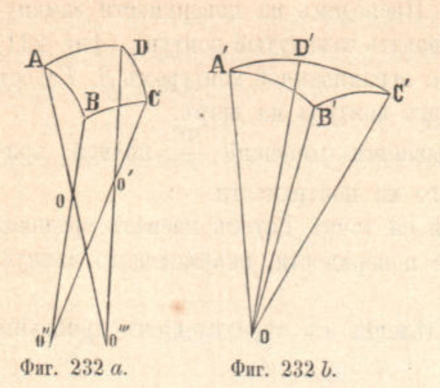
Кривизною поверхности въ данной ея точкѣ называется средняя кривизна ея элемента.

Величина кривизны поверхности.

§ 337. Оказывается, что величина Гауссовской кривизны превосходно опредѣляется знакомыми намъ изъ §§ 332, 334 радіусами R и R' кривизны главныхъ сѣченій. А именно:

Разсмотримъ на данной поверхности весьма малый прямоугольникъ $ABCD$ (фиг. 232, a), ограниченный линіями кривизны AB и CD одного семейства и линіями кривизны BC и DA другого семейства. Нормали сосѣднихъ точекъ каждой линіи кривизны взаимно пересѣкаются. Проведемъ ихъ на чертежѣ (фиг. 232, a). Назовемъ чрезъ $d\alpha$ и $d\beta$ стороны

прямоугольника $ABCD$. На (фиг. 232, b) изображено соотвѣтственное построеніе на Гауссовскомъ шарѣ радіуса равнаго единицѣ. На шарѣ нормали суть его радіусы и потому всѣ онѣ сходятся въ центрѣ шара. Линіи кривизны, а потому и стороны прямоугольника $A'B'C'D'$, суть дуги большихъ круговъ. Извѣстно, что для окружности: дуга = произведенію радіуса на уголъ:



Фиг. 232 a. Фиг. 232 b.

$$S = r\varphi.$$

Слѣдовательно

$$\varphi = \frac{s}{r}.$$

Поэтому, и по установленному соотвѣтствію, центральные углы, опирающіеся на стороны прямоугольника $A'B'C'D'$, лежащаго на шарѣ, равны $\frac{d\alpha}{R_1}$ $\frac{d\beta}{R_2}$, гдѣ R_1 и R_2 суть радіусы кривизны линій кривизны, ограничивающихъ прямоугольникъ $ABCD$ на поверхности; они равны слѣдовательно радіусамъ кривизны главныхъ нормальныхъ сѣченій поверхности въ той ея точкѣ, около которой взятъ элементъ $ABCD$. Площадь $A'B'C'D'$ равна слѣдовательно $\frac{d\alpha}{R_1} \cdot \frac{d\beta}{R_2}$:

$$A'B'C'D' = \frac{d\alpha \,.\, d\beta}{R_1 \,.\, R_2}.$$

Отношеніе этой площади къ площади $d\alpha\, d\beta$ прямоугольника $ABCD$ и есть, по Гауссову опредѣленію, кривизна поверхности. Слѣдовательно:

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{A'B'C'D'}{ABCD} = \left(\frac{d\alpha\, d\beta}{R_1\, R_2}\right) : d\alpha\, d\beta = \frac{1}{R_1\, R_2}.$$

Итакъ,

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1\, R_2} \quad \ldots\ldots\ldots (663)$$

Кривизна поверхности въ данной ея точкѣ = произведенію кривизнъ главныхъ сѣченій, проведенныхъ въ этой точкѣ.

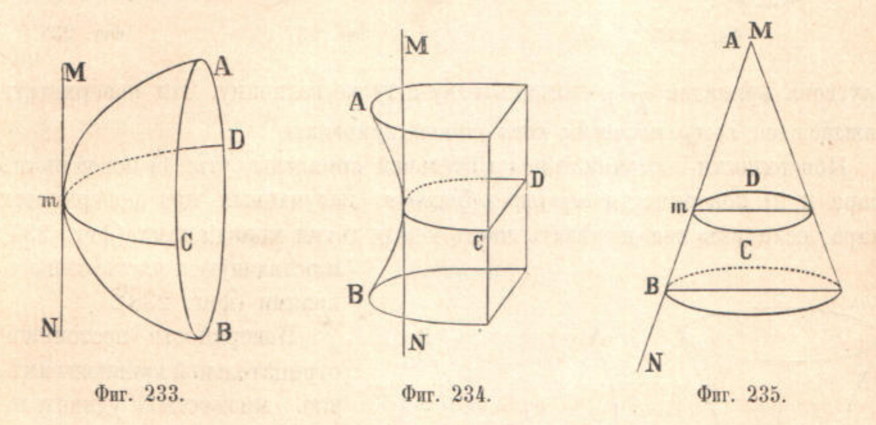
Раздѣленіе точекъ поверхности на 4 вида.

§ 338. Замѣтимъ, что радіусы кривизны кривыхъ, обращенныхъ выпуклостями въ разныя стороны, противуположны, потому что центры кривизны, по самому опредѣленію, всегда находятся съ вогнутой стороны кривой.

Кривизна поверхности $\frac{1}{RR_1}$ *положительна* въ томъ случаѣ, если R и R_1 или оба положительны или оба отрицательны. Въ этомъ случаѣ,

слѣдовательно, главныя нормальныя сѣченія обращены вогнутостями въ одну сторону (фиг. 233), а потому и промежуточныя нормальныя сѣченія обращены вогнутостями въ одну сторону. Слѣдовательно: въ случаѣ *положительной* Гауссовой кривизны, часть поверхности, прилегающая къ точкѣ m, вся находится по одну сторону плоскости MN. Точки m, въ которыхъ Гауссова кривизна $\frac{1}{RR_1}$ *положительна*, называются *синкластическими* или *точками положительной кривизны;* мы бы предложили ихъ называть *бугорчатыми*.

Кривизна поверхности $\frac{1}{R \cdot R_1}$ можетъ быть только тогда отрицательною, если R положительно, а R_1 отрицательно или, наоборотъ, R отрицательно, R' положительно, однимъ словомъ когда R и R' имѣютъ противуположные знаки. Въ этомъ случаѣ главныя нормальныя сѣченія AB



Фиг. 233. Фиг. 234. Фиг. 235.

и CD обращены вогнутостями въ разныя стороны (фиг. 234); поверхность около такой точки сѣдлообразна и распространяется по обѣ стороны касательной плоскости MN. Точки m, въ которыхъ Гауссова кривизна отрицательна, называются *антикластическими* или *точками отрицательной кривизны*. Мы бы предложили называть ихъ *сѣдловинными*.

Если одна изъ величинъ, R или R', равна безконечности, то Гауссова кривизна $\frac{1}{R_1 R_2} = 0$. Въ этомъ случаѣ нормальное сѣченіе, радіусъ кривизны котораго $= \infty$, есть прямая (фиг. 235). Точки m, въ которыхъ Гауссова кривизна $= 0$, называются *точками нулевой кривизны*.

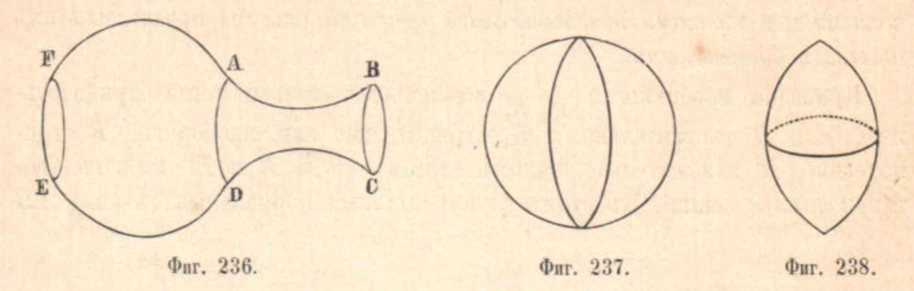
Наконецъ могутъ быть такія особыя точки поверхности, въ которыхъ производныя p, q, r, t, s претерпѣваютъ перерывъ или имѣютъ неопредѣленное значеніе. Въ такихъ точкахъ имѣется или острое ребро, или рѣзкая складка или остріе (вершина конуса) и къ нимъ обыкновенная теорія кривизны поверхностей неприложима. Это *особыя* точки.

Одна и та же поверхность можетъ имѣть и точки положительной и точки отрицательной кривизны. Напримѣръ поверхность (фиг. 236), образованная вращеніемъ синусоиды, имѣетъ въ поясѣ $ABCD$ только точки

отрицательной кривизны (сѣдловинныя), тогда какъ въ поясѣ *EFAD* только точки положительной кривизны (бугорчатыя).

Но бываютъ также поверхности, обладающія точками только одного вида. Напримѣръ эллипсоидъ—есть поверхность положительной кривизны; гиперболоидъ объ одной полости—отрицательной кривизны.

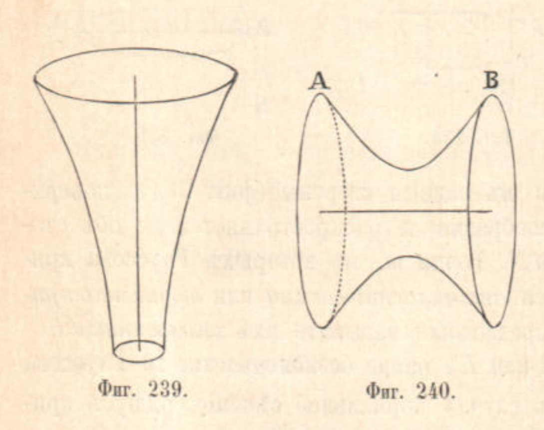
Могутъ быть даже такія поверхности, на которыхъ для каждой точки



Фиг. 236. Фиг. 237. Фиг. 238.

Гауссова кривизна $\frac{1}{R_1 R_2}$ имѣетъ одну и ту же величину. Эти поверхности называются *поверхностями постоянной* кривизны.

Поверхности постоянной положительной кривизны суть: 1) поверхность шара и 2) поверхности *веретенообразныя*, получаемыя изъ поверхности шара, если изъ нея вырѣзать часть между двумя меридіанами (фиг. 237) и остающуюся часть сложить краями (фиг. 238).



Фиг. 239. Фиг. 240.

Поверхности постоянной отрицательной кривизны имѣютъ множество удивительныхъ свойствъ. Къ нимъ относятся: *псевдосфера* Бельтрами (фиг. 239), на которой справедлива геометрія Лобачевскаго, отвергающая постулатъ о параллельныхъ линіяхъ. *Алиссеида*, происходящая отъ вращенія *цѣпной* линіи *AB*, то есть линіи, видъ которой принимаетъ тяжелая цѣпь, подвѣшенная въ двухъ точкахъ. Поверхности мыльныхъ перепонокъ, образующихся, при выниманіи изъ мыльной воды проволочныхъ фигуръ (кубовъ, пирамидъ...), суть тоже поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Аналитическіе признаки точекъ различныхъ видовъ.

§ 339. Мы видѣли въ § 62-мъ, что кривая 2-го порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

будетъ эллипсомъ или гиперболою, смотря по тому будетъ ли $B^2 - 4AC$

меньше или больше нуля. Приложимъ этотъ признакъ къ индикатрисѣ (652). Въ ней $A=\frac{1}{2}r$; $B=s$; $C=\frac{1}{2}t$.

$$B^2-4AC=s^2-\frac{4}{2.2}rt=s^2-rt.$$

Итакъ индикатриса будетъ гиперболою или эллипсомъ, смотря по тому, будетъ ли:

$$s^2-rt$$

больше или меньше нуля.

Если $s^2-rt>0$, то индикатриса—гипербола; тогда во второй части уравненія (560) между членами будетъ знакъ —, то есть одна изъ величинъ R_1 или R_2 отрицательна. Итакъ, въ точкахъ *отрицательной* кривизны индикатриса—*гипербола*, и

$$s^2-rt>0.$$

Если $s^2-rt<0$, то индикатриса—эллипсъ; тогда въ уравненіи (570) оба R имѣютъ одинаковые знаки. Итакъ, въ точкахъ *положительной* кривизны индикатриса—*эллипсъ*, и:

$$s^2-rt<0.$$

Если $s^2-rt=0$, то (662) обращается въ:

$$h=\frac{1}{2}rx^2+rt\,xy+\frac{1}{2}ty^2;$$

или:

$$h=\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\,x+\sqrt{\frac{t}{2}}\,y\right)^2.$$

Это уравненіе разбивается на 2 уравненія 1-й степени:

$$+\sqrt{h}=\sqrt{\frac{r}{2}}\,x+\sqrt{\frac{t}{2}}\,y$$

$$-\sqrt{h}=\sqrt{\frac{r}{2}}\,x+\sqrt{\frac{t}{2}}\,y$$

и представляетъ поэтому пару прямыхъ. Что же это значитъ?

Вопросъ разъясняется тѣмъ, что само условіе $s^2-rt=0$, есть уравненіе (640) развертывающихся поверхностей, въ которыхъ чрезъ данную точку всегда проходитъ прямолинейная образующая, сплошь лежащая въ касательной плоскости и потому перпендикулярная къ нормали; она и будетъ тѣмъ нормальнымъ сѣченіемъ, радіусъ кривизны котораго $R_1=\infty$. Поэтому это будетъ случай когда Гауссова кривизна $\frac{1}{R_1R_2}$ равна нулю.

Не забудемъ, что $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ можно вычислить по уравненію поверхности. Подставляя затѣмъ въ нихъ тѣ значенія x, y, z, которыя соотвѣтствуютъ данной точкѣ поверхности, испытаемъ, какова получается величина $s^2 - rt$, и по этому, на основаніи сказаннаго, будемъ судить, какова кривизна въ данной точкѣ, положительная, нулевая или отрицательная.

Годезическія линіи.

§ 340. На плоскости кратчайшая линія между двумя точками — прямая; на шарѣ кратчайшая линія между двумя точками — дуга большаго круга. Кратчайшія линіи на поверхности между двумя ея точками называются *геодезическими* линіями.

Часть III.

Основанія раціональной механики.

ВСТУПЛЕНІЕ.

Опредѣленіе науки.

§ 341. *Механика есть наука о движеніи.* Всѣ процессы неорганической природы сводятся, съ развитіемъ нашихъ знаній, все болѣе и яснѣе къ различнаго рода движенію. Отсюда явствуетъ великое значеніе механики: она должна служить настоящимъ краеугольнымъ камнемъ астрономіи, физики, химіи и многихъ другихъ наукъ. Она, кромѣ того, отличается почти такою же достовѣрностью какъ математика, и именно посредствомъ механики математика овладѣваетъ постепенно другими науками, внося въ нихъ вѣрность и точность. Механика стоитъ на рубежѣ чистой математики и естественныхъ наукъ, потому что она, основываясь на наименьшемъ числѣ данныхъ, полученныхъ опытомъ, дальнѣйшее свое развитіе получаетъ въ духѣ чистой математики и даже прямо методами чистой математики.

Науки сходныхъ съ механикою названій.

§ 342. Движеніе небесныхъ тѣлъ изучается *небесною механикою*, составляющею часть *астрономіи*. *Математическая физика* можетъ быть названа механикою физическихъ явленій. Наука, изучающая движеніе машинъ, называется *практическою механикою*. Наука, изучающая силы, дѣйствующія на части построекъ, называется *строительною механикою*.

Всѣ эти науки, однако, пользуются данными механики какъ науки о движеніи, но каждая изъ нихъ преслѣдуетъ свои спеціальныя цѣли. Въ отличіе отъ нихъ механика, какъ наука, имѣющая цѣлью самое изслѣдованіе движенія, называется иногда *раціональною механикою*. Она можетъ быть, какъ увидимъ впослѣдствіи, сведена на интегрированіе нѣкоторыхъ уравненій; если она пользуется только этимъ методомъ, то ее называютъ *аналитическою механикою*.

Основные методы изученія природы.

§ 343. При изученіи природы человѣчество пользовалось до сихъ поръ методами, покоящимися на одной изъ трехъ основъ: 1) наблюденіе, 2) опытъ, 3) математика.

Наблюденіемъ совершающагося въ природѣ человѣкъ занимался всегда, но какъ основа научнаго метода, наблюденіе выставлено было Аристотелемъ. Наблюденіемъ человѣкъ изучаетъ факты въ томъ видѣ, какъ они даны природою.

Въ опытѣ человѣкъ создаетъ особую искусственную обстановку для выдѣленія тѣхъ фактовъ, которые онъ хочетъ изучить. Отцомъ опытнаго метода считаютъ Бэкона Верулэмскаго (1560—1616).

Математика прилагается къ изученію природы болѣе всего чрезъ механику.

Если сравнить движеніе науки впередъ, и совершаемое ею постепенное превращеніе области невѣденія въ область знанія, съ арміею, завоевывающею непріятельскую страну, то метафизическія соображенія, основанныя ни аналогіяхъ (сходствахъ), діалектикѣ, непосредственномъ разсужденіи и проч., можно сравнить съ летучими передовыми отрядами, быстро и далеко проникающими въ непріятельскую страну, но и столь же быстро отбиваемыми. Наблюденіе и опытъ — это главное ядро арміи — пѣхота, проникающая впередъ медленно, но солидно. Математика же можетъ быть уподоблена инженерамъ, строящимъ въ непріятельской странѣ свои крѣпости, съ тою только разницею, что крѣпости построенныя математикою уже не сдаются обратно.

Къ этому надо еще прибавить вѣру, безъ которой наша армія двигалась бы въ непроглядной тьмѣ.

Тутъ каждому методу воздается по заслугамъ: человѣчество не можетъ, по основнымъ свойствамъ своего пытливаго духа, ждать, пока математика настроитъ вездѣ свои крѣпости, даже не можетъ ждать терпѣливо медленнаго движенія арміи наблюденія и опыта, но оно должно имѣть и инженеровъ, чтобы завоеваніе оказалось прочнымъ. Математика и проникаетъ постепенно въ другія науки. Небесная механика уже подчинена ей безвозвратно, въ физикѣ она полная хозяйка, химія уже съ каждымъ годомъ все болѣе ей подчиняется, и такъ далѣе. Но она зато и не забѣгаетъ такъ далеко какъ психологія или политическая экономія. Мы увидимъ, однако, что путь, которымъ она войдетъ въ науки, пока едва съ нею соприкасающіяся, уже намѣченъ твердою рукою Лагранжа.

Положеніе механики между математикою и опытными науками.

§ 344. Изучая движеніе, механика не можетъ обойтись безъ опыта, но—не довѣряя ему—она стремится быть основанной на наименьшемъ числѣ положеній, данныхъ опытомъ. Эти положенія называются основными за-

конами механики. Они могутъ быть сгруппированы различнымъ образомъ но наиболѣе удачная группировка этихъ законовъ была дана Ньютономъ въ его Philosophiae Naturalis Principia 1687 г.

Основные законы Ньютона.

§ 345. Ньютонъ высказалъ эти законы въ такой формѣ:

1-й законъ. Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе.

2-й законъ. Измѣненіе движенія пропорціонально приложенной дѣйствующей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила.

3-й законъ. Всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ противодѣйствіе равное и противуположное, то есть дѣйствія двухъ тѣлъ, одно на другое, всегда равны и направлены противуположно.

Эти законы установлены не однимъ или немногими опытами, но основаны на цѣломъ рядѣ наблюденій и опытовъ. Ньютону предшествовалъ Галилей, изслѣдовавшій опытнымъ путемъ съ необыкновенною проницательностью движеніе падающихъ тѣлъ и открывшій законы ихъ паденія. Галилей и считается отцомъ механики (1564—1642).

Но подобрать основные законы такъ, чтобы ихъ было только три и чтобы они были достаточны для построенія на нихъ всей механики—это дѣло могло быть исполнено только такимъ гигантомъ науки, неимѣющимъ себѣ равнаго, какимъ былъ Ньютонъ, обуздавшій движенія небесныхъ свѣтилъ закономъ тяготѣнія и непрерывное измѣненіе—производною.

ГЛАВА I.

Механика точки.

Уравненія движенія точки.

§ 346. Движеніе точки вполнѣ опредѣлено, если ея координаты (x, y, z) даны въ видѣ явныхъ функцій времени t, считаемаго отъ какого нибудь момента. Другими словами: по даннымъ уравненіямъ вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \\ z &= \varphi(t) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (664)$$

можно вполнѣ прослѣдить всѣ подробности движенія точки (x, y, z). Дѣйствительно, по этимъ уравненіямъ опредѣляются (x, y, z), соотвѣтствующіе любому времени t, значитъ опредѣляется, гдѣ въ какое время находится точка. Эти уравненія (664) называются *уравненіями движенія* точки.

Если исключимъ изъ (664) время t, то получимъ два уравненія, содержащія перемѣнныя x, y, z; они представляютъ, слѣдовательно, нѣкото-

рую кривую, которая будетъ геометрическимъ мѣстомъ тѣхъ точекъ пространства, чрезъ которыя движущаяся точка проходитъ—это будетъ линія пути, описываемаго точкою. Такая линія, описываемая точкою при ея движеніи. называется *траекторіею* движущейся точки.

Итакъ: *по исключеніи времени t изъ уравненій* (664) *движенія точки, получаются два уравненія, выражающія ея траекторію.*

Примѣръ: Даны уравненія движенія точки такого вида:

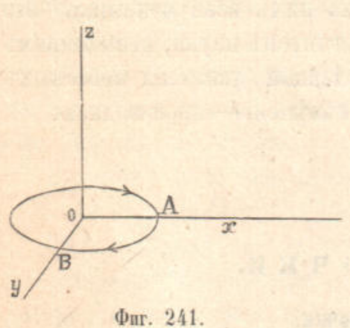
$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (665)$$

опредѣлить траекторію точки?

Для исключенія времени t возведемъ въ квадратъ два первыя изъ данныхъ уравненій и сложимъ; получимъ: $x^2 + y^2 = R^2$. Слѣдовательно уравненія траекторіи будутъ:

$$x^2 + y^2 = R^2$$
$$z = 0.$$

Уравненіе $z = 0$ показываетъ, что траекторія лежитъ въ плоскости (x, y). Уравненіе $x^2 + y^2 = R^2$ показываетъ, что она представляетъ собою окружность (фиг. 241), описанную радіусомъ R изъ начала координатъ.



Фиг. 241.

Даннныя уравненія движенія (665) показываютъ. что при $t = 0$. должно быть: $x = R$; $y = 0$. Значитъ время считается отъ того момента, когда точка проходитъ чрезъ пересѣченіе упомянутой окружности съ осью x. Затѣмъ изъ уравненій (665) видно, что уголъ, составляемый радіусомъ, проведеннымъ изъ начала въ движущуюся точку, равенъ t. Слѣдовательно точка движется по окружности въ напревленіи, указанномъ стрѣлкою и дуга, описанная ею въ теченіи времени t и считаемая отъ A, равна $\frac{2\pi R\,.\,t\,.}{360}$. Спустя время $t = \frac{\pi}{2}$ послѣ прохожденія чрезъ A, точка приходитъ въ пересѣченіе B окружности съ осью y. Вообще всѣ подробности движенія можно прослѣдить, зная уравненія движенія. Опредѣлить движеніе точки—значитъ найти ея уравненія движенія, изслѣдованіе которыхъ даетъ полную картину движенія.

Равномѣрно-прямолинейное движеніе точки.

§ 347. Разсмотримъ движеніе, опредѣляемое наиболѣе простыми уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + bt \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (666)$$

Уравненія: $y = 0$; $z = 0$ показываютъ, что точка не сходитъ съ оси x, и совершаетъ, слѣдовательно, прямолинейное движеніе по оси x. Уравненіе $x = a + bt$ показываетъ слѣдующее: при $t = 0$, координата x равна a. Слѣдовательно въ началѣ времени (въ тотъ моментъ, отъ котораго отсчитывается время), точка находится на разстояніи a отъ начала.

Разсмотримъ положенія точки въ два различные момента t_0 и t_1. Называя чрезъ x_0, x_1 соотвѣтственные этимъ моментамъ иксы, получимъ:

$$x_0 = a + bt_0$$

$$x_1 = a + bt_1.$$

Вычитая 1-е изъ этихъ уравненій изъ 2-го, получимъ:

$$x_1 - x_0 = b(t_1 - t_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ((667)$$

$x_1 - x_0 =$ величинѣ пути, пройденнаго точкою въ теченіи времени $t_1 - t_0$. Если этотъ промежутокъ времени равенъ 1, то изъ (667) получимъ $x_1 - x_0 = b$. Итакъ b есть путь, проходимый точкою въ единицу времени. Изъ (667) видно, что въ равные промежутки времени точка проходитъ равные пути. Такое движеніе называется *равномѣрно прямолинейнымъ.*

Путь b, проходимый точкою въ каждую единицу времени, называется скоростью точки въ равмомѣрно прямолинейномъ движеніи. Въ равномѣрно-прямолинейномъ движеніи скорость b есть величина постоянная,

Изъ (667) имѣемъ

$$b = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Это значитъ, что: *въ равномѣрно прямолинейномъ движеніи скорость равна частному отъ раздѣленія пройденнаго пути на время, въ теченіи котораго онъ пройденъ.*

Прямолинейное движеніе съ перемѣнною скоростью.

§ 348. Если мы будемъ разсматривать мельчайшія частицы матеріи и назовемъ *матерьяльною точкою* безконочно малое матерьяльное тѣло, то по 1-му закону Ньютона разсмотрѣнное нами въ предыдущемъ параграфѣ равномѣрно-прямолинейное движеніе и есть то самое движеніе, которое стремится сохранять матерьяльная точки. Если же на точку дѣйствуетъ нѣкоторая причина называемая *силою*, то движеніе можетъ измѣняться и перестать быть равномѣрно-прямолинейнымъ. По 2-му закону направленіе измѣненія движенія совпадаетъ съ направленіемъ силы. Слѣдовательно, если сила направлена по оси x, по которой точка двигалась равномѣрно, то измѣненіе движенія произойдетъ тоже по оси x въ томъ или другомъ ея направленіи, и точка всетаки не сойдетъ съ оси x. Въ чемъ же будетъ состоять измѣненіе ея движенія? Скорость движенія можетъ измѣняться. Итакъ, подъ дѣйствіемъ силы, точка можетъ двигаться прямоли-

нейно такимъ образомъ, что скорость ея будетъ мѣняться. Но что же такое будетъ скорость въ такомъ движеніи?

Прямолинейное движеніе съ перемѣнною скоростью можетъ быть разсматриваемо какъ рядъ послѣдовательныхъ безконечно малыхъ движеній равномѣрно-прямолинейныхъ. Пусть въ теченіе безконечно малаго времени dt матерьяльная точка проходитъ путь dx по оси x. На безконечно маломъ пути dx, пройденномъ въ теченіи безконечно малаго времени dt всякое прямолинейное движеніе можно разсматривать какъ равномѣрное, а потому скорость, съ которою точка проходитъ путь dx будетъ, по предъидущему параграфу, равно частному отъ раздѣленія dx на dt. Называя скорость буквою V получимъ

$$V = \frac{dx}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (668)$$

Въ слѣдующій моментъ dt скорость сдѣлается другою, но и величина пути dx измѣнится и въ каждый моментъ:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Итакъ: во всякомъ прямолинейномъ движеніи скорость v равна первой производной $\frac{dx}{dt}$ отъ пути по времени.

Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи.

§ 349. Измѣненіемъ прямолинейнаго движенія можетъ быть только измѣненіе скорости. Положимъ, что въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt скорость v измѣнилась на dv, такъ что изъ v обратилась въ $v + dv$.

Пусть движеніе по оси x опредѣлено уравненіями: $y = 0$; $z = 0$; $x = f(t)$. Тогда по предъидущему параграфу:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

Слѣдовательно:

$$dv = d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f''(t) . dt$$

Такое приращеніе получаетъ скорость въ теченіи времени dt.

Какъ скорости мы относили къ 1 времени, такъ и приращенія ея должны относить къ 1 времени. Еслибы точка продолжала двигаться съ тѣмъ же приращеніемъ скорости dv въ каждое dt, то въ 1 времени она получила бы приращеніе:

$$\frac{dv}{dt} = f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Это и есть приращеніе скорости отнесенное къ 1 времени; оно называется *ускореніемъ* и обозначается буквою j.

Итакъ: *во всякомъ прямолинейномъ движеніи ускореніе j равно первой производной отъ скорости по времени или второй производной отъ пути по времени.*

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (669)$$

Разъясненія понятій v и j.

§ 350. Когда мы говоримъ, что въ данный моментъ точка, движущаяся съ перемѣнною скоростью, имѣетъ скорость 100 метровъ въ секунду, это значитъ, что еслибы отъ даннаго момента скорость не измѣнялась, то въ 1 секунду точка прошла бы 100 метровъ, на самомъ же дѣлѣ, благодаря перемѣнности скорости, она можетъ быть пройдетъ и другое разстояніе.

Напримѣръ: поѣздъ вышелъ со станціи тихо, потомъ идетъ все скорѣе и подходитъ къ слѣдующей станціи опять тихо. Мы можемъ сказать, что въ извѣстный моментъ не доходя до станціи, положимъ 10 верстъ, поѣздъ идетъ со скоростью 60 верстъ въ часъ. Это не значитъ еще, что черезъ часъ онъ продвинется на 60 верстъ, потому что онъ можетъ и замедлить свой ходъ и даже остановиться на станціи часа на два и слѣдовательно въ теченіи часа продвинуться отъ разсматриваемаго момента только на 10 верстъ;—это значитъ, что, *не измѣняя своей скорости* отъ разсматриваемаго момента поѣздъ чрезъ часъ продвинулся бы на 60 верстъ.

Когда мы говоримъ, что въ данный моментъ точка, имѣющая скорость 100 метровъ въ секунду, имѣетъ ускореніе 5 метровъ въ секунду, это значитъ, что *если бы точка не измѣняла своего ускоренія* отъ даннаго момента, то, чрезъ 1 секунду скорость ея увеличилась бы на 5 метровъ и сдѣлалась бы равною 105 метрамъ въ секунду. На самомъ же дѣлѣ скорость чрезъ 1 секунду можетъ быть и не будетъ $= 105$ метрамъ, благодаря перемѣнности ускоренія.

Скорости и ускоренія, имѣющіяся въ данный моментъ, мы относимъ къ 1 времени, предполагая ихъ за эту 1 времени не мѣняющимися, но не забывая, что они на самомъ дѣлѣ мѣняются, и поэтому въ слѣдующій моментъ имѣютъ другія величины. Мы можемъ напримѣръ сказать: въ данный моментъ точка обладаетъ скоростью 10 метровъ въ секунду, чрезъ $\frac{1}{10}$ секунды она имѣетъ скорость 15 метровъ въ секунду.

Сила.

§ 351. Точка можетъ двигаться неравномѣрно (съ перемѣнною скоростью), но прямолинейно по оси x подъ дѣйствіемъ нѣкоторой силы направленной по оси x. По 2-му закону Ньютона измѣненіе движенія пропорціонально силѣ; значитъ сила равна произведенію измѣненія движенія на нѣкоторый постоянный коэффиціентъ m, и припомнимъ, что измѣненіе движенія равно ускоренію j. Назовемъ силу чрезъ P. Ньютоновъ

2-й законъ выразится такъ:

$$P = mj \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (670)$$

Здѣсь коэффиціентъ m называется массою. Уравненіе (670) показываетъ, что во всякомъ прямолинейномъ движеніи *сила равна произведенію массы на ускореніе.*

По (669) можно сказать, что:

$$P = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (671)$$

или:

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (672)$$

Мы будемъ обозначать силы, дѣйствующія по направленію осей, большими буквами, соотвѣтствующими названіямъ осей. Такъ что уравненіе (672) изобразимъ такъ:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (673)$$

Масса.

§ 352. Изъ (670) получается:

$$m = \frac{P}{j} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (674)$$

масса равна частному отъ раздѣленія силы на ускореніе. Изъ (670) имѣемъ также:

$$j = \frac{P}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (675)$$

Эта формула показываетъ, что, при той же самой силѣ P, ускореніе j тѣмъ меньше, чѣмъ больше масса m.

Вещество лежащее на чашкѣ вѣсовъ подвержено одной силѣ—земному притяженію; величина этой силы называется *вѣсомъ* тѣла. Ускореніе, вызываемое земнымъ притяженіемъ на поверхности земли, различно въ различныхъ мѣстахъ земного шара. Въ среднемъ оно равно 9,81 метръ въ секунду. Его мы обозначимъ буквою g. По (670) имѣемъ:

вѣсъ тѣла = (массѣ) (g) = (массѣ) (9,81 метр.).

Но вѣсъ опредѣляется опытнымъ путемъ на вѣсахъ, а именно массу—то непосредственнымъ опытомъ мы не опредѣляемъ: мы только знаемъ, что она пропорціональна вѣсу. Масса опредѣляется изъ (674):

$$\text{масса} = \frac{\text{вѣсу}}{g} = \frac{\text{вѣсу}}{9{,}81 \text{ метр.}} \text{ *)} \quad \ldots \ldots \quad 676)$$

Движеніе падающей точки.

§ 353. Теперь мы можемъ изучать движеніе, производимое данной силой: по данной силѣ находить уравненіе движенія. Разсмотримъ одно

*) См. примѣчаніе въ концѣ книги.

такое движеніе и по нему познакомимся со многими важнѣйшими понятіями и пріемами механики.

Въ началѣ координатъ 0 (фиг. 242) находится тяжелая точка m, имѣющая массу m. Въ нѣкоторый моментъ, отъ котораго считаемъ время, слѣдовательно при $t = 0$, предоставляемъ тѣлу свободу падать подъ вліяніемъ земного притяженія. Опредѣлить движеніе тѣла.

Возьмемъ ось x по вертикали внизъ. Дѣйствующая сила есть вѣсъ тѣла, который по (670) равенъ mg. По (671) эта сила равна $m\frac{dv}{dt}$. Слѣдовательно.

$$X = mg = m\frac{dv}{dt}$$

откуда:

$$g = \frac{dv}{dt},$$

или:

$$dv = gdt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (677)$$

Это уравненіе надо интегрировать. Получимъ:

$$\int dv = g\int dt,$$

откуда:

$$v = gt + c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (678)$$

0

x

Фиг. 242.

Для опредѣленія постояннаго интеграціи c_1 разсуждаемъ такъ: при $t = 0$, скорость была еще равна нулю; слѣдовательно, въ началѣ движенія, уравненіе (678) имѣло видъ:

$$0 = g \, . \, 0 + c_1$$

отсюда $c^1 = 0$. Слѣдовательно (678) въ теченіи всего движенія будетъ таково:

$$v = gt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (679)$$

Но мы знаемъ по (668), что $v = \frac{dx}{dt}$. Слѣдовательно (679) можно написать такъ:

$$\frac{dx}{dt} = gt,$$

или:

$$dx = gt\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (680)$$

Интегрируя получимъ:

$$\int dx = g\int tdt;$$

или:

$$x = g\frac{t^2}{2} + c_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (681)$$

гдѣ c_2 постоянное интеграціи. Опредѣляемъ его изъ начальныхъ данныхъ: при $t = 0$, точка находилась въ началѣ 0, слѣдовательно тогда было $x = 0$. Поэтому уравненіе (681), приложенное къ началу движенія, таково:

$$0 = \frac{g \cdot 0}{2} + c_2 ,$$

откуда $c_2 = 0$. Слѣдовательно:

$$x = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (682)$$

Уравненіе (679) показываетъ, что скорость увеличивается пропорціонально времени. Такое движеніе называется *равномѣрно ускореннымъ*.

Уравненіе (682) есть именно уравненіе движенія; оно опредѣляетъ x для каждаго времени t. Оказывается, что пройденные точкою пути пропорціональны квадрату времени.

Планъ, по которому рѣшена была задача, таковъ: по законамъ Ньютона составляемъ дифференціальное уравненіе движенія $mg = m\frac{dv}{dt}$; сокращаемъ его на m, интегрируемъ, опредѣляемъ постоянное c_1 по начальнымъ даннымъ, интегрируемъ полученное уравненіе $\frac{dx}{dt} = gt$, опредѣляемъ постоянное c_2 по начальнымъ даннымъ, получимъ уравненіе движенія.

Такимъ образомъ рѣшаются задачи, въ которыхъ, по даннымъ силамъ, требуется найти уравненіе движенія. Въ нихъ приходится два раза интегрировать, при чемъ постоянныя интеграціи опредѣляются изъ начальныхъ данныхъ.

Работа

§ 354. *Работою*, которую производитъ данная сила, дѣйствующая на свободную точку, называется произведеніе $P \cdot h$ силы P на путь h, пройденный точкою. Въ приведенномъ въ § 353-емъ примѣрѣ падающей точки работа силы тяжести (вѣса) mg будетъ, при прохожденіи точкою разстоянія $x_1 - x_0$, равна

$$(x_1 - x_0)\, mg \,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (683)$$

работа же силы тяжести mg, при прохожденіи точкою пути отъ начала движенія на разстояніе x, будетъ:

$$mgx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (684)$$

Если точка не свободна, а принуждена двигаться по опредѣленному пути, (напримѣръ если она заключена въ прямолинейной трубкѣ) то *работа* T равна произведенію

$$Ph = T, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (685)$$

если сила направлена по пути, проходимому точкою (фиг. 243).

Если же направленіе силы составляетъ съ направленіемъ пути уголъ φ, то разсуждаемъ такъ (фиг. 244). Разлагаемъ силу P на двѣ: на силу p, направленную по пути и на силу q, перпендикулярную къ пути. Замѣ-

чаемъ, что q только прижимаетъ точку къ тому, что препятствуетъ ей сойти съ пути, двигаетъ же точку только проложенiе p силы P на путь. Поэтому работа здѣсь будетъ равна

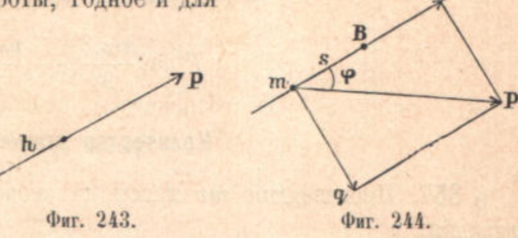
$$T = p \, . \, s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (686)$$

произведенiю пути s на проложенiе p силы P на направленiе пути.

Но изъ чертежа (фиг. 244) видно, что $p = P \cos \varphi$, Слѣдовательно:

$$T = P \, . \cos\varphi \, . \, s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (687)$$

Работа равна произведенiю: силы P, косинуса угла, составляемаго направленiями пути и силы, и самаго пути s. Это самое общее выраженiе работы, годное и для криволинейнаго движенiя, если за φ будемъ принимать уголъ, составляемый силою P и элементомъ траекторiи.



Фиг. 243. Фиг. 244.

Работа не зависитъ отъ времени и измѣняется килограммометрами. Одинъ килограммометръ = работѣ, потребной для поднятiя одного килограмма на одинъ метръ.

Живая сила.

§ 355. Произведенiе $\frac{mv^2}{2}$ массы на половину квадрата скорости называется живою силою.

Интегралъ живыхъ силъ.

§ 356. Во многихъ случаяхъ (въ какихъ именно, увидимъ впослѣдствiи) оказывается вѣрною слѣдующая теорема, называемая *интеграломъ живыхъ силъ. Работа равна приращенiю живой силы.* Прослѣдимъ, какъ выполняется эта теорема на примѣрѣ падающей точки, приведенномъ въ § 353-емъ.

Разсмотримъ движенiе точки, происходящее въ теченiе времени $t_1 - t_0$ въ промежутокъ между моментами t_0 и t_1. Пусть абсцисса, и скорость въ моментъ t_0 будутъ x_0 и v_0; тѣ же величины въ моментъ t_1 назовемъ чрезъ x_1 и v_1. Приращенiе живой силы въ теченiи времени $t_1 - t_0$ будетъ:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (688)$$

Работа, совершенная силою тяжести mg за время $t_1 - t_0$, будетъ:

$$mg\,(x^1 - x) = T \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (689)$$

Выразимъ обѣ эти величины (688) и (689) чрезъ t. По (679) $v = gt$.

Слѣдовательно приращеніе (688) живой силы будетъ:

$$\frac{mg^2 t_1^{\,2}}{2} - \frac{mg^2 t_0^{\,2}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (690)$$

По (682) $x = \frac{gt^2}{2}$. Слѣдовательно работа (689) будетъ:

$$T = mg\left(\frac{gt_1^{\,2}}{2} - \frac{gt_0^{\,2}}{2}\right) = \frac{mg^2 t_1^{\,2}}{2} - \frac{mg^2 t_0^{\,2}}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (691)$$

Сравнивая (690) съ (691), видимъ, что въ движеніи падающей точки теорема интеграла живыхъ силъ справедлива:

$T =$ приращенію живой силы, или:

$$T = \frac{mv_1^{\,2}}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (692)$$

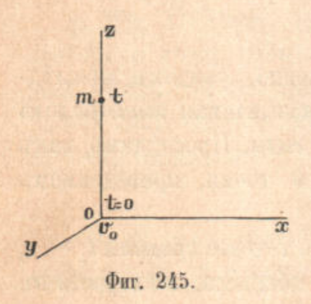
Количество движенія.

§ 357. Произведеніе mv массы на скорость называется количествомъ движенія.

$mv =$ количество движенія.

Движеніе точки брошенной вверхъ.

§ 358. Изучимъ движеніе точки, брошенной вверхъ Точка брошена вверхъ со скоростью v_0, значитъ начальная скорость точки $= v_0$. Напримѣръ, пуля выброшенная выстрѣломъ изъ ружья имѣетъ начальную скорость 200 метровъ въ секунду.



Фиг. 245.

Итакъ, задача такова: по данному ускоренію $g = 9{,}81$ метровъ силы земного тяготѣнія и по данной начальной скорости v_0 вертикально направленной найти движеніе точки, полагая, что точка брошена въ моментъ $t = 0$, съ котораго начинаемъ считать время.

Точку пространства, изъ которой выбрасывается точка m, примемъ за начало координатъ (фиг. 245). Возьмемъ ось z по вертикали вверхъ. Сила $-mg$ дѣйствуетъ тоже по вертикали, но въ сторону отрицательныхъ z; точка не сойдетъ съ оси z. Въ теченіи движенія будемъ имѣть $x = 0$, $y = 0$. Сила $= -mg$; по (671) она равна $m\,\frac{dv}{dt}$. Итакъ:

$$Z = -mg = m\,\frac{dv}{dt}.$$

Сокращая на m, получимъ:

$$-g = \frac{dv}{dt};$$

или:

$$dv = -gdt,$$

откуда:

$$\int dv = -g \int dt;$$

или:

$$v = -gt + c_1 \dots \dots \dots (693)$$

При $t = 0$, скорости $v = v_0$; слѣдовательно (693), въ началѣ движеніе имѣетъ видъ:

$$v_0 = 0 + c_1; \text{ откуда: } c_1 = v_0.$$

Слѣдовательно, въ теченіи движенія (693) имѣетъ видъ:

$$v = -gt + v_0 \dots \dots \dots (694)$$

По (668) имѣемъ:

$$v = -gt + v_0 = \frac{dz}{dt};$$

откуда:

$$dz = -gt \cdot dt + v_0 dt;$$

Интегрируя, находимъ:

$$\int dz = -g \int t\, dt + v_0 \int dt;$$

или:

$$z = -\frac{dt^2}{2} + v_0 t + c_2 \dots \dots \dots (695)$$

При $t = 0$, координата $z = 0$. Слѣдовательно:

$$0 = 0 + 0 + c_2, \text{ откуда: } c_2 = 0.$$

По этому:

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \dots \dots \dots (696)$$

Опредѣлимъ наибольшую высоту, до которой поднимется точка. Иначе говоря, найдемъ максимумъ выраженія (696). Для этого, по правилу II, § 170-го, приравняемъ производную отъ (696) нулю:

$$v_0 - gt = 0;$$

отсюда $t = \frac{v_0}{g}$. Итакъ точка достигнетъ наибольшой высоты поднятія чрезъ $\frac{v_0}{g}$ секундъ послѣ вылета изъ 0. Вставимъ это значеніе $\frac{v_0}{g}$ вмѣсто t въ (696), чтобы получить z, равное наибольшей высотѣ поднятія. Назовемъ эту высоту чрезъ h. Получимъ:

$$z = h = \frac{v_0 \cdot v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

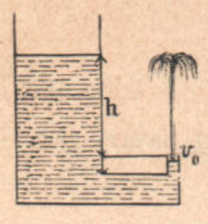
Итакъ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \dots \dots \dots (697)$$

Отсюда:



$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (698)$$



Фиг. 246.

Формула (698) опредѣляетъ ту начальную скорость, съ которою точка должна быть брошена (въ безвоздушномъ пространствѣ), чтобы наибольшая высота поднятія ея была h.

Въ приложеніи къ движенію жидкости формула (698), пренебрегая дѣйствіемъ воздуха, выражаетъ скорость v_0 вылета воды изъ фонтана (фиг. 246) по данной высотѣ h его струи. Въ примѣненіи къ жидкости формула (698) называется закономъ Торичелли.

Потенціальная функція.

§ 359. Для всѣхъ силъ природы существуютъ такія функціи U координатъ x, y, z движущейся точки, производныя которыхъ по этимъ координатамъ равны проложеніямъ силы на оси координатъ, тѣмъ проложеніямъ, которыя мы условились называть чрезъ X, Y, Z, такъ что:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (699)$$

Такая функція называется *потенціальною* или потенціаломъ.

Въ движеніи точки, брошенной вверхъ (§ 358), потенціалъ будетъ:

$$U = -mgz, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (700)$$

потому что сила $Z = -mg$; слѣдовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -mg = Z.$$

Законъ сохраненія живой силы.

§ 360. Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда точка, или система точекъ, или свободны или принуждены двигаться по поверхностямъ и линіямъ, не мѣняющимъ свою форму, существуетъ законъ: *живая сила равна суммѣ потенціала съ постояннымъ количествомъ*

$$\frac{mv^2}{2} = U + C. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (701)$$

Если U есть $f(x, y, z)$, то, при возвращеніи въ прежнее положеніе, живая сила пріобрѣтаетъ прежнюю величину—сохраняется.

Провѣримъ существованіе этого закона на разсмотрѣнномъ въ предъидущемъ параграфѣ движеніи точки брошенной вверхъ.

Тамъ $U = -mgz$; выразимъ его чрезъ время вставкою, вмѣсто z,

его выраженія (696) чрезъ t. Получимъ:

$$U = -mg\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) = -mgv_0 t + \frac{mg^2t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (702)$$

Выразимъ теперь живую силу $\frac{mv^2}{2}$ чрезъ t. Для этого вставимъ въ нее, вмѣсто v, ея выраженіе (694) чрезъ t. Получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_0 - gt)^2 = \frac{mv_0{}^2}{2} - mv_0 gt + \frac{mg^2t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (703)$$

Сравнивая (702) съ (703) видимъ, что:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \frac{mv_0{}^2}{2} = -mgz + \frac{mv_0{}^2}{2} \cdot$$

Идетъ ли точка чрезъ положеніе A кверху или возвращается (фиг. 247), всегда въ A живая сила имѣетъ ту же величину $-mg\,.\,(OA) + \frac{mv_0^2}{2}$.

Фиг. 247.

Но $\frac{mv_0^2}{2}$ есть величина постоянная для всего движенія, потому что и m и начальная скорость очевидно не мѣняются въ теченіи движенія. Слѣдовательно, законъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + C$$

справедливъ для движенія точки, брошенной вверхъ.

Законъ сохраненія энергіи.

§ 361. Живую силу $\frac{mv^2}{2}$ называютъ также *кинетическою энергіею движущейся точки*, потому что она (по интегралу живыхъ силъ (§ 356) способна переходить въ работу).

Потенціальная функція, взятая съ обратнымъ знакомъ ($-U$), называется *потенціальною энергіею* движущейся точки.

Сумма потенціальной и кинетической энергіи называется *полною энергіею*

$$\frac{mv^2}{2} + (-U),$$

то есть:

$$\frac{mv^2}{2} - U = \text{полная энергія} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (704)$$

Изъ (701) слѣдуетъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (705)$$

—полная энергія движенія точки есть величина постоянная.

Этотъ законъ есть знаменитый законъ сохраненія энергіи. Онъ, какъ мы видимъ, тождественъ съ закономъ сохраненія живой силы.

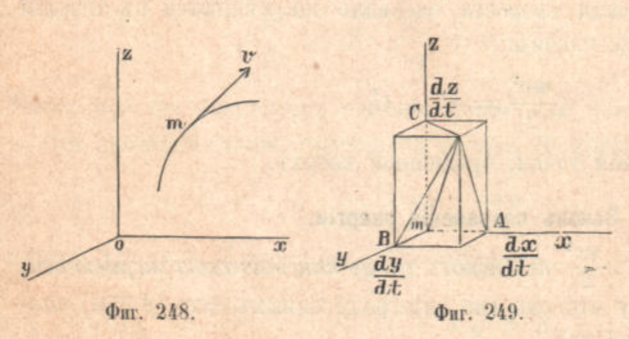
Система точекъ.

§ 362. Совокупность матеріальныхъ точекъ, будетъ ли это сплошное тѣло, или жидкость, или отдѣльныя точки, называется *системою*. Живою силою системы называютъ сумму живыхъ силъ составляющихъ ея точекъ. Знакъ суммы такой: Σ.

Криволинейное движеніе точки.

Скорость въ криволинейномъ движеніи.

§ 363. Каждый элементъ кривой мы разсматриваемъ какъ безконечно-малую прямую линію и скорость, которая направлена по элементу, изображаемъ геометрически въ видѣ прямолинейнаго отрѣзка (*вектора*), длина котораго была бы пропорціональна скорости (фиг. 248) и который начинался бы отъ движущейся точки m. Но такіе отрѣзки (векторы) было бы затруднительно разсматривать даже въ движеніи одной точки. Поэтому мы пролагаемъ (см. § 73) этотъ векторъ на оси координатъ и самую точку пролагаемъ на оси, то есть разсматриваемъ не движеніе точки, а движеніе ея проэкцій A, B и C (фиг. 249). Не разсматриваемъ самую скорость V, но проэкціи V_x, V_y, V_z скорости на оси. Когда движется точка m, то и ея проложенія движутся, и можно ожидать (въ подробныхъ курсахъ это доказывается), что *скорости движенія проложеній равны проложеніямъ V_x, V_y, V_z скорости V на оси.*



Фиг. 248. Фиг. 249.

Такимъ образомъ разсмотрѣніе скоростей криволинейнаго движенія приводится къ разсмотрѣнію скоростей прямолинейныхъ движеній проэкцій A, B и C движущейся точки. Нужно только обезпечить себѣ возможность опредѣленія V и ея направленія по V_x, V_y, V_z. По (668), называя чрезъ x, y, z координаты движущейся точки m, получимъ:

$$V_x = \frac{dx}{dt};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt};$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Называя чрезъ α, β, γ углы наклоненія скорости V къ осямъ координатъ, получимъ по (115):

$$V_x = V \cos\alpha; \quad V_y = V\cos\beta; \quad V_z = V\cos\gamma.$$

Возведя эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2 = V^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Но по (126): $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Слѣдовательно:

$$(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2 = V^2,$$

или:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (706)$$

Имѣя эту формулу, мы всегда по проложеніямъ V_x, V_y, V_z можемъ опредѣлить скорость V.

Изъ 668 слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{V_x}{V} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\
\cos\beta &= \frac{V_y}{V} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\
\cos\gamma &= \frac{V_z}{V} = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} (707)$$

а эти формулы позволятъ опредѣлить направленіе V.

Примѣръ. Опредѣлить скорость и ея направленіе въ движеніи, разсмотрѣнномъ въ § 346 и опредѣляемомъ уравненіями:

$$x = R\cos t$$

$$y = R\sin t$$

$$z = 0.$$

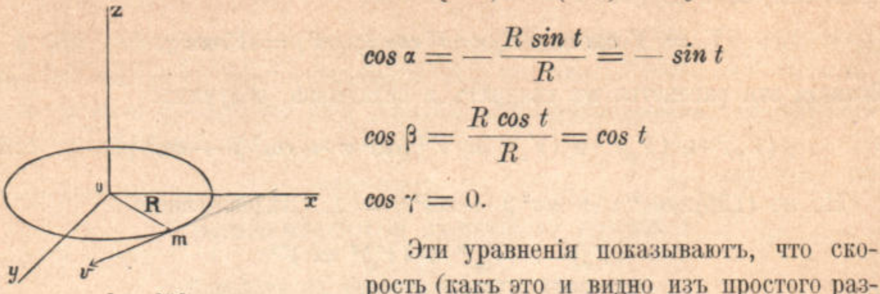
Имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = R\cos t; \quad \frac{dz}{dt} = 0. \; . \; . \; . \; . \; (708)$$

Вставляя въ (706), получимъ:

$$V = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = \sqrt{R^2} = R.$$

Скорость равна радіусу. Направленіе ея опредѣлимъ, вставивъ величины (708) въ (707). Получимъ:



Фиг. 250.

$$\cos\alpha = -\frac{R \sin t}{R} = -\sin t$$

$$\cos\beta = \frac{R \cos t}{R} = \cos t$$

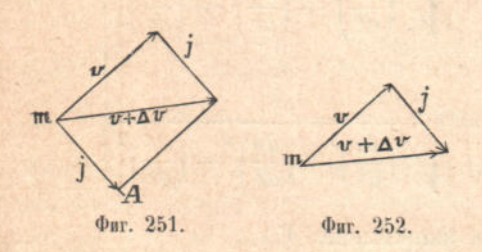
$$\cos\gamma = 0.$$

Эти уравненія показываютъ, что скорость (какъ это и видно изъ простого разсмотрѣнія того, что скорость направлена по элементу траэкторіи) перпендикулярна радіусу (фиг. 250).

Ускореніе въ криволинейномъ движеніи.

§ 364. Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ ускореніемъ въ криволинейномъ движеніи, потому что прежде всего еще надо разсмотрѣть, что именно слѣдуетъ разумѣть подъ словомъ ускореніе въ криволинейномъ движеніи.

Ускореніе — это то, что Ньютонъ разумѣлъ подъ словомъ «измѣненіе движенія». Въ прямолинейномъ движеніи мѣнялась только скорость (конечно и координата мѣнялась, но безъ этого не было бы и движенія). Въ криволинейномъ движеніи мѣняется и направленіе движенія, направленіе скорости. Пусть v есть скорость точки въ моментъ t (фиг. 251), тогда какъ въ слѣдующій моментъ $t + \Delta t$ скорость уже измѣнится по величинѣ и по направленію и превратится въ $v + \Delta v$. Ускореніе j можно разсматривать какъ нѣкоторую добавочную скорость, которую надо приложить къ скорости v, чтобы получить $v + \Delta v$. Скорости слагаются какъ силы по правилу параллелограмма: равнодѣйствующая двухъ скоростей v и j равна, по величинѣ и по направленію, діагонали параллелограмма, построеннаго на составляющихъ скоростяхъ v и j. Или, что то же (фиг. 252), $v + \Delta v$ есть послѣдняя сторона треугольника, двѣ другія стороны котораго суть v и j.



Фиг. 251. Фиг. 252.

Можно также сказать, что ускореніе j равно, по величинѣ и направленію, замыкающей сторонѣ треугольника, построеннаго на v и $v + \Delta v$, но только приложено оно къ точкѣ m, какъ линія mA на (фиг. 251).

Самое важное заключеніе, которое мы выносимъ изъ такого разсужденія, состоитъ въ томъ, что *направленіе ускоренія, вообще говоря, не совпадаетъ съ направленіемъ скорости въ криволинейномъ движеніи.*

Строя его, по указанному только-что способу, отъ точки m, мы изображаемъ его по величинѣ и направленію нѣкоторымъ векторомъ.

Затѣмъ мы разсматриваемъ не самое ускореніе, а его проложенія на оси. Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что: ускоренія проложеній A, B, C точки равны проложеніямъ j_x, j_y, j_z ускоренія j. Проложенія A, B, C точки движутся по осямъ прямолинейно; поэтому къ нимъ примѣнима формула (669), по которой:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ j_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ j_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (709)$$

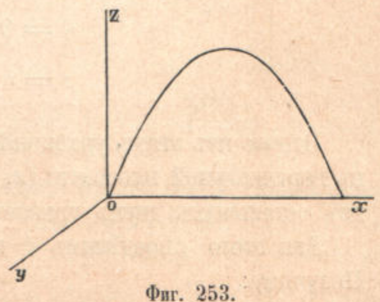
Отсюда, совершенно такъ же, какъ въ § 363-омъ, выводимъ:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}; \quad \ldots\ldots (710)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(j, x) &= \frac{j_x}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}} = \frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \\ \cos(j, y) &= \frac{j_y}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}} = \frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \\ \cos(j, z) &= \frac{j_z}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}} = \frac{\dfrac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \end{aligned}\right\} . \quad (711)$$

Движеніе тяжелой точки, брошенной наклонно къ горизонту.

§ 365. Какъ примѣръ изслѣдованія криволинейнаго движенія свободной точки разсмотримъ движеніе тяжелой точки, брошенной съ начальною скоростью v_0 подъ угломъ φ къ горизонту (фиг. 253).



Фиг. 253.

Примемъ начальное положеніе тяжелой точки m за начало координатъ. Плоскость (x, z) изберемъ такъ, чтобы она проходила чрезъ направленіе начальной скорости и чтобы горизонтальная ось иксовъ составляла съ начальною скоростью острый или прямой, но не тупой уголъ. Ось z возьмемъ по вертикали вверхъ;

На точку дѣйствуетъ только сила тяжести; ускореніе g, производимое тяжестью, направлено внизъ. Поэтому, называя чрезъ X, Y, Z проложенія силы тяжести на оси координатъ, припоминая, что ускоренія проложеній = проложеніямъ ускоренія и формулу (673) получимъ:

$$X = 0 = m\,\frac{d^2x}{dt^2};\quad Y = 0 = m\,\frac{d^2y}{dt^2};\quad Z = -mg = +m\,\frac{d^2z}{dt^2}\,.\;.\quad(712)$$

Интегрируя эти уравненія, получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = c_1;\quad \frac{dy}{dt} = c_2;\quad \frac{dz}{dt} = -gt + c_3\,.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(713)$$

Въ началѣ движенія проложенія начальной скорости суть:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos\varphi;\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0;\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0 \sin\varphi.$$

Поэтому

$$c_1 = v_0 \cos\varphi;\quad c_2 = 0;\quad c_3 = v_0 \sin\varphi.$$

Подставляя эти величаны постоянныхъ въ (713), получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\varphi;\quad \frac{dy}{dt} = 0;\quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\varphi - gt.\;\;.\;.\;.\quad(714)$$

Интегрируя эти уравненія, находимъ:

$$x = t\,.\,v_0\,.\cos\varphi + c_4;\quad y = c_5;\quad z = t\,.\,v_0\,.\sin\varphi - \frac{gt^2}{2} + c_6.\;.\quad(715)$$

Опредѣляемъ постоянныя c_4, c_5, c_6 интеграціи изъ начальныхъ данныхъ: при $t = 0$ имѣли:

$$x = 0;\quad y = 0;\quad z = 0.$$

Слѣдовательно:

$$c_4 = 0;\quad c_5 = 0;\quad c_6 = 0.$$

Поэтому изъ (715) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= t\,.\,v_0\,.\,\cos\varphi \\ y &= 0 \\ z &= t\,.\,v_0\,.\,\sin\varphi - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(716)$$

Второе изъ этихъ уравненій движенія показываетъ, что точка движется въ вертикальной плоскости (x, z). Для опредѣленія траэкторіи исключимъ t изъ остальныхъ двухъ уравненій (716).

Для этого опредѣлимъ t изъ 1-го и вставимъ въ третье уравненіе. Получимъ:

$$z = \frac{x}{\cos\varphi}\,.\,\sin\varphi - \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0{}^2\cos^2\varphi};$$

или:

$$z = x \cdot tg\,\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (717)$$

Здѣсь всѣ величины, кромѣ x и z, постоянныя.

Для нахожденія точки высочайшаго поднятія, опредѣлимъ максимумъ отъ z, который обозначимъ такъ $z_м$.

Для этого приравняемъ производную по иксу отъ правой части (717) нулю:

$$tg\,\varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = 0.$$

Отсюда соотвѣтствующій наибольшей величинѣ зеда иксъ будетъ:

$$x_м = \frac{tg\,\varphi \cdot v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g} \quad \ldots\ldots (718)$$

Вставляя эту величину вмѣсто x въ (717), получимъ наибольшую величину зеда:

$$z_м = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} - \frac{g \cdot v_0^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot g^2};$$

или:

$$z_м = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \quad \ldots\ldots (719)$$

Перенесемъ начало координатъ въ точку высочайшаго подъема, не измѣняя направленія осей. Для этого замѣтимъ, что старыя координаты выразятся чрезъ новыя такъ:

$$x = x' + x_м = x' + \frac{v_0^2}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$z = z' + z_м = z' + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi.$$

Вставляя эти величины въ (717), получимъ:

$$z' + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi = \left(x' + \frac{v_0^2}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi\right) tg\,\varphi$$

$$- \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \left[x' + \frac{v_0^2}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi\right]^2;$$

или:

$$z' + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi = x' \cdot tg\,\varphi + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \varphi - \frac{gx'^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}$$

$$- \frac{g \cdot 2v_0^2\, x' \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot g} - \frac{gv_0^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2v_0^2 \cdot g^2 \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Отсюда:

$$z' = x'\, tg\,\varphi + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi - \frac{gx_1^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} - x'\, tg\,\varphi - \frac{v_9^2 \sin^2 \varphi}{2g};$$

или:

$$z' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} \cdot x_1^2.$$

Отсюда:

$$x_1^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2\varphi}{g}\, z.$$

Полагая $\frac{2v_0^2 \cos^2\varphi}{g} = 2p$, получимъ:

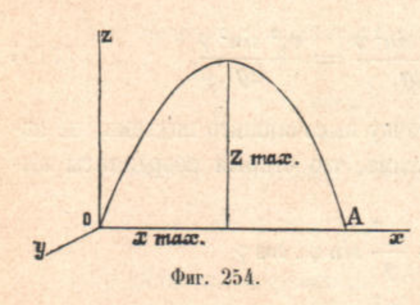
$$x_1^2 = -2pz.$$

Получили уравненіе параболы, ось которой направлена вертикально (фиг. 254); сама парабола обращена внизъ, вершина же ея имѣетъ, относительно прежнихъ осей, координаты, выражаемыя формулами (718) и (719).

Изъ уравненія (717), полагая въ немъ $z = 0$, получимъ:

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \sin\varphi \cdot \cos\varphi = OA; \text{ (фиг. 254)} \ldots \ldots (720)$$

Это разстояніе OA (фиг. 254), на которое долетаетъ брошенная точка по горизонту, называется *амплитудою* бросанія или дальностью полета. Посмотримъ, когда она будетъ наибольшая. Для этого замѣтимъ, что (720) можно написать въ видѣ:



Фиг. 254.

$$OA = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\varphi).$$

Эта величина достигнетъ наибольшаго значенія, когда $\sin(2\varphi) = 1$, то есть, когда $2\varphi = \frac{\pi}{2}$; или $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$. Итакъ, наибольшая дальность полета получается, когда стрѣляютъ подъ угломъ 45° къ горизонту.

Таково движеніе точки, брошенной въ пустотѣ. Воздухъ измѣняетъ это движеніе тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе начальная скорость, такъ что камень, брошенный рукою, весьма мало уклоняется отъ параболическаго движенія: центръ тяжести его описываетъ довольно точно параболу. Вводя сопротивленіе воздуха, можно болѣе точно опредѣлить движеніе пули или пушечнаго ядра, но мы этого дѣлать не будемъ.

Равномѣрное движеніе точки по окружности.

§ 366. Въ предъидущемъ параграфѣ мы разсмотрѣли примѣръ такой задачи, въ которой по данной силѣ тяжести, и слѣдовательно, по данной величинѣ и направленію ускоренія, надо было найти уравненія движенія точки.

Теперь рѣшимъ такую задачу, въ которой, по даннымъ уравненіямъ движенія, требуется найти величину и направленіе ускоренія. Найдемъ

ускореніе и его направленіе въ изслѣдованномъ нами уже отчасти движеніи:

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots (721)$$

Въ этомъ движеніи, какъ мы видѣли въ § 346-омъ, уголъ, составляемый съ осью x радіусомъ окружности, по которой движется точка, равенъ t. Слѣдовательно, дуги, проходимыя по окружности движущеюся точкою, пропорціональны времени t: въ равныя времена точка проходитъ равныя дуги. Поэтому это движеніе называется *равномѣрнымъ движеніемъ по окружности*. Величина скорости здѣсь не мѣняется, но мѣняется только ея направленіе. Изъ (721) находимъ:

$$\frac{dx}{dt} = -R \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = -R \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos t; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R \sin t; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Вставляя найденныя величины вторыхъ производныхъ въ (710), получимъ:

$$j = \sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin t^2} = \sqrt{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{R^2} = R.$$

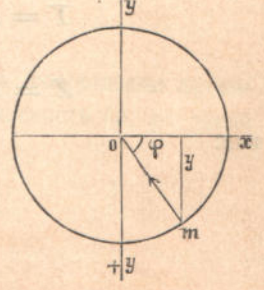
Вставляя найденныя вторыя производныя въ (711), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(j, x) &= -\frac{R \cos t}{R} = -\cos t \\ \cos(j, y) &= -\frac{R \sin t}{R} = -\sin t \\ \cos(j, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (722)$$

Изъ (721) и изъ чертежа (фиг. 255) видно, что косинусы наклоненія къ осямъ x и y радіуса, проведеннаго въ точку m, равны $\cos t$ и $\sin t$. Слѣдовательно (722) показываютъ, что ускореніе составляетъ съ радіусомъ уголъ въ 180°, потому что

$$\cos(180° + \varphi) = -\cos\varphi;$$

$$\sin(180° + \varphi) = -\sin\varphi.$$

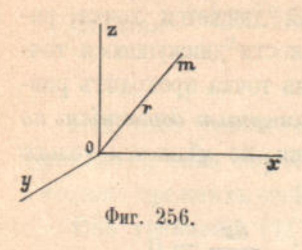


Фиг. 255.

Итакъ ускореніе въ равномѣрномъ движеніи точки по окружности направлено по радіусу къ центру. Это значитъ, что сила, способная изогнуть путь точки въ окружность, направлена къ центру. Нѣчто подобное (но не совсѣмъ то же самое) происходитъ, если вращать нитку съ прикрѣпленною на ея концѣ гирею: гиря будетъ описывать окружность подъ дѣйствіемъ силы натяженія нити направленной по радіусу. Скорость же въ этомъ движеніи направлена по касательной, такъ что, если нитка оборвется, то гиря полетитъ прямолинейно по касательной.

Общее свойство центральныхъ движеній.

§ 367. Чрезвычайно важный, въ особенности въ астрономіи, классъ движеній представляютъ *движенія центральныя*, происходящія подъ вліяніемъ какой-нибудь притягательной или отталкивающей силы какой-нибудь неподвижной точки (центра).



Фиг. 256.

Изслѣдуемъ общія свойства центральныхъ движеній.

Положимъ, что точка **m** (фиг. 256) притягивается неподвижнымъ центромъ, находящимся въ началѣ координатъ. На точку дѣйствуетъ сила P, направленная къ центру O, если имѣемъ дѣло съ притяженіемъ. Сила P будетъ направлена по продолженію радіуса-вектора Om отъ центра въ случаѣ отталкиванія. Направленія силы P будутъ опредѣляться (разсматриваемъ сразу случаи притяженія и отталкиванія) уравненіями:

$$\cos(P, x) = \mp \frac{x}{r};\quad \cos(P, y) = \mp \frac{y}{r};\quad \cos(P, z) = \mp \frac{z}{r}, \quad . \; . \quad (723)$$

гдѣ чрезъ r обозначенъ радіусъ-векторъ Om. Здѣсь знаки — соотвѣтствуютъ притяженію, знакъ + отталкиванію; если же будемъ считать самую силу P отрицательною въ случаѣ притяженія и положительною въ случаѣ отталкиванія, то въ формулахъ (723) можно удержать только знакъ +. Дифференціальныя уравненія движенія получимъ, припоминая, что произведенія массъ на проложенія ускореній равны проложеніямъ силы по (673). Получимъ, согласно съ (723):

$$\left.\begin{aligned} X &= P\,.\cos(P, x) = P\,.\,\frac{x}{r} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= P\,.\cos(P, y) = P\,.\,\frac{y}{r} = m\,\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= P\,.\cos(P, z) = P\,.\,\frac{z}{r} = m\,\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\}, \; . \; . \; . \; . \; (724)$$

или:

$$\left.\begin{aligned} P\,.\,\frac{x}{r} &= m\,\frac{d^2x}{dt^2} \\ P\,.\,\frac{y}{r} &= m\,\frac{d^2y}{dt^2} \\ P\,.\,\frac{z}{r} &= m\,\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (725)$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{P}{rm} = \frac{1}{x}\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\,\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{z}\,\frac{d^2z}{dt^2};$$

или:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0\\ y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0\\ z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (726)$$

Интегрируя (726), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1\\ y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=c_2\\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (727)$$

Умноживъ 1-ое изъ уравненій (727) на z, второе на x, третье на y и сложивъ, получимъ:

$$z\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+x\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+y\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)$$
$$=c_1 z+c_2 x+c_3 y.$$

Раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$c_1 z+c_2 x+c_3 y=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (728)$$

Это уравненіе плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ. Итакъ: траэкторія точки лежитъ въ нѣкоторой плоскости (728), проходящей чрезъ центръ притяженія 0.

Законъ площадей.

§ 368. Мы взяли направленіе осей координатъ совершенно произвольно. Примемъ плоскость (728) траэкторіи за плоскость (x, y), тогда будетъ:

$$z=0;\quad \frac{dz}{dt}=0;\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Уравненія (727) обращаются въ одно уравненіе

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (729)$$

По (497) величина $\frac{xd\,y-y\,dx}{2}$ есть дифференціалъ сектора; по (496):

$$xdy-ydx=r^2d\varphi$$

Вставляя въ (729), получимъ:

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (730);$$

или:

$$r^2 d\varphi = c_1 dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (731)$$

Формулы (729) и (731) показываютъ, слѣдовательно, что во всякомъ центральномъ движенiи площади секторовъ, описываемыхъ радiусомъ векторомъ, пропорцiональны времени. Въ этомъ состоитъ *Законъ площадей: въ центральномъ движенiи радiусъ векторъ описываетъ въ равныя времена равныя площади.*

Скорость центральнаго движенiя въ полярныхъ координатахъ.

§ 369. Обыкновенно центральныя движенiя изслѣдуются въ полярныхъ координатахъ. Опредѣлимъ въ полярныхъ координатахъ скорость центральнаго движенiя. Примемъ плоскость траекторiи за плоскость (x, y); неподвижный центръ 0 — за начало координатъ и за полюсъ, ось x за полярную ось. По формулѣ (706) получимъ:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (732)$$

Формулы преобразованiя таковы:

$$x = r \cos\varphi$$

$$y = r \sin\varphi$$

Изъ нихъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} dx &= - r \sin\varphi \, d\varphi + \cos\varphi \, . \, dr \\ dy &= r \cos\varphi \, . \, d\varphi + \sin\varphi \, dr \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (733)$$

По этимъ формуламъ находимъ:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(d\varphi)^2 + (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(dr)^2$$
$$+ 2 d\varphi \, . \, dr \, [r \sin\varphi \cos\varphi - r \sin\varphi \cos\varphi];$$

или:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (734)$$

Вставляя эту величину въ (732), находимъ:

$$v^2 = \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Но:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Поэтому:

$$v^2 = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] \ldots (735)$$

По закону площадей $r^2 d\varphi = c dt$; поэтому

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

Вставляя эту величину вмѣсто dt въ (735), получимъ:

$$v^2 = \left(\frac{c d\varphi}{r^2 d\varphi}\right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right];$$

или:

$$v^2 = \frac{c^2}{r^4}\left[r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right] = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \frac{dr^2}{r^4 d\varphi^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (736)$$

Выраженіе скорости упростится, если вмѣсто r вставимъ перемѣнное $u = \frac{1}{r}$. Чтобы это сдѣлать, замѣтимъ, что изъ этого положенія слѣдуетъ:

$$du = -\frac{dr}{r^2}; \; \frac{1}{r^2} = u^2; \; \frac{dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

Вставляя эти величины въ (736), получимъ:

$$v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (737)$$

По этой формулѣ опредѣляется скорость въ центральномъ движеніи по даннымъ φ и u, или по даннымъ φ и r, потому что, если дано r, то узнаемъ u.

Сила, производящая центральное движеніе.

§ 370. Опредѣлимъ силу P притяженія, оказываемаго центромъ. Въ центральномъ движеніи по фомуламъ (725) имѣемъ:

$$\frac{P}{m} \cdot \frac{x}{r} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{P}{m} \cdot \frac{y}{r} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

помноживъ 1-е изъ этихъ уравненій на dx, второе на dy, и сложивъ получимъ:

$$\frac{P}{m}\frac{xdx + ydy}{r} = dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} \quad . \; . \; . \; . \; (738)$$

Найдемъ выраженіе величины $xdx + ydy$ въ полярныхъ координатахъ. Для этого продифференцируемъ уравненіе $x^2 + y^2 = r^2$. Получимъ:

$$xdx + ydy = rdr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (739)$$

Вставляя эту величину въ (738), получимъ:

$$\frac{P}{m}\frac{rdr}{r} = dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2};$$

или:

$$dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{P}{m}\frac{rdr}{r}=-\frac{P}{m}\frac{du}{u^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;(740)$$

Но лѣвая часть этого равенства получается дифференцированіемъ величины:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)\right]^2.$$

Слѣдовательно:

$$dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\,d\,(v^2)$$

Вставляя въ (740), получимъ:

$$\frac{1}{2}\,d(v^2)=-\frac{P}{m}\frac{du}{u^2};$$

или:

$$\frac{P}{m}=-\frac{u^2}{2}\frac{d\,(v^2)}{du}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(741)$$

Дифференцируя по u равенство (737), получимъ:

$$\frac{d\,(v^2)}{du}=c^2\left[2u+2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\right]=2c^2\left[u+\frac{d\left(\frac{du}{d\varphi}\right)}{d\varphi}\right]$$

$$=2\,c^2\left[u+\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]$$

Внося эту величину вмѣсто $\frac{d(v^2)}{dt}$ въ (741), получимъ:

$$\frac{P}{m}=-c^2\,u^2\left(u+\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(742)$$

Вотъ выраженіе для опредѣленія центральной силы P.

Законъ площадей характеризуетъ центральное движеніе.

§ 371. Докажемъ теорему обратную той, которая была высказана въ § 368-омъ въ видѣ закона площадей.

Теорема. Если движеніе точки подчиняется закону площадей, то движеніе ея центрально, то есть происходитъ подъ дѣйствіемъ притягательной и отталкивательной силы нѣкотораго неподвижнаго центра.

Если движеніе точки подчиняется закону площадей, то по § 368-ому:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1$$

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=c_2$$

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=c_3$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0 \\ y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0 \\ z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (743)$$

Отсюда:

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z} \quad \ldots\ldots\ldots (744)$$

Называя величину этихъ отношеній чрезъ k, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}=kx \\ \frac{d^2y}{dt^2}=ky \\ \frac{d^2z}{dt^2}=kz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (745)$$

Возводя въ квадратъ эти равенства, складывая ихъ и припомнивъ, что $x^2+y^2+z^2=r^2$, получимъ:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2=k^2r^2;$$

откуда:

$$k^3=\frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{x^2}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}{y^2}=\frac{\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}{z^2}=\frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}{r^2} \ldots (746)$$

Но сила равна произведенію массы на ускореніе. Поэтому по (710), получимъ:

$$P=m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots (747)$$

Кромѣ того, мы знаемъ, что

$$P\cos(P,x)=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

и подобныя же выраженія для y и z. Поэтому:

$$\cos(P,x)=\frac{m\frac{d^2x}{dt^2}}{P};\ \cos(P,y)=\frac{m\frac{d^2y}{dt^2}}{P};\ \cos(P,z)=\frac{m\frac{d^2z}{dt^2}}{P}$$

Вставляя сюда вмѣсто вторыхъ производныхъ ихъ величины изъ (746), получимъ:

$$\cos(P.x) = \frac{mx\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}{Pr}$$

и такія же выраженія для $\cos(P, y)$; $\cos(P, z)$. Вставляя въ нихъ вмѣсто P его величину изъ (747), получимъ:

$$\cos(P, x) = \pm\frac{x}{r}$$

$$\cos(P, y) = \pm\frac{y}{r}$$

$$\cos(P, z) = \pm\frac{z}{r}$$

Эти уравненія показываютъ, что сила исходитъ изъ одного центра, находящагося на разстояніи r отъ движущейся точки (x, y, z), что и требовалось доказать.

Выводъ закона всемірнаго притяженія изъ движенія планетъ.

§ 372. Одно изъ величайшихъ открытій Ньютона заключалось въ томъ, что онъ нашелъ всемірное притяженіе, обусловливающее движеніе планетъ по эллиптическимъ орбитамъ около солнца, и опредѣлилъ, что притяженіе. оказываемое солнцемъ, обратно пропорціонально квадрату разстоянія планеты отъ солнца. Еще до Ньютона Кеплеръ изъ наблюденія надъ движеніемъ планетъ нашелъ слѣдующіе законы этого движенія.

Кеплеровы законы.

1) Каждая планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.

2) Площади, описываемыя радіусами векторами, проведенными отъ солнца къ планетамъ возрастаютъ пропорціонально времени.

3) Квадраты временъ обращенія планетъ относятся между собою, какъ кубы большихъ осей планетныхъ орбитъ (траекторіи небесныхъ тѣлъ называются *орбитами*).

Покажемъ, какъ на основаніи законовъ Кеплера, выведенныхъ изъ наблюденія, можно заключить. что движеніе планетъ происходитъ подъ дѣйствіемъ притяженія, оказываемаго солнцемъ, и можно вывести Ньютоновъ законъ притяженія.

Второй Кеплеровъ законъ есть законъ площадей. Слѣдовательно, по сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, планеты движутся подъ дѣйствіемъ центральной силы.

Согласно первому Кеплерову закону планеты движутся по эллипсамъ.

Уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ таково:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (748)$$

Дѣлая здѣсь подстановку $\frac{1}{r} = u$, получимъ:

$$u = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (749)$$

Дифференцируя это уравненіе, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= -\frac{e}{p}\sin\varphi \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} &= -\frac{e}{p}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (750)$$

Вставляя u изъ (749), $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ изъ (750) въ (742), получимъ:

$$\frac{P}{m} = -\frac{c^2(1+e\cos\varphi)^2}{p^2}\left[\frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi) - \frac{e}{p}\cos\varphi\right];$$

или по (748):

$$\frac{P}{m} = -\frac{c^2(1+e\cos\varphi)^2}{p^2} \cdot \frac{1}{p} = -\frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2};$$

или:

$$P = -\frac{mc^2}{p \cdot r^2}$$

Здѣсь m, c, p суть постоянныя величины. Слѣдовательно сила P обратно пропорціональна квадрату разстоянія r^2. Изъ найденныхъ наблюденіемъ законовъ Кеплера мы вывели законъ Ньютоновскаго притяженія.

Познакомимся еще съ нѣкоторыми общими свойствами движенія свободной точки.

Элементарный импульсъ силы.

§ 373. Произведеніе Pdt силы P на безконечно малый промежутокъ времени dt называется *элементарнымъ импульсомъ* силы. Сумма всѣхъ элементарныхъ импульсовъ силы P за промежутокъ времени $t - t_0$ равна

$$\int_{t_0}^{t_1} P\,dt$$

и называется *полнымъ импульсомъ* силы за промежутокъ $t_1 - t_0$:

Теорема о количествахъ движенія.

§ 374. Если v есть скорость, φ—уголъ, составляемый силою P съ направленіемъ движенія (съ элементомъ траекторіи), то:

$$m\frac{dv}{dt} = P\cos\varphi,$$

откуда:

$$m dv = P \cos \varphi \, dt,$$

или:

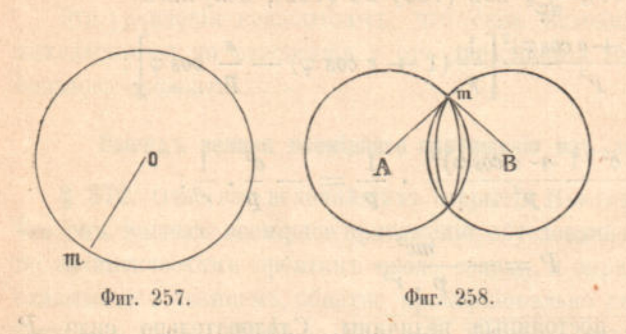
$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} P \cos \varphi \, dt$$

Это уравненіе выражаетъ собою слѣдующее: *теорема*: *приращеніе количества движенія равно суммѣ импульсовъ силы, направленныхъ по касательной къ траекторіи.*

Движеніе несвободной точки.

Несвободная точка.

§ 375. Если точка принуждена двигаться по какой-нибудь поверхности или по какой-нибудь линіи, то она называется *несвободною*. Напримѣръ: точка соединенная съ другою, неподвижною, точкою помощью нерастяжимаго и несгибаемаго стержня, принуждена двигаться по поверхности шара описанной около неподвижной точки радіусомъ равнымъ длинѣ стержня (фиг. 257); точка, соединенная такими стержнями съ двумя неподвижными точками A и B (фиг. 258), принуждена двигаться по окружности, представляющей собою пересѣченіе двухъ шаровыхъ поверхностей.



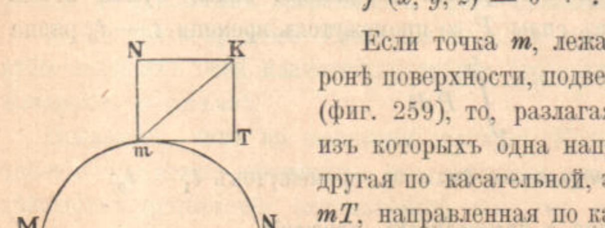
Фиг. 257. Фиг. 258.

Движеніе точки по поверхности.

376. Изслѣдуемъ сначала движеніе точки по поверхности, опредѣляемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (751)$$

Если точка m, лежащая на внутренней сторонѣ поверхности, подвержена дѣйствію силы mk (фиг. 259), то, разлагая силу mk на двѣ силы, изъ которыхъ одна направлена по нормали, а другая по касательной, замѣтимъ, что слагающая mT, направленная по касательной, не будетъ давить на поверхность, но только подвинетъ точку m по поверхности. Напротивъ того, слагающая mN, дѣйствующая по нормали, нисколько не будетъ двигать точку m, но только прижимать ее къ поверхности. Поэтому, при вычисленіи давленія на поверхность, мы должны брать въ расчетъ только нормальныя давленія.



Фиг. 259.

Обращая вниманіе на давленія, производимыя точкою на поверхность, можно очень просто свести изученіе движенія несвободной точки на изслѣдованіе движенія точки свободной: стоитъ только разсматривать точку, какъ находящуюся подъ дѣйствіемъ не только заданныхъ силъ, но еще и давленія, которое производится на нее противодѣйствіемъ поверхности. Это давленіе, какъ мы видѣли, направлено по нормали.

Итакъ, обозначая чрезъ $(-N)$ давленіе, производимое точкою на поверхность, и слѣдовательно чрезъ N сопротивленіе поверхности, мы можемъ разсматривать точку, какъ свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ и силы N (которая пока остается неопредѣленною), и написать уравненія движенія по (673) въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\,.\cos(N,x) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\,.\cos(N,y) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\,.\cos(N,z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (752)$$

Заключающіеся въ этихъ уравненіяхъ косинусы опредѣляются по (395) такъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(N,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos(N,y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos(N,z) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (753)$$

Что же касается N, то эта величина подлежитъ исключенію. Исключивъ N изъ трехъ уравненій (752), получимъ два уравненія; присоединивъ къ нимъ еще заданное уравненіе (751) поверхности получимъ три уравненія, которыхъ вполнѣ достаточно для выраженія координатъ x, y, z чрезъ время t.

Примѣръ. Опредѣлить движеніе тяжелой точки, движущейся по поверхности вертикальнаго цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ подъ вліяніемъ силы тяжести и начальной скорости v_0, сообщенной въ горизонтальномъ направленіи.

Здѣсь $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$. Вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Дѣйствующая сила—тяжесть; ускореніе, производимое ею направлено по оси z и равно g. Проложенія этой силы таковы: $X = 0$; $Y = 0$; $Z = mg$. Поэтому уравненія (752) въ настоящемъ случаѣ таковы:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{N \,.\, x}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (754)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{N \,.\, y}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (755)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (756)$$

Исключаемъ N изъ (754) и (755); находимъ:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Интегралъ этого уравненія есть:

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (757)$$

Въ началѣ движенія:

$$y = 0;\ \frac{dx}{dt} = 0;\ x = R;\ \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Поэтому:

$$-Rv_0 = c.$$

Подставляя вмѣсто c величину $(-Rv_0)$ въ (757), находимъ:

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = -Rv_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (758)$$

Дифференцируя уравненіе $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндра, находимъ:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (759)$$

Исключая $\frac{dy}{dt}$ изъ (758) и (759), получимъ:

$$y\frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{y}\frac{dx}{dt} = -Rv_0;$$

или:

$$(x^2 + y^2)\frac{dx}{dt} = -Rv_0 y$$

Но $x^2 + y^2 = R^2$. Поэтому:

$$R^2\frac{dx}{dt} = -Rv_0 y = -Rv_0\sqrt{R^2 - x^2};$$

или:

$$R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=-v_0dt;$$

Интегрируя, получимъ:

$$x=R\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(760)$$

Но изъ уравненія $x^2+y^2=R^2$ цилиндра имѣемъ:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

Слѣдовательно:

$$y=\sqrt{R^2-R^2\cos^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)}=R\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)};$$

или:

$$y=R\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)\ldots\ldots\ldots(761)$$

Интегрируя (756), получимъ:

$$\frac{dz}{dt}=gt.$$

Интегрируя еще разъ, получимъ:

$$z=\frac{gt^2}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(762)$$

Уравненія (760), (761) и (762) суть искомыя уравненія движенія.

Движеніе точки по линіи.

§ 377. Если точка движется по линіи, выражаемой двумя уравненіями, то, называя чрезъ $(-N)$ направленное по нормали давленіе точки на линію, получаемъ, подобно тому какъ получили (752), такія уравненія:

$$\left.\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+N'.\cos(N',x)+N''.\cos(N'',x)\\m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+N'.\cos(N',y)+N''.\cos(N'',y)\\m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+N'.\cos(N',z)+N''.\cos(N'',z)\end{aligned}\right\}\ldots(763)$$

Уравненія линіи выражаются такъ:

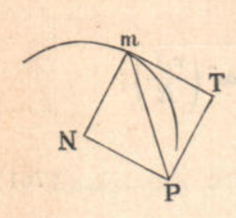
$$\left.\begin{aligned}f(x,y,z)&=0\\F(x,y,z)&=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(764)$$

$-N'$ есть давленіе на поверхность $f(x,y,z)=0$; $-N''$ есть давленіе на поверхность $F(x,y,z)=0$.

Здѣсь, по исключеніи N' и N'' изъ уравненій (763), получимъ одно уравненіе, но, прибавляя къ нимъ два уравненія (764) линіи, получимъ всего три уравненія, которыхъ будетъ достаточно для выраженія x, y, z въ видѣ функцій отъ t.

Начало Д'Аламбера.

§ 378. Начало (принципъ), на которомъ можно основывать приведеніе случая движенія несвободной точки къ случаю движенія точки свободной, было высказано въ болѣе общей формѣ знаменитымъ энциклопедистомъ прошлаго столѣтія Д'Аламберомъ. Начало Д'Аламбера пригодится намъ при выводѣ общей формулы, объемлющей всю механику. Д'Аламберъ разсуждалъ слѣдующимъ образомъ.



Фиг. 260.

Представимъ себѣ точку m (фиг. 260), которая движется по какой нибудь поверхности. Положимъ, что на эту точку дѣйствуетъ сила P. Разложимъ ее по правилу параллелограмма на двѣ силы: на силу N, направленную по нормали, и на силу T, направленную по касательной, идущей въ плоскости PNm.

Сила N не будетъ двигать точку; поэтому она называется *потерянною силою*; она равна давленію точки на поверхность.

Сила T будетъ двигать точку совершенно такъ, какъ если бы точка была свободна. Сила T называется *движущею.*

Итакъ имѣемъ три силы:

заданная P

потерянная N

движущая T.

Назовемъ проложенія силы P чрезъ X, Y, Z; проложенія силы N чрезъ X', Y' Z'. Проложенія движущей силы T, дѣйствующей какъ бы на свободную точку, будутъ по (670) и (709):

$$m\frac{d^2x}{dt^2};\ m\frac{d^2y}{dt^2};\ m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Сила P (фиг. 260) есть равнодѣйствующая силъ N и T. Поэтому:

$$X = X' + m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Y = Y' + m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$Z = Z' + m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Отсюда проложенія X', Y', Z' потерянной силы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X - m\frac{d^2x}{dt^2} &= X' \\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y' \\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (765)$$

Потерянная сила направлена по нормали. Слѣдовательно проложенія ея пропорціональны косинусамъ угловъ наклоненія нормали къ осямъ. Поэтому, по фомуламъ (753) проложенія X', Y', Z' потерянной силы пропорціональны производнымъ $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$. Называя чрезъ k коэффиціентъ пропорціональности, можемъ слѣдовательно представить уравненія (765) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X - m\frac{d^2x}{dt^2} &= k\frac{\partial f}{\partial x} \\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2} &= k\frac{\partial f}{\partial y} \\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2} &= k\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (766)$$

Этими уравненіями можно пользоваться какъ уравненіями (752).

Давленіе движущейся точки на поверхность, по которой она движется.

§ 379. Потерянную силу можно разсматривать какъ давленіе точки на поверхность, тогда по (765) проложенія на оси координатъ этого давленія будутъ:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2};\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2};\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Само же давленіе будетъ:

$$N = \sqrt{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)} \quad .(767)$$

ГЛАВА II.

Механика системы.

Движеніе системы точекъ.

Система.

§ 380. Совокупность матеріальныхъ точекъ называется системою, независимо отъ того, имѣемъ ли мы дѣло съ отдѣльными точками или же съ тѣломъ, состоящимъ изъ точекъ.

Связи.

§ 381. Изучая движеніе несвободной точки, мы можемъ смотрѣть на уравненія поверхности или линіи, по которой она движется, какъ на нѣкоторыя дополнительныя условія.

При движеніи системы точекъ, такія дополнительныя условія вводятся или потому, что та или другая точка принуждена двигаться по нѣкоторой поверхности или линіи, или же вслѣдствіе какихъ-либо другихъ причинъ, стѣсняющихъ движеніе. Напримѣръ, если сказано, что разстояніе между двумя точками (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) остается постояннымъ, то это обстоятельство выразится условіемъ:

$$f(x, y, z) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - C^2 = 0.$$

Эти добавочныя уравненія называются также уравненіями *связей*. Поверхности или линіи, по которымъ нѣкоторыя изъ точекъ системы принуждены двигаться, нити или стержни, связывающія между собою нѣкорыя изъ точекъ системы—все это называется *связями*, ограничивающими свободу движенія системы. Если какая-нибудь связь измѣняетъ свой видъ, то уравненіе ея должно заключать и время t, какъ параметръ; въ такомъ случаѣ уравненіе связи имѣетъ видъ:

$$f(x, y, z, t) = C.$$

Уравненія Лагранжа.

§ 382. Итакъ положимъ, что дана система точекъ; величины относящіяся къ различнымъ точкамъ будемъ обозначать значками 1, 2, 3, 4... Даны *дѣйствующія* силы. Назовемъ сумму проложеній на ось x силъ, дѣйствующихъ на точку (x_p, y_p, z_p) чрезъ X_p; суммы проложеній этихъ силъ на оси y и z назовемъ Y_p и Z_p. Положимъ, что намъ дано еще n уравненій связей:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3 \ldots y_1, y_2 \ldots z_2, z_3) = C_1 \\ F(x_2, x_4 \ldots y_2, y_4, \ldots z_2, z_4, \ldots t) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (768)$$

Каждое изъ этихъ уравненій содержитъ координаты нѣкоторыхъ изъ точекъ системы и можетъ содержать время t. Лѣвыя части этихъ уравненій мы будемъ сокращенно обозначать такъ f, F,... При такихъ заданіяхъ, на каждую точку будутъ дѣйствовать, кромѣ заданныхъ силъ, еще и силы потерянныя. Поэтому, совершенно такъ же какъ мы составляли уравненія (766) для одной точки, и только давая множителю k другой знакъ, мы можемъ составить для системы такія дифференціальныя урав-

ненія движенія:

$$\left.\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + k\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots \\
m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + k\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots \\
m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z + k\frac{\partial f}{\partial z_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z_1} + \dots \\
m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= X_2 + k\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots \\
m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} &= Y_2 + k\frac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_2} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (769)$$

Если какая-нибудь изъ связей не содержитъ какихъ-либо координатъ, то соотвѣтственная частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}$ будетъ нуль, уравненія же (769) представляютъ самый общій случай, который охватываетъ собою и всѣ частные случаи.

Эти уравненія (769) найдены были Лагранжямъ, они годятся для всякаго движенія какой бы то ни было системы, для какихъ бы то ни было силъ и при какихъ бы то ни было связяхъ. Величины k, λ... подлежатъ исключенію.

Возможныя перемѣщенія.

§ 383. Если точка не можетъ сойти съ нѣкоторой поверхности, но можетъ двигаться только по этой поверхности, то для нея перемѣщенія въ сторону отъ поверхности невозможны, перемѣщенія же по поверхности возможны. Слѣдовательно для нея возможны не всякія приращенія δx, δy, δz координатъ, но только тѣ, которыя согласуются съ условіемъ нахожденія точки на поверхности. Какъ это выразить аналитически? Очень просто: если уравненіе поверхности таково:

$$f(x, y, z) = C,$$

то дифференцируя его, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Здѣсь dx, dy, dz суть приращенія координатъ, именно соотвѣтствующія нахожденію точки на поверхности. Слѣдовательно перемѣщенія δx, δy, δz будутъ возможными, если они удовлетворяютъ уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad \dots\dots (770)$$

Вообще при существованіи какой бы то ни было связи:

$$\varphi(x, y, z) = C \quad \dots\dots (771)$$

возможными будутъ перемѣщенія δx, δy, δz удовлетворяюшія уравненію:

$$\frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (772)$$

Если существуетъ n связей вида (771), то возможными будутъ перемѣщенія δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, $\delta x_3 \ldots$, удовлетворяющія n уравненіямъ вида (772). Если уравненіе связи содержитъ время t (значитъ если связь измѣняется или перемѣщается), то возможными называются всетаки тѣ перемѣщенія, которыя возможны для неподвижной связи — которыя удовлетворяютъ уравненію вида (772), если время принять въ немъ за постоянное.

Общее уравненіе механики.

§ 384. Помножимъ уравненія (769) соотвѣтственно на δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, $\delta y_2 \ldots$ и сложимъ. Получимъ:

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0 \; . \; (773)$$

Въ этомъ уравненіи $\sum$ распространяется на всѣ точки.

Это найденное Лагранжемъ замѣчательное уравненіе выражаетъ какое бы то ни было движеніе. Оно содержитъ въ себѣ всю механику, всѣ законы движенія и равновѣсія. Всѣ явленія и процессы неорганической природы сводятся къ различнаго рода движенію; всѣ движенія охватываются формулою (773); слѣдовательно эта формула содержитъ въ себѣ всѣ законы явленій неорганической природы. Не удивительно послѣ этого, что полное интегрированіе ея и изслѣдованіе весьма сложно и трудно: вся сложность неорганической природы отразилась въ этой формулѣ. Уже и сама по себѣ эта формула представляетъ собою выраженіе необычайной мощи человѣческаго разума, съумѣвшаго включить чуть ли не всю вселенную со всѣми ея астрономическими, физическими и химическими законами и явленіями въ одну короткую, красивую и симметричную формулу.

Аналитическая механика.

§ 385. Вся механика приведена такимъ образомъ Лагранжемъ къ изслѣдованію уравненій (769) или уравненія (773): все приведено къ задачѣ интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Наука, изучающая движеніе, изучая уравненія (769) и (773), называется Аналитическою Механикою. Это же самое названіе «Mécanique Analytique» было дано Лагранжемъ той удивительной книгѣ, въ которой онъ изложилъ свои открытія, касающіяся механики.

Человѣчество не можетъ ждать того времени, когда интегрированіе разовьется до степени достаточной для того, чтобы рѣшать ту или другую механическую задачу аналитическимъ путемъ и, кромѣ того, бываетъ

иногда чрезвычайно поучительно дѣйствовать геометрическимъ путемъ, дающимъ выводы, отличающіеся наглядностью. Вотъ почему существуетъ на ряду съ механикою аналитическою еще теоретическая или раціональная механика. Аналитическую механику можно разсматривать какъ часть теоретической: послѣдняя не пренебрегаетъ никакими методами, тогда какъ первая идетъ только по аналитическому пути, предначертанному Лагранжемъ. Этотъ путь можно назвать царственнымъ путемъ наукъ, изслѣдующихъ природу: онъ отличается вѣрностью, точностью, стройностью, единообразіемъ и красотою.

Идя этимъ путемъ, мы прослѣдимъ такъ называемые законы механики, дающіе нѣкоторые изъ интеграловъ уравненій Лагранжа. Здѣсь мы не будемъ стремиться къ выясненію всего на примѣрахъ, потому что аналитическій путь особенно пригоденъ для выводовъ, отличающихся общностью и необходимо, чтобы читатель развивалъ въ себѣ способность къ пониманію общихъ выводовъ. Замѣтимъ заранѣе, что мы имѣемъ дѣло съ обобщеніями философскаго порядка (только на вѣрной математической почвѣ). Такъ, напримѣръ, законъ сохраненія энергіи, имѣющій міровое значеніе, есть только одинъ изъ частныхъ случаевъ охватываемыхъ уравненіями Лагранжа, которыя приложимы не только къ силамъ наблюдающимся въ природѣ, но даже и къ такимъ, которыхъ въ природѣ не существуетъ.

Потенціальная функція.

§ 386. Въ § 359-мъ мы уже имѣли дѣло съ потенціальною функціею въ случаѣ движенія одной точки.

Докажемъ слѣдующее предложеніе: *Если разсматривается движеніе такой системы, въ которой не дѣйствуютъ никакія силы кромѣ притяженія къ неподвижнымъ центрамъ и притяженій точекъ между собою, то по какому бы закону ни дѣйствовали эти притяженія, — всегда для такого движенія существуетъ такая функція U координатъ x_1, y, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3 ... производныя которой по этимъ координатамъ равны проложеніямъ X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, ... силъ. Такая функція U называется потенціальною или потенціаломъ.*

Для доказательства этого предложенія разсмотримъ три случая:

1) Точка (x, y, z) притягивается неподвижнымъ центромъ (a, b, c). Разстояніе r точки отъ центра будетъ опредѣляться изъ формулы:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Дифференцируя ее по x, получимъ:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r}.$$

Но $x - a$ есть не что иное, какъ проложеніе разстоянія r на ось x; такъ что, называя чрезъ α, β, γ углы, составляемые этимъ разстояніемъ

съ осями координатъ, имѣемъ: $r \cdot \cos\alpha = x - a$; или: $\frac{x-a}{r} = \cos\alpha$. Итакъ:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha;$$

точно такъ же получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dy} &= \frac{x-b}{r} = \cos\beta \\ \frac{dr}{dz} &= \frac{x-c}{r} = \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (774)$$

Слѣдовательно проложенія X, Y, Z притяженія ($-P$) оказываемаго центромъ (a, b, c) на точку (x, y, z) будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X &= -P \cdot \cos\alpha = -P\frac{dr}{dx} \\ Y &= -P \cdot \cos\beta = -P\frac{dr}{dy} \\ Z &= -P \cdot \cos\gamma = -P\frac{dr}{dz} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (775)$$

Называя чрезъ U интегралъ $\int -P\,dr$, то есть полагая:

$$\int -P\,dr = U$$

получимъ согласно съ (775):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx} = -P\frac{dr}{dx} = X$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dy} = -P\frac{dr}{dy} = Y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dz} = -P\frac{dr}{dz} = Z.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ существуетъ такая функція U, частныя производныя которой по x, y, z соотвѣтственно равны: X, Y, Z; существуетъ потенціалъ.

2) Точки (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) обѣ свободныя и взаимно притягиваются съ силою P.

Разстояніе r между данными точками будетъ:

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \quad \ldots \ldots (776)$$

Проложенія X, Y, Z силы, дѣйствующей на точку (x, y, z) будутъ:

$$X = -P\frac{dr}{dx};\ Y = -P\frac{dr}{dy};\ Z = -P\frac{dr}{dz} \quad \ldots (777)$$

Проложенія X_1, Y_1, Z_1 силы, дѣйствующей на точку (x_1, y_1, z_1) будутъ:

$$X_1 = -P\frac{\partial r}{\partial x_1};\ Y_1 = -P\frac{\partial r}{\partial y_1};\ Z_1 = -P\frac{\partial r}{\partial z_1}\ \ldots \quad (778)$$

Эти проложенія (779) равны и противуположны проложеніямъ (777), потому что изъ (776) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r};\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y_1}{r};\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - z_1}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x - x_1}{r};\ \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y - y_1}{r};\ \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z - z_1}{r}$$

такъ что:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x_1};\ \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y_1};\ \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z_1}.$$

Полагая:

$$\int -P\,dr = U$$

получимъ:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x};\ Y = \frac{\partial U}{\partial y};\ Z = \frac{\partial U}{\partial z};\ X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1};\ Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1};\ Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}.$$

Итакъ, и въ случаѣ взаимнаго притяженія двухъ свободныхъ точекъ существуетъ потенціалъ U.

3) Точки (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); $(x_3, y_3, z_3)\ldots$, обладающія соотвѣтственно массами m_1, m_2, $m_3\ldots$ взаимно притягиваются.

Обозначимъ разстояніе точекъ m_k и m_i чрезъ r_{ki}; такъ что, напримѣръ разстояніе между точками m_3 и m_5 будетъ r_{35}. Силу, съ которою притягиваются взаимно какія-нибудь точки m_k и m_i обозначимъ чрезъ P_{ki}; такъ что, напримѣръ сила, съ которою притягиваются взаимно точки m_3 и m_7 будетъ P_{37}. Тогда, складывая проложенія всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{\partial\,(P_{1,2} + P_{1.3} + P_{1.4} + \ldots)}{\partial x_1} = X_1 \\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{\partial\,(P_{1,2} + P_{1,3} + P_{1.4} + \ldots)}{\partial y_1} = Y_1 \\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{\partial\,(P_{1.} + P_{1,3} + P_{1.4} + \ldots)}{\partial z_1} = Z_1 \\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{\partial\,(P_{2,1} + P_{2,3} + P_{2,4} + \ldots)}{\partial x_2} = X_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ \ldots \quad (779)$$

Величины P обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что въ каждую изъ нихъ входятъ только координаты тѣхъ двухъ точекъ, которыя имѣютъ значки

равные одному изъ значковъ, поставленныхъ при P; напримѣръ $P_{3,5}$ зависитъ только отъ координатъ $x_3, y_3, z_3, x_5, y_5, z_5$. Поэтому, при указанныхъ въ правыхъ частяхъ уравненій дифференцированіяхъ, будутъ равны нулю, напримѣръ такія производныя какъ производныя по x_1, y_1, z_1 отъ $P_{2,3}$, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, и вообще, при дифференцированіи по x_1, y_1, z_1 не обратятся въ нуль только производныя отъ $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, $P_{1,4}\ldots$ и вообще отъ всѣхъ P, содержащихъ въ значкахъ единицу. Поэтому уравненія, относящія къ точкѣ (x_1, y_1, z_1) останутся вѣрными, если сбоку правыхъ ихъ частей присоединить еще сумму $P_{2,3}+P_{2,4}+\ldots+P_{3,5}+\ldots$ всѣхъ остальныхъ P. Точно также, не нарушая справедливости другихъ уравненій (779), можно ихъ дополнить подобнымъ образомъ. Тогда во всѣхъ правыхъ частяхъ уравненій (779) получимъ частныя производныя отъ одной и той же функціи:

$$U=(P_{1,2}+P_{2,3}+\ldots+P_{2,3}+P_{2,4}+\ldots+P_{3,4}+\ldots),$$

въ которую входятъ всѣ P. Получимъ:

$$X_1=\frac{\partial U}{\partial x_1};\ Y_1=\frac{\partial U}{\partial y_1};\ Z_1=\frac{\partial U}{\partial z_1};\ X_2=\frac{\partial U}{\partial x_2};\ldots$$

Итакъ, въ случаѣ взаимныхъ притяженій (а слѣдовательно и отталкиваній, которыя разсматриваются какъ отрицательныя притяженія), сопровождаемыхъ притяженіями къ неподвижнымъ центрамъ, существуетъ потенціалъ.

Предложеніе, высказанное въ началѣ настоящаго параграфа доказано. Потенціалъ называютъ иногда силовою функціею.

Въ случаѣ, напримѣръ, взаимнаго притяженія точекъ по закону Ньютона, то есть обратно пропорціональнаго квадрату разстояній и прямопропорціональнаго произведенію $m_k m_i$ притягивающихся массъ, потенціальная функція равна:

$$U=\frac{m_1\,m_2}{r_{1,2}}+\frac{m_1\,m_3}{r_{1,3}}+\ldots+\frac{m_2\,m_3}{r_{2,3}}+\ldots\ .\ .\ .\ .\ (780)$$

Общее уравненіе механики въ случаѣ существованія U.

§ 387. Въ тѣхъ случаяхъ, когда существуетъ для заданныхъ силъ потенціалъ, можно слѣдующимъ образомъ преобразовать общее уравненіе (773) механики.

Перенеся вторые члены скобокъ формулы (773) въ правую часть, получимъ:

$$\sum\left[X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\right]=\sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right]\ .\ (781)$$

Если существуетъ потенціалъ U, то:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\ Y=\frac{\partial U}{\partial y};\ Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

и потому (781) обращается *въ этомъ случаѣ* въ:

$$\sum\left[\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z\right]=\sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right] \qquad (782)$$

Центръ инерціи.

§ 388. Если имѣемъ систему точекъ (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2)\ldots$, то та точка пространства, координаты которой $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ опредѣляются уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m}=\frac{\Sigma\, mx}{M}\\ \bar{y}&=\frac{\Sigma\, my}{\Sigma\, m}=\frac{\Sigma\, my}{M}\\ \bar{z}&=\frac{\Sigma\, mz}{\Sigma\, m}=\frac{\Sigma\, mz}{M}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots (783)$$

называется *центромъ инерціи* системы. Такъ напримѣръ, если имѣемъ двѣ точки: (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2), то координаты центра инерціи ихъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\\ \bar{y}&=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\\ \bar{z}&=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots (784)$$

Если точки m_1 и m_2 обѣ лежатъ на оси x, такъ что координаты ихъ будутъ $(x_1, 0, 0)$; $(x_2, 0, 0)$, то координаты центра инерціи будутъ:

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$\bar{y}=0$$

$$\bar{z}=0.$$

Начало движенія центра инерціи.

§ 389. Если дана такая система, для которой всѣ безконечно малыя перемѣщенія возможны, то мы докажемъ, что центръ инерціи ея движется прямолинейно и равномѣрно. Всякія перемѣщенія возможны для слѣдующихъ системъ: система свободныхъ точекъ, свободное твердое тѣло, свободная гибкая нить, свободная (не заключенная въ сосудъ) жидкость и проч.

Если δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, $\delta x_3,\ldots$ могутъ быть какими угодно— совершенно произвольны (согласно сдѣланному предположенію), то всѣ δx могутъ быть равны какому-нибудь $\delta\alpha$, всѣ δy равны $\delta\beta$, всѣ δz равны $\delta\gamma$.

Тогда въ (773) можно вывести $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ за скобки и получить:

$$\delta\alpha \sum \left(X - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \delta\beta \sum \left(Y - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$+ \delta\gamma \sum \left(Z - m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (785)$$

Но величины $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ совершенно произвольны. Поэтому уравненіе (785) можетъ быть вѣрнымъ только тогда, когда коэффиціенты, стоящіе при этихъ величинахъ, равны нулю, то есть когда:

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= \sum m\,\frac{d^2x}{dt^2} \\ \sum Y &= \sum m\,\frac{d^2y}{dt^2} \\ \sum Z &= \sum m\,\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (786)$$

Изъ (783) слѣдуетъ:

$$\overline{x} \sum m = \sum mx,$$

если назовемъ массу $\sum m$ всей системы чрезъ M, то получимъ:

$$\overline{x}\,M = \sum mx$$

$$M\,\frac{d\overline{x}}{dt} = \sum m\,\frac{dx}{dt}$$

$$M\,\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \sum m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

Точно такія же уравненія получимъ для $\overline{y}$ и $\overline{z}$. Вообще будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} M\,\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} &= \sum m\,\frac{d^2x}{dt^2} \\ M\,\frac{d^2\overline{y}}{dt^2} &= \sum m\,\frac{d^2y}{dt^2} \\ M\,\frac{d^2\overline{z}}{dt^2} &= \sum m\,\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (787)$$

Сравнивая (787) съ (786), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= M\,\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} \\ \sum Y &= M\,\frac{d^2\overline{y}}{dt^2} \\ \sum Z &= M\,\frac{d^2\overline{z}}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (788)$$

Уравненія эти показываютъ, что *центръ инерціи движется такъ, какъ будто бы всѣ силы были приложены къ нему и масса всей системы въ немъ сосредоточена.* Если на точки системы дѣйствуетъ только тяжесть, то извѣстно, что та точка, въ которой вся тяжесть какъ бы сосредоточена (точка приложенія равнодѣйствующихъ параллельныхъ силъ тяжести, дѣйствующихъ на всѣ точки системы), называется *центромъ тяжести* системы. Слѣдовательно центръ инерціи и центръ тяжести, въ случаѣ системы, на которую дѣйствуетъ тяжесть, есть одно и то же.

Поэтому уравненія (783) годятся для опредѣленія центра тяжести.

Если на систему не дѣйствуютъ никакія силы, или только взаимныя притяженія точекъ, то $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum Z = 0$; тогда (788) обращаются въ:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = 0.$$

Эти уравненія, по интегрированіи, даютъ уравненія:

$$\bar{x} = a_1 + b_1 t$$

$$\bar{y} = a_2 + b_2 t$$

$$\bar{z} = a_3 + b_3 t,$$

показывающія, что, въ случаѣ отсутствія силъ или въ случаѣ существованія только взаимныхъ притяженій, *центръ тяжести системы движется равномѣрно и прямолинейно.*

Солнечная система, напримѣръ, такъ удалена отъ всѣхъ неподвижныхъ звѣздъ, что подвержена только взаимнымъ притяженіямъ. Поэтому центръ тяжести солнечной системы, состоящей изъ солнца и окружающихъ его планетъ (въ томъ числѣ и земли), движется въ пространствѣ равномѣрно и прямолинейно. Такое движеніе подмѣчено и наблюденіями астрономовъ.

Если же на систему дѣйствуетъ сила тяжести, то уравненія (788) показываютъ, что центръ тяжести системы движется такъ, какъ будто вся масса системы была въ немъ сосредоточена. Центръ тяжести артиллерійской гранаты, напримѣръ, описываетъ траекторію, мало отличающуюся отъ параболы. Если граната разорвется въ воздухѣ, то осколки ея разлетятся по разнымъ направленіямъ, но центръ тяжести ихъ долетитъ до земли по той же самой траекторіи, по которой онъ долетѣлъ бы, если бы граната не лопнула. Это явленіе, предсказываемое закономъ движенія центра тяжести, будетъ только нѣсколько измѣнено дѣйствіемъ воздуха,

который представляетъ большее сопротивленіе цѣлой гранатѣ и значительно меньшее сопротивленіе мелкимъ осколкамъ.

Начало сохраненія живой силы.

§ 390. Чрезъ $\delta x, \delta y, \delta z$ мы обозначали возможныя перемѣщенія,— именно всѣ тѣ перемѣщенія, которыя возможны при данныхъ связяхъ. Чрезъ dx, dy, dz обозначали мы, какъ и всегда, дѣйствительныя перемѣщенія. Выражая, что дѣйствительныя перемѣщенія выбраны изъ числа возможныхъ, получимъ:

$$\delta x = \frac{dx}{dt}\,dt; \quad \delta y = \frac{dy}{dt}\,dt; \quad \delta z = \frac{dz}{dt}\,dt.$$

Такія уравненія слѣдуетъ написать для всѣхъ точекъ системы. Слѣдовательно, въ случаѣ существованія для заданныхъ силъ потенціала, уравненіе (782) будетъ существовать, если въ немъ замѣнимъ величины δx. δy, δz величинами $\frac{dx}{dt}\,dt$; $\frac{dy}{dt}\,dt$; $\frac{dz}{dt}\,dt$. Сдѣлавъ это, получимъ:

$$\sum \left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}\,dt + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}\,dt + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,dt\right]$$
$$= \sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}\,dt + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}\,dt + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\,dt\right] \quad . \ . \ (789)$$

По раздѣленіи на dt лѣвая часть этого уравненія обращается въ $\frac{dU}{dt}$, и получается:

$$\frac{dU}{dt} = \sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right] \ . \ . \ . \ . \ (790)$$

Интегралъ этого уравненія видѣнъ непосредственно. Онъ таковъ:

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = U + h, \ . \ . \ . \ (791)$$

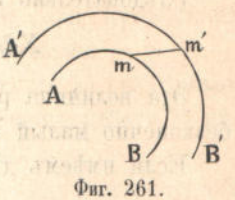
гдѣ h есть постоянное интеграціи. Дѣйствительно: дифференцируя (791), получимъ (790). Сравнивая (791) съ (706), получимъ:

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = U + h \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (792)$$

Это уравненіе (792) выражаетъ собою законъ, называемый *началомъ сохраненія живой силы*. Этотъ законъ справедливъ во всѣхъ случаяхъ, когда силы имѣютъ потенціалъ и когда дѣйствительныя перемѣщенія принадлежатъ къ числу возможныхъ,—каковы бы ни были связи, лишь бы уравненія связей не заключали въ себѣ времени.

Если же уравненія связей заключаютъ въ себѣ время, то связи или подвижны или измѣняютъ форму. Въ этомъ случаѣ начало сохраненія живой силы не всегда примѣнимо, потому что если связь измѣняется или

движется, то дѣйствительныя перемѣщенія не принадлежатъ къ числу тѣхъ, которыя *называются* возможными. Въ самомъ дѣлѣ: возможными перемѣшеніями называются перемѣщенія возможныя *по неподвижной связи*. Но если связь AB перемѣстилась въ положеніе $A'B'$ (фиг. 261), то перемѣщеніе mm' точки m нельзя исполнить по AB, пока AB неподвижна; тогда нельзя замѣнять $\delta x \ldots$ чрезъ $\frac{dx}{dt}\, dt \ldots$ и начало сохраненія живой силы непримѣнимо.



Фиг. 261.

Но разсмотрѣніе подвижныхъ связей можетъ быть замѣнено разсмотрѣніемъ особыхъ силъ. Напримѣръ разсмотрѣніе движенія такой системы, въ которой двѣ какія-нибудь точки связаны растяжимою нитью, можетъ быть замѣнено разсмотрѣніемъ той же системы, въ которой только нить замѣнена взаимнымъ притяженіемъ двухъ точекъ пропорціональнымъ ихъ взаимному разстоянію. Съ этой точки зрѣнія начало сохраненія живой силы обладаетъ большою общностью.

Названіе *«сохраненіе живой силы»*, начало, выраженное уравненіемъ (792), получило вслѣдствіе слѣдующей причины: Потенціалъ U есть функція координатъ; слѣдовательно если всѣ точки системы, по совершеніи нѣкотораго движенія, придутъ въ первоначальныя положенія (если система вернется къ первоначальному состоянію), то U получитъ первоначальную величину, а слѣдовательно, по уравненію (792), и живая сила $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ приметъ первоначальное значеніе, по какимъ бы путямъ ни вернулись точки системы въ свои начальныя положенія: при возвращеніи системы въ то же состояніе живая сила пріобрѣтаетъ ту же величину—сохраняется.

Работа системы.

§ 391. Представимъ себѣ точку m (фиг. 262); назовемъ чрезъ P равнодѣйствующую всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на эту точку. Обоѳначимъ чрезъ (P, ds) уголъ составляемый направленіемъ силы P съ направленіемъ элемента траекторіи, описываемой точкою m. Работа силы P на протяженіи пути ds, какъ мы знаемъ изъ § 354-го, будетъ:

$$P \cdot ds \cdot \cos(P, ds) \quad . \; . \; . \; (793)$$

Фиг. 262.

Но, по (130), имѣемъ:

$$\cos(P, ds) = \cos(P, x) \cdot \cos(ds, x) + \cos(P, y) \cdot \cos(ds, y)$$
$$+ \cos(P, z) \cdot \cos(ds, z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (794)$$

Затѣмъ извѣстно, что:

$$\left.\begin{array}{l} P\,.\,cos\,(P,x) = X;\; ds\,.\,cos\,(ds,x) = dx \\ P\,.\,cos\,(P,y) = Y;\; ds\,.\,cos\,(ds,y) = dy \\ P\,.\,cos\,(P,z) = Z;\; ds\,.\,cos\,(ds,z) = dz \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;(795)$$

Слѣдовательно величина (793) работа силы P будетъ равна:

$$Xdx + Ydy + Zdz = P\,.\,ds\,.\,cos\,(P, ds)\;.\;.\;.\;.\;(796)$$

Эта величина работы производимой силою P покуда точка проходитъ безконечно малый путь ds называетсч *элементарною работою* силы P.

Если имѣемъ дѣло съ системою, то величина:

$$\sum (Xdx + Ydy + Zdz)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(797)$$

называется *элементарною работою* дѣйствующихъ силъ.

$$\int_{t_0}^{t} \sum (Xdx + Ydx + Zdz)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(798)$$

распространенной на все движеніе системы, совершившееся въ промежутокъ времени $t - t_0$, называется *работою дѣйствующихъ силъ, произведенною ими въ теченіи времени* $t - t_0$.

Интегралъ живыхъ силъ.

§ 392. Величина U, по самому опредѣленію ея (§ 386), есть такая функція, производныя которой по координатамъ суть проложенія силъ на соотвѣтствующія оси координатъ. Слѣдовательно:

$$\frac{dU}{dt} = \sum \left[\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dt}\right]$$

$$= \sum \left[X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right]$$

Подставляя въ (790), получимъ:

$$\sum \left[X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right] = \sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right]$$

Умножая на dt и интегрируя, получимъ:

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum m{v_0}^2 = \int_{t_0}^{t} \sum \left[Xdx + Ydy + Zdz\right]\;.\;.\;.\;(799)$$

приращеніе живой силы равно работѣ дѣйствующихъ силъ. Это и есть теорема, называемая *интеграломъ живыхъ силъ*, и доказанная для движенія падающей тяжелой точки въ § 356-омъ.

Эта теорема весьма важна по удобству примѣненія въ приложеніяхъ. Она составляетъ краеугольный камень отдѣла практической механики‘ называемаго *теоріею машинъ.*

Разница понятій «работа» и «мощность».

§ 393. Кстати сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе. Не надо смѣшивать двухъ понятій: *работа*, измѣряемая килограмметрами или пудофутами и *мощность* (или эффектъ), измѣряемая *паровыми лошадьми.*

Если какой-нибудь двигатель поднимаетъ въ 1 секунду 75 килограммъ на высоту одного метра, то говорятъ, что онъ совершаетъ работу 75 килограмметровъ съ мощностью въ одну паровую лошадь.

Если другой двигатель поднимаетъ 75 килограммъ на высоту одного метра въ $\frac{1}{2}$ секунды, то говорятъ, что онъ совершаетъ работу 75 килограмметровъ съ мощностью двухъ паровыхъ лошадей.

Второй двигатель дѣйствуетъ энергичнѣе перваго, потому что ту же самую работу дѣлаетъ вдвое скорѣе, но работа въ обоихъ случаяхъ одинакова.

Законъ сохраненія энергіи.

§ 394. Потенціалъ, взятый съ обратнымъ знакомъ ($-U$), называютъ *потенціальною энергіею.* Живую силу $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ называютъ *кинетическою энергіею.* Уравненіе (792) можно написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 + (-U) = h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (800)$$

и высказать въ такой формѣ:

Полная энергія, системы, равная суммѣ ея потенціальной и кинетической энергіи, есть величина постоянная.

Въ этомъ состоитъ механическое выраженіе закона сохраненія энергіи, составляющаго перифразу закона сохраненія живыхъ силъ.

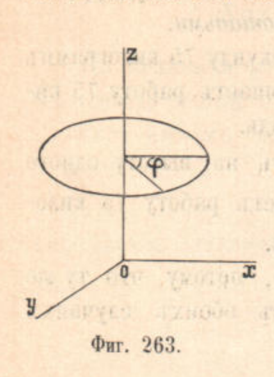
Математическое выраженіе этого закона было, до Даніила Бернулли, выведено только для случая притяженія точекъ системы къ неподвижнымъ центрамъ. Этотъ знаменитый математикъ подмѣтилъ несравненно большій кругъ его примѣненія и его важное значеніе. Но переводъ его на физическій языкъ былъ сдѣланъ Робертомъ Майеромъ и Гельмгольтцемъ. Въ переводѣ на физическій языкъ этотъ законъ обозначаетъ, что энергія не увеличивается и не уменьшается при переходѣ ея изъ одного вида въ другой: изъ тепла въ работу и обратно, изъ электричества въ тепло или въ свѣтъ или въ работу и обратно, изъ химическаго притяженія въ работу и проч. Въ этомъ видѣ законъ сохраненія энергіи является краеугольнымъ камнемъ современной физики, химіи и другихъ естественныхъ наукъ.

Тожество физическаго смысла закона сохраненія энергіи съ механическимъ (съ формулою 800) заключается въ томъ, что электричество,

магнетизмъ, теплота, химическое сродство, свѣтъ и проч. сводятся къ различнаго рода движеніямъ, притяженіямъ и отталкиваніямъ.

Законъ сохраненія площадей.

§ 395. Положимъ, что связи, существующія въ системѣ таковы, при которыхъ всѣ ея точки могутъ ходить по окружностямъ, перпендикулярнымъ къ оси z и имѣющимъ центры на этой оси, причемъ относительное положеніе точекъ не мѣняется. Другими словами: допустимъ, что система способна совершать всякія вращенія около оси z. Это еще не значитъ, что система въ самомъ дѣлѣ совершаетъ такое вращеніе, но только мы хотимъ сказать, что связи системы допускаютъ всякое вращеніе около оси z. Къ такимъ системамъ относятся между прочимъ: система свободныхъ точекъ, свободное твердое тѣло, свободная гибкая нить, свободная жидкость и проч. Пусть φ есть уголъ, на который повертываются всѣ радіусы точекъ. Называя чрезъ r радіусъ какой нибудь изъ точекъ системы имѣемъ по условію задачи:



Фиг. 263.

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

Отсюда:

$$\delta x = - r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi; \ \delta y = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \ \delta z = 0$$

или:

$$\delta x = - y \cdot d\varphi; \ \delta y = x \cdot d\varphi; \ \delta z = 0$$

Вставляя эти возможныя перемѣщенія въ общее уравненіе механики (773), получимъ:

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) (-y d\varphi) + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) x \, d\varphi + 0 \right] = 0 ,$$

или:

$$\sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX) \quad . \ . \ . \ . \ (801)$$

Вычислимъ для даннаго случая элементарную работу. По (797) получимъ:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = d\varphi \sum (xY - yX) \quad . \ . \ . \ . \ (802)$$

Величина $(xY - yX)$, на которую нужно помножить $d\varphi$, чтобы получить элементарную работу, называется *моментомъ силъ относительно оси z.*

Изъ (801), какъ и въ § 367-омъ, получимъ:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right) = \sum (xY - yX) , \quad . \ . \ . \ (803)$$

или:

$$\frac{d}{dt}\sum mr^2\frac{d\varphi}{dt}=\sum(xY-yX)\quad\ldots\ldots\quad(804)$$

Если моментъ силъ относительно оси z равенъ нулю, какъ это бываетъ при силахъ взаимныхъ, при силахъ направленныхъ къ началу координатъ, въ отсутствіи всякихъ силъ, то (804) интегрируется и получается:

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum mr^2\frac{d\varphi}{dt}=c\quad\ldots\quad(805)$$

Это уравненіе выражаетъ собою *законъ площадей*, при *вращаемости* системы около оси z.

Если система способна вращаться около каждой изъ осей координатъ, то такимъ же путемъ получили бы:

$$\left.\begin{aligned}\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\sum(yZ-xY)\\\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\sum(zX-xZ)\\\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\sum(xY-yX)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(806)$$

Если моменты силъ относительно осей равны нулю, то эти уравненія (806) интегрируются и даютъ по интеграціи:

$$\left.\begin{aligned}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=c_1\\\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=c_2\\\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=c_3\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(807)$$

Неизмѣняемая плоскость.

§ 396. Дифференціальныя уравненія движенія, которыя даетъ формула (773), заключаютъ въ себѣ вторыя производныя и потому подлежатъ двукратному интегрированію. Уравненія такія какъ (807), содержащія только первыя производныя, называются первыми интегралами. Солнечная система (солнце съ планетами) удовлетворяетъ тѣмъ условіямъ, при которыхъ существуетъ законъ площадей (уравненія 807). Эти уравненія приводятъ къ весьма важному заключенію, которое мы сейчасъ изложимъ.

Обозначимъ чрезъ Cdt сумму произведеній массъ на проложенія (на нѣкоторую плоскость P) площадей, описываемыхъ радіусами-векторами

точекъ системы въ теченіи времени dt. Опредѣлимъ такое положеніе плоскости P, при которомъ величина Cdt была бы наибольшая.

Согласно съ (807) имѣемъ:

$$Cdt = [c_1 \,.\, cos\,(P,\,yz) + c_2 \,.\, cos\,(P,\,zx) + c_3 \,.\, cos\,(P,\,xy)]\,dt \quad . \quad . \quad (808)$$

Назовемъ чрезъ P' вспомогательную плоскость, направленіе которой опредѣлялось бы уравненіями:

$$cos\,(P,'\,yz) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$

$$cos\,(P'\,zx) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$

$$cos\,(P',\,xy) = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}}$$

Основываясь на (138), мы можемъ теперь представить (808) въ видѣ:

$$Cdt = \sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}\; cos\,(P',\,P)\,.$$

Изъ этого выраженія видно, что Cdt будетъ наибольшее, когда $cos\,(P',\,P)$ будетъ равенъ единицѣ, т. е. когда (P и P') совпадаютъ, другими словами, когда:

$$\left.\begin{aligned} cos\,(P,\,yz) &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}} \\ cos\,(P,\,zx) &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}} \\ cos\,(P,\,xy) &= \frac{c_3}{\sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (809)$$

Величины c_1, c_2, c_3 — постоянная. Слѣдовательно направленіе той плоскости, для которой Cdt есть наибольшая величина, не измѣняется. Эта замѣчательная плоскость называется *неизмѣняемою*. Итакъ, вотъ какое замѣчательное слѣдствіе выходитъ изъ уравненій (807),—существуетъ нѣкоторая неподвижная плоскость въ солнечной системѣ. Для астронома, несущагося на земномъ шарѣ, совершающемъ вращеніе около оси, обращеніе около солнца, движеніе прецессіи и движеніе нутаціи, и встрѣчающаго во всемъ движеніе, чрезвычайно важно было узнать, что въ солнечной системѣ существуетъ хотя и идеальная, но всетаки неподвижная плоскость.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

§ 397. Вернемся къ общему уравненію (773) механики и посмотримъ, нельзя ли его выразить словами.

Замѣтимъ, что величины:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$$

суть проложенія ***потерянныхъ силъ***. Сравнивая, послѣ этого замѣчанія, (773) съ (797) видимъ, что уравненіе (773) можно выразить такими словами: ***во всякомъ движеніи элементарная работа потерянныхъ силъ на пути возможныхъ перемѣщеній равна нулю, или, потерянныя силы находятся во взаимномъ равновѣсіи.***

Творецъ аналитической механики, Лагранжъ, шелъ такимъ путемъ: онъ воспользовался еще до него установленнымъ ***началомъ возможныхъ перемѣщеній***, которое заключается въ слѣдующемъ:

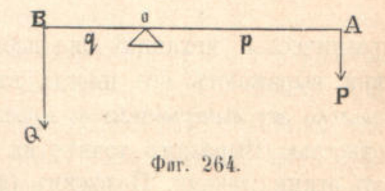
Совокупность силъ находится въ равновѣсіи, если элементарная работа на пространствѣ возможныхъ перемѣщеній равно нулю, то есть если:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (810)$$

Это начало Лагранжъ распространилъ на потерянныя силы, которыя, по началу Д'Аламбера, находятся въ равновѣсіи, и получилъ свою знаменитую формулу (773).

Начало возможныхъ перемѣщеній, само по себѣ, весьма уясняетъ дѣло во многихъ случаяхъ.

Приложимъ его, для ближайшаго съ нимъ ознакомленія, къ рычагу. Пусть намъ данъ рычагъ (фиг. 264), подпертый въ точкѣ O. Въ точкахъ A и B приложены къ нему силы P и Q. Спрашивается, какое соотношеніе должно быть между плечами $OA = p$ и $OB = q$, для того чтобы рычагъ находился въ равновѣсіи?



Фиг. 264.

Если рычагъ отклонится на весьма малый уголъ $d\varphi$, то точка A перемѣстится въ одну сторону (положимъ кверху) на величину дуги $pd\varphi$ (дуга = радіусу помноженному на уголъ). Точка B перемѣстится при этомъ въ противуположную сторону (книзу) на дугу $qd\varphi$. Если перемѣщеніе кверху считаемъ положительнымъ, то перемѣщеніе книзу придется считать отрицательнымъ. Поэтому возможныя перемѣщенія будутъ

$pd\varphi$ для точки A

$-qd\varphi$ для точки B

Работы на пути этихъ перемѣщеній будутъ:

$$Ppd\varphi = \text{работа силы } P$$

$$-Qqd\varphi = \text{работа силы } Q.$$

По началу возможныхъ перемѣщеній сумма этихъ работъ, въ случаѣ равновѣсія, должна равняться нулю. Слѣдовательно при равновѣсіи:

$$Ppd\varphi - Qqd\varphi = 0;$$

или:

$$Pp = Qq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (811)$$

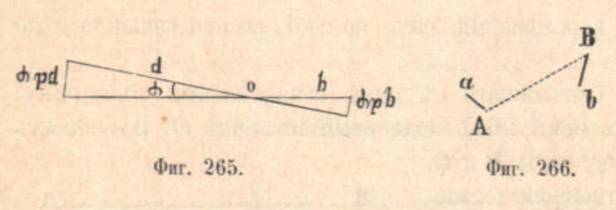
Это извѣстный законъ рычага: *моменты силъ, въ случаѣ равновѣсія, равны между собою.*

Уравненіе (811) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$

силы обратно пропорціональны плечамъ рычага.

Такимъ образомъ мы вывели законъ рычага изъ начала возможныхъ перемѣщеній. Мы могли бы его выразить такъ: при перемѣщеніи рычага на уголъ $d\varphi$ одинъ конецъ его описываетъ большую, другой — меньшую дугу = перемѣщеніе одного конца большое, перемѣщеніе другого—малое (фиг. 265). Для равновѣсія, приложенныя къ этимъ концамъ силы должны быть обратно пропорціональны перемѣщеніямъ. Чѣмъ меньше возможное перемѣщеніе точки системы, тѣмъ большую силу надо приложить къ этой точкѣ для равновѣсія.



Фиг. 265. Фиг. 266.

Начало возможныхъ перемѣщеній имѣетъ широкое примѣненіе, будучи столь же общимъ, какъ уравненіе (773). Въ практической механикѣ оно избавляетъ отъ многихъ вычисленій. Практики выражаютъ его иногда въ такой формѣ, *проигрывая въ силѣ—мы столько же выигрываемъ въ пространствѣ.* Это выраженіе не отличается точностью. Выразимъ точнѣе на опредѣленномъ примѣрѣ, что хотятъ сказать этими словами. Положимъ (фиг. 266) мы имѣемъ сколь угодно сложный механизмъ, обозначенный на чертежѣ пунктиромъ и состоящій изъ какихъ угодно шкивовъ, зубчатокъ и рычаговъ, только такой, что каждому положенію точки A механизма соотвѣтствуетъ свое вполнѣ опредѣленное положеніе точки B. Положимъ еще, что, при прохожденіи точкою A весьма малаго пути Aa, точка B проходитъ малый путь Bb. На основаніи начала возможныхъ перемѣщеній силы P и Q, приложенныя въ точкахъ A и B по направленіямъ этихъ путей, уравновѣшиваются въ томъ случаѣ, если онѣ обратно пропорціональны длинамъ этихъ путей.

Это начало убѣждаетъ насъ въ томъ, что *никакимъ механизмомъ нельзя создать энергіи изъ ничего: можно только разнообразить отношенія между проходимыми путями и силами.*

Лагранжевы множители.

§ 398. Мы подошли къ уравненію (769), исходя изъ уравненій (766), Лагранжъ установилъ уравненіе (773), пользуясь началомъ возможныхъ перемѣщеній и уже это уравненіе (773) развилъ въ систему уравненій (769). Покажемъ, что уравненія (769) можно вывести изъ уравненія (773).

По заданнымъ условіямъ какой-нибудь задачи имѣемъ:

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0 \quad . (773)$$

и нѣсколько, положимъ n, уравненій связей:

$$\left.\begin{array}{l} f\,(x,\, y,\, z,\, t) = 0 \\ F\,(x,\, y,\, z,\, t) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ . (812)$$

Положимъ, что система заключаетъ p точекъ.

n уравненій (812) связей даютъ такія n уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\left[\dfrac{\partial f}{dx}\,\delta x + \dfrac{\partial f}{dy}\,\delta y + \dfrac{\partial f}{dz}\,\delta z\right] = 0 \\ \sum\left[\dfrac{\partial F}{dx}\,\delta x + \dfrac{\partial F}{dy}\,\delta y + \dfrac{\partial F}{dz}\,\delta z\right] = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ . (813)$$

Если число точекъ равно p, то число перемѣщеній (по осямъ координатъ) $\delta x_1,\ \delta y_1,\ \delta z_1,\ \delta x_2,\ \delta y_2,\ \delta z_2,\ \delta x_3 \ldots$ будетъ $3p$. Изъ n уравненій (813) можно было бы опредѣлить n такихъ величинъ δ, и исключить ихъ изъ уравненія (773), въ которомъ осталось бы $3p-n$ совершенно произвольныхъ δ. Уравненіе (773) могло бы существовать только при томъ условіи, если каждый изъ $3p-n$ коэффиціентовъ, стоящихъ при такихъ произвольныхъ δ, былъ бы равенъ нулю. Слѣдовательно надо приравнять нулямъ эти $3p-n$ коэффиціентовъ. Эти $3p-n$ уравненій да еще n уравненій (812) и составили бы $3n$ уравненій для опредѣленія $3n$ координатъ черезъ время t.

Однако такой способъ исключенія возможныхъ перемѣщеній δ весьма сложенъ и представляетъ множество затрудненій. Лагранжъ преодолѣлъ всѣ эти затрудненія, приложивъ сюда извѣстный *способъ исключенія помощью неопредѣленныхъ множителей.*

Онъ множитъ уравненія (813) на неопредѣленные множители k, $\lambda\ldots$ и складываетъ затѣмъ ихъ съ уравненіемъ (773).

Такимъ образомъ получается:

$$\sum\left(\left[X - m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \ldots\right]\delta x\right.$$
$$+\left[Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} + \ldots\right]\delta y$$
$$\left.+\left[Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + k\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} + \ldots\right]\delta z\right) = 0 \quad . \; . \; (814)$$

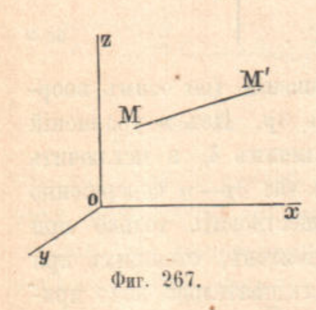
n произвольныхъ множителей $k, \lambda \ldots$ опредѣляются такъ, чтобы n изъ величинъ δ имѣли бы коэффиціентами нули (другими словами n величинъ: $k, \lambda \ldots$ можно опредѣлить изъ n уравненій, получаемыхъ отъ приравненія нулю n коэффиціентовъ, стоящихъ при какихъ-нибудь n изъ величинъ δ). Тогда приравненіе нулю коэффиціентовъ остальныхъ $3p-n$ величинъ δ дастъ $3p-n$ дифференціальныхъ уравненій.

Можно то же самое дѣйствіе выразить еще проще: все приводится къ тому, что получаются $3p$ уравненій отъ приравненія нулю всѣхъ коэффиціентовъ стоящихъ при $3p$ величинахъ δ.

Уравненіе (814) дастъ такимъ образомъ $3p$ такихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + k\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots \\ m\frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + k\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda\frac{F}{\partial y_1} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (769)$$

Вотъ мы и пришли къ уравненіямъ (769).



Фиг. 267.

$3p$ уравненій (769) и n уравненій (812) вполнѣ достаточны для рѣшенія задачи. Вся трудность заключается въ интегрированіи этихъ уравненій.

Примѣръ. Составить дифференціальныя уравненія движенія двухъ тяжелыхъ точекъ, находящихся подъ дѣйствіемъ тяжести и связанныхъ между собою невѣсомымъ стержнемъ MM' (фиг. 267) длины l.

Здѣсь уравненіе связи MM' таково:

$$f(x, y, z) = (x - x')^2 + (y - y_1)^2 + (z - z')^2 - l^2 = 0;$$

оно выражаетъ, что квадратъ разстоянія MM' равенъ постоянно l.

Имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - x'); \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2(x - x')$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - y'); \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -2(y - y')$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(z - z'); \qquad \frac{\partial f}{\partial z'} = -2(z - z').$$

Дѣйствуетъ только сила тяжести, направленная по отрицательной сторонѣ оси z. Поэтому:

$$X = 0;\quad Y = 0;\quad Z = -mg;\quad X_1 = 0;\quad Y_1 = 0;\quad Z_1 = -m'g.$$

Слѣдовательно въ данномъ случаѣ дифференціальныя уравненія (769) примутъ видъ:

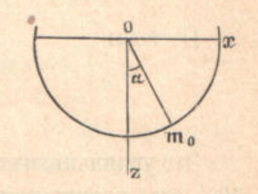
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 2k(x - x_1); & m'\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -2k(x - x') \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 2k(y - y_1); & m_1\frac{d^2y}{dt^2} &= -2k(y - y') \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + 2k(z - z'); & m'\frac{d^2z}{dt^2} &= -m'g - 2k(z - z') \end{aligned}\right\} \quad (815)$$

Требуемыя дифференціальныя уравненія движенія найдены; для полученія уравненій движенія въ конечной (не дифференціальной формѣ) нужно было бы найденныя уравненія (815) два раза проинтегрировать, при чемъ вошли бы постоянныя интеграціи, которыя надо было бы опредѣлить изъ начальныхъ данныхъ.

Математическій маятникъ.

§ 399. Такіе, обладающіе болѣе или менѣе большою общностью законы, какъ начало сохраненія движенія центра тяжести, начало сохраненія живой силы, начало площадей, даютъ возможность болѣе быстраго способа рѣшенія механическихъ задачъ. Приложимъ теорему интеграла живой силы къ чрезвычайно важному самому по себѣ движенію математическаго маятника.

Математическимъ маятникомъ называется тяжелая точка, подвѣшенная при помощи невѣсомой и совершенно гибкой нити къ неподвижной точкѣ 0 (фиг. 268). Въ положеніи равновѣсія нить *от* направлена вертикально внизъ. Отклоняютъ точку *m* въ положеніе m_0 и предоставляютъ ей затѣмъ двигаться подъ вліяніемъ силы тяжести. Все это можно продѣлать съ гирею, подвѣшенною на тонкой нити. Такой снарядъ называется физическимъ маятникомъ. При изслѣдованіи движенія физическаго маятника пришлось бы принять во вниманіе упругость нити, сопротивленіе воздуха и движеніе цѣлой системы точекъ, составляющихъ гирю. Обыкновенно сначала упрощаютъ задачу идеализируя ее, а потомъ уже переходятъ къ задачѣ болѣе сложной, представляемой дѣйствительностью. Математическій маятникъ есть идеализація физическаго для упрощенія задачи.



Фиг. 268.

Возьмемъ начало координатъ въ неподвижной точкѣ 0 *подвѣса*. Возь-

мемъ ось z по направленію внизъ и ось x въ плоскости omm_0, въ которой первоначально отводится точка m.

Прилагая теорему интеграла живыхъ силъ (§ 392) къ моментамъ, въ которыхъ точка m имѣетъ каординаты z и z_0, находимъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgz - mgz_0 \quad \ldots\ldots\ldots (816)$$

Но въ началѣ движенія скорость была равна нулю, такъ какъ мы пустили точку двигаться изъ положенія m_0, не толкая ея. Слѣдовательно $v_0 = 0$. Поэтому (816) принимаетъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\,(z - z_0);$$

или:

$$v^2 = 2g\,(z - z_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (817)$$

Назовемъ φ уголъ, составляемый маятникомъ съ осью z въ какой-нибудь моментъ движенія. Начальную величину этого угла назовемъ α. Точку m_0 (начальное положеніе точки m) примемъ за *начало* дугъ (отъ нея будемъ отсчитывать дуги, проходимыя точкою m). Дуга равна, какъ извѣстно, произведенію радіуса на уголъ. Слѣдовательно:

$$s = l\,(\alpha - \varphi),\quad v = \frac{ds}{dt} = -l\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Вставляя эту величину v въ (817), получимъ:

$$l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g\,(z - z_0) = 2gl\,(\cos\varphi - \cos\alpha) \quad \ldots\ldots (818)$$

Во время перваго колебанія маятника φ уменьшается, поэтому $\frac{d\varphi}{dt}$ отрицательно. Слѣдовательно изъ (818) получимъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}\,.$$

Отсюда:

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}} \quad \ldots\ldots\ldots (819)$$

Это уравненіе интегрируется только при помощи эллиптическихъ функцій. Мы его проинтегрируемъ приблизительно, при помощи разложенія въ рядъ, слѣдующимъ образомъ. Разложимъ $\cos\varphi$ и $\cos\alpha$ по формулѣ (292). Получимъ:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (820)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (821)$$

Подставляя эти величины, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,(cos\,\varphi - cos\,\alpha)}} = [2\,(cos\,\varphi - cos\,\alpha)]^{-\frac{1}{2}} = \left(2 - \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{12} - 2 + \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\varphi^2 + \frac{\varphi^4}{12} + \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{12}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{12} + \frac{\alpha^2\varphi^2}{12} - \frac{\alpha^2\varphi^2}{12} + \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\alpha^2\left(1 - \frac{\alpha^2+\varphi^2}{12}\right) - \varphi^2\left(1 - \frac{\alpha^2+\varphi^2}{12}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = (\alpha^2 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\alpha^2-\varphi^2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Разложивъ величину $\left(1 - \frac{\alpha^2+\varphi^2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$ по биному Ньютона и, разсматривая только малыя колебанія маятника, мы можемъ въ этомъ разложеніи отбросить, по ихъ малости, члены четвертаго и высшихъ порядковъ и получить:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,(cos\,\varphi - cos\,\alpha)}} = (\alpha^2 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\alpha^2+\varphi^2}{24}\right).$$

Подставляя эту величину въ (819), получимъ:

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\left(1 + \frac{\alpha^2+\varphi^2}{24}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}\,d\varphi;$$

или:

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\sqrt{\alpha^2-\varphi^2}}{24}\,d\varphi.$$

Интегрируя по формуламъ [3] и [4] параграфа 270-го, получимъ:

$$t + const = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) arc\,cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)$$

$$+ \frac{1}{48}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\varphi\sqrt{\alpha^2-\varphi^2} - \alpha^2\,.\,arc\,cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)\right].$$

При $t = 0$ уголъ $\varphi = \alpha$. Слѣдовательно $const = 0$. Поэтому:

$$t = \frac{1}{48}\sqrt{\frac{l}{g}}\,.\,\varphi\sqrt{\alpha^2-\varphi^2} + \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) arc\,cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) \quad (822)$$

Для опредѣленія продолжительности колебанія, въ теченіе котораго уголъ φ измѣняется отъ α до $(-\alpha)$, надо въ (822) положить $\varphi = (-\alpha)$. Называя продолжительность колебанія чрезъ T, получимъ изъ (822):

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad (823)$$

Пренебрегая даже и второю степенью отъ α, получимъ извѣстную изъ физики формулу:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (824)$$

Чѣмъ меньше размахи (амплитуда колебанія) маятника, тѣмъ точнѣе выражаютъ движеніе формулы (823) и (824). Чѣмъ тоньше и легче нить физическаго маятника и чѣмъ тяжеле и меньше по объему грузъ его, тѣмъ болѣе его можно разсматривать какъ маятникъ математическій и прилагать къ нему формулы (823) и (824).

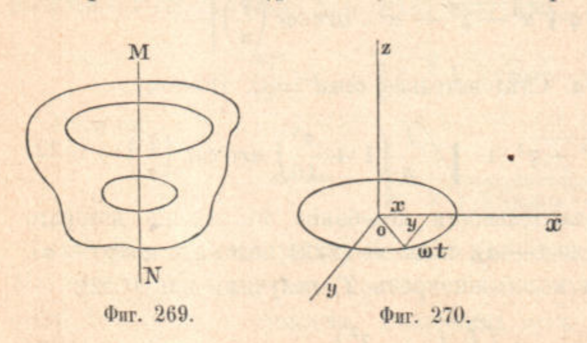
Такой простой инструментъ—какъ маятникъ—оказался неоцѣнимымъ орудіемъ въ рукахъ ученыхъ: помощью его опредѣлены были законы тяжести; Гюйгенсъ устроилъ помощью его часы (до Гюйгенса время измѣряли песочными часами и водяными «клепсидрами»); помощью маятника была точно опредѣлена фигура земли. Кавендишъ, сравнивая вліяніе тяжести на колебаніе маятника съ вліяніемъ на него притяженія, оказываемаго массивными свинцовыми шарами, опредѣлилъ плотность земли, по которой не трудно было, зная объемъ земного шара, опредѣлить его вѣсъ. Такимъ образомъ небольшой маятниковый снарядъ Кавендиша можно назвать вѣсами, на которыхъ взвѣшенъ былъ земной шаръ.

Движеніе физическаго маятника (имѣющаго массивный стержень) и вообще движеніе твердаго тѣла, требуетъ, для своего изслѣдованія, какъ мы сейчасъ увидимъ, знакомства съ нѣкоторою величиною, называемою *моментомъ инерціи*, съ которымъ мы познакомимся въ § 401.

Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси.

§ 400. Твердымъ тѣломъ, или *неизмѣняемою системою*, въ механикѣ называется такая система точекъ, въ которой взаимныя разстоянія между точками не мѣняются.

Твердое тѣло можетъ равномѣрно вращаться около нѣкоторой оси. Это значитъ, что каждая точка твердаго тѣла можетъ совершать равномѣрное движеніе по окружности, лежащей въ плоскости перпендикулярной къ оси вращенія MN (фиг. 269). Назовемъ чрезъ ω уголъ, на который повертывается радіусъ какой-нибудь точки (перпендикуляръ опущенный изъ нея на ось MN) около оси MN въ 1 времени. Этотъ уголъ называется *угловою скоростью* или скоростью вращенія. Очевидно, что радіусы всѣхъ точекъ тѣла повертываются на одинъ и тотъ же уголъ, такъ что ω есть угловая скорость всѣхъ точекъ тѣла — угловая скорость всего тѣла.



Фиг. 269. Фиг. 270.

Примемъ ось вращенія за ось z и проведемъ ось x чрезъ начальное положеніе одной изъ точекъ вращающагося тѣла, плоскость окружности, описываемой этою точкою, примемъ за плоскость (x, y). Въ единицу вре-

мени радіусъ точно отклоняется отъ оси x на уголъ ω; въ теченіи времени t онъ отклонится на уголъ ωt. Изъ чертежа видно, что:

$$x = r \, . \, cos \, (\omega t)$$

$$y = r \, . \, sin \, (\omega t)$$

$$z = 0.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{dt} = - r \, . \, sin \, (\omega t) \, . \, \omega$$

$$\frac{dy}{dt} = r \, . \, cos \, (\omega t) \, . \, \omega$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

По (706):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Слѣдовательно въ нашемъ случаѣ:

$$v = \sqrt{r^2 \, . \, sin^2 \, (\omega t) \, . \, \omega^2 + r^2 \, . \, cos^2 \, (\omega t) \, . \, \omega^2} = \omega r \sqrt{sin^2 \, (\omega t) + cos^2 \, (\omega t)} \, .$$

Но сумма квадратовъ синуса и косинуса = 1. Слѣдовательно:

$$v = \omega r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (825)$$

Итакъ, въ равномѣрномъ вращеніи *линейная скорость* v каждой точки тѣла равна произведенію угловой скорости на радіусъ точки: чѣмъ далѣе отстоитъ точка отъ оси вращенія, тѣмъ болѣе ея линейная скорость.

Моментъ инерціи.

§ 401. Опредѣлимъ живую силу T твердаго тѣла, равномѣрно вращающагося около неподвижной точки. По самому опредѣленію живой силы имѣемъ:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Вставляя сюда, вмѣсто v, его величину изъ (825), получимъ:

$$T = \sum \frac{m}{2} \omega^2 r^2.$$

Здѣсь ω и $\frac{1}{2}$ суть величины постоянныя, которыя при сложеніи можно вывести за скобки, и слѣдовательно можно вывести за знакъ $\sum$. Получимъ

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (826)$$

Здѣсь для каждой точки тѣла имѣется свое m и свое r. Оказывается, что живая сила T твердаго тѣла, равномѣрно вращающагося около нѣко-

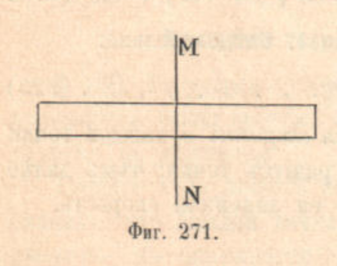
торой неподвижной оси, пропорціональна квадрату ω^2 угловой скорости ω, и пропорціональна величинѣ $\sum mr^2$. Эта величина называется *моментомъ инерціи* тѣла относительно оси MN. Мы будемъ обозначать моментъ инерціи буквою J. Итакъ:

$$T = J\,\frac{\omega^2}{2} \qquad (827)$$

при равномѣрномъ вращеніи тѣла.

Изъ интеграла живыхъ силъ извѣстно, что работа можетъ быть превращена въ живую силу, и обратно: живая сила можетъ превратиться въ работу. Слѣдовательно, если, какъ мы видѣли, живая сила вращающагося тѣла пропорціональна моменту инерціи, то тѣлу тѣмъ труднѣе сообщить вращеніе съ опредѣленною скоростью ω, чѣмъ больше его моментъ инерціи относительно оси вращенія, и наоборотъ: тѣмъ труднѣе остановить вращающееся съ опредѣленною скоростью тѣло, чѣмъ больше его моментъ инерціи.

Но моментъ инерціи зависитъ отъ того, около какой оси будемъ вращать тѣло: моментъ инерціи бревна относительно поперечной оси MN (фиг. 271) больше момента инерціи того же бревна относительно продольной оси $M'N'$ (фиг. 272), потому что отъ продольной оси всѣ точки бревна не далеко отстоятъ: всѣ r не велики; тогда какъ отъ поперечной оси крайнія точки бревна и ближайшія къ нимъ отстоятъ далеко, такъ что моментъ инерціи $\sum mr^2$ относительно продольной оси менѣе, чѣмъ относительно поперечной.



Фиг. 271.



Фиг. 272.

Значеніе момента инерціи можно испытать, такъ сказать, на себѣ при помощи слѣдующаго опыта. Надо взять длинную и довольно тяжелую жердь поперекъ и вращаться держа ее въ горизонтальномъ положеніи, а потомъ перевернуть ее въ вертикальное положеніе и опять вращаться, держа ее въ этомъ положеніи. Въ первомъ случаѣ моментъ инерціи жерди около поперечной оси—большой, а потому ее трудно повернуть и, начавъ вращаться съ нею, трудно остановиться. Во второмъ случаѣ моментъ инерціи жерди около продольной оси—малъ, и потому привести свое тѣло во вращеніе съ вертикальною жердою легче и остановиться легче. Иногда простонародье употребляетъ для выраженія этого понятія слово «махъ».

Въ механикѣ дается точное опредѣленіе: *моментъ инерціи тѣла относительно данной оси равенъ суммѣ произведеній массъ, составляющихъ его точекъ на ихъ разстоянія отъ оси вращенія.*

Какъ же вычислить моментъ инерціи тѣла относительно данной оси, когда въ тѣлѣ безконечное множество точекъ?—Помощью интегральнаго

исчисленія, дающаго суммы безконечно большаго числа безконечно малыхъ элементовъ. Мы это покажемъ на примѣрѣ.

Моментъ инерціи параллелепипеда.

§ 402. Опредѣлимъ моментъ инерціи параллелепипеда, имѣющаго измѣренія a, b, c, относительно оси Z, проходящей чрезъ его центръ и параллельной его четыремъ ребрамъ (фиг. 273).

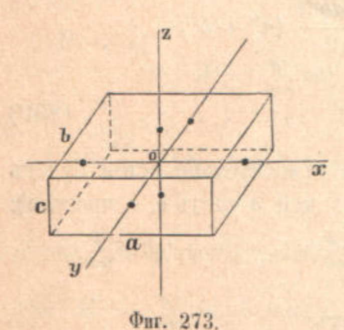
Назовемъ плотность параллелепипеда чрезъ p. Масса равна объему, помноженному на плотность; поэтому масса m безконечно малаго параллелепипеда ограниченнаго плоскостями параллельными плоскостямъ координатъ и имѣющаго объемъ $dx\,dy\,dz$, будетъ $p\,dx\,dy\,dz$. Разстояніе его отъ оси z будетъ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Слѣдовательно моментъ инерціи будетъ:

$$J = \sum mr^2 = \int\int\int p\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$$

Здѣсь суммированіе производится слѣдующимъ образомъ: суммируемъ объемы $dx\,dy\,dz$ отъ нижней плоскости до верхней значитъ интеграцію по Z производимъ въ предѣлахъ отъ $-\frac{c}{2}$ до $+\frac{c}{2}$. Полученный столбикъ (фиг. 274) суммируемъ отъ задней грани до передней, интегрируя по y въ предѣлахъ отъ $\left(-\frac{b}{2}\right)$ до $\frac{b}{2}$. Полученную пластинку (фиг. 275) суммируемъ отъ лѣвой грани до правой, интегрируя по x въ предѣлахъ отъ $-\frac{a}{2}$ до $+\frac{a}{2}$. Получимъ:



Фиг. 273.

Фиг. 274.

Фиг. 275.

$$J = p\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= p\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}x^2\,dx\,dy\,dz + p\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}y^2\,dx\,dy\,dz \quad . \; . \; . \; (829)$$

Вычисляемъ:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} x^2\,dx\,dy\,dz = c^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2\,dx\,dy$$

$$= bc\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx = bc\left(\frac{a^3}{8\,.\,3} + \frac{a^3}{8\,.\,3}\right) = \frac{a^3bc}{12}$$

Вычисляемъ:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} y^2\,dx\,dy\,dz = c\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{b^3}{12}\,c\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx = \frac{ab^3c}{12}$$

Вставляя найденныя величины интеграловъ въ (829), получимъ:

$$J = p\,\frac{a^3bc}{12} + p\,\frac{ab^3c}{12} = \frac{p\,(abc)}{12}\,(a^2+b^2)$$

Итакъ:

$$J = \frac{pabc}{12}\,(a^2+b^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (830)$$

Моментъ инерціи того-же параллелепипеда относительно оси x будетъ (какъ не трудно видѣть изъ (830) замѣняя въ ней a чрезъ c, c чрезъ a):

$$\frac{pabc}{12}\,(c^2+b^2)$$

Моментъ инерціи относительно оси y будетъ:

$$\frac{pabc}{12}\,(c^2+a^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (831)$$

Положимъ, что имѣемъ брусъ квадратнаго сѣченія, длина котораго въ 10 разъ болѣе толщины, такъ что $a = b$; $c = 10\,a$. По формулѣ (830) получимъ:

Моментъ инерціи относительно продольной оси C равенъ

$$\frac{pabc}{12}\,(a^2+b^2) = \frac{pa^3\,.\,10}{12}\,2\,a^2 = \frac{5\,pa^5}{3} = \frac{20\,pa^5}{12}$$

По формулѣ (831):

Моментъ инерціи относительно поперечной оси B равенъ

$$\frac{pabc}{12}\,(c^2+a^2) = \frac{pa^3\,10}{12}\,(100\,a^2+a^2) = \frac{101\,pa^5}{12}$$

Оказывается, что, при такихъ размѣрахъ моментъ инерціи относительно поперечной оси $\frac{101\,pa^5}{12}$ почти въ 5 разъ болѣе момента инерціи $\frac{20pa^5}{12}$ относительно продольной оси параллелепипеда.

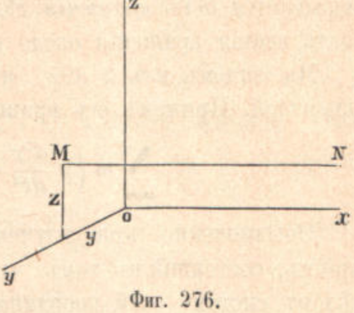
Сравненіе моментовъ инерціи относительно параллельныхъ осей.

§ 403. Примемъ центръ инерціи тѣла за начало координатъ. Опредѣлимъ моментъ инерціи J относительно оси x. Разстояніе какой либо точки системы отъ оси x будетъ:

$$\sqrt{y^2 + z^2}$$

Слѣдовательно:

$$J = \sum mr^2 = \sum m\,(y^2 + z^2)$$



Фиг. 276.

Опредѣлимъ моментъ инерціи J' относительно оси MN (фиг. 276) параллельной оси x. Обозначимъ чрезъ (y', z') координаты точки пересѣченія оси MN съ плоскостью (y, z). Разстояніе r' какой нибудь точки системы отъ оси MN будетъ:

$$r_1 = \sqrt{(y - y')^2 + (z - z)^2}$$

Поэтому:

$$J' = \sum mr'^2 = \sum m\,[(y - y')^2 + (z - z')^2]$$

или:

$$J' = \sum m\,(y^2 + z^2) - 2\,y' \sum my - 2\,z' \sum mz + (y'^2 + z'^2) \sum m;$$

или:

$$J' = \sum m\,(y^2 + z^2) - 2y' \sum my - 2z' \sum mz + (y'^2 + z'^2)\,M. \quad . \quad . \quad (833)$$

гдѣ $M = \sum m =$ масса всего тѣла.

Вычтя (832) изъ (833) и замѣчая, что при началѣ въ центрѣ инерціи: $\sum my = \sum mz = 0$, получимъ:

$$J' - J = (y'^2 + z'^2)\,M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (834)$$

Но $y'^2 + z'^2$ равно квадрату разстоянія между осями x и MN; назовемъ это разстояніе чрезъ R, такъ что: $y'^2 + z'^2 = R^2$; тогда (834) преобразуется въ:

$$J' = J + M \cdot R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (835)$$

Моментъ инерціи около какой нибудь оси MN равенъ суммѣ, составленной изъ момента инерціи около оси, проходящей чрезъ центръ инерціи параллельно MN и изъ произведенія MR^2 массы на квадратъ разстоянія между этими осями.

Отсюда вытекаетъ: 1) моментъ инерціи относительно оси проходящей чрезъ центръ инерціи есть наименьшій изъ моментовъ инерціи относи-

тельно осей взаимно параллельныхъ. 2) моменты инерціи относительно взаимно параллельныхъ осей, равноотстоящихъ отъ центра инерціи равны между собою.

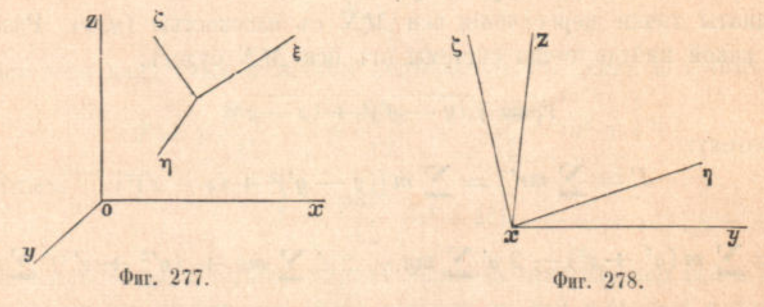
Вращеніе твердаго тѣла около оси.

§ 404. Если въ твердомъ тѣлѣ неподвижны двѣ изъ его точекъ, то, благодаря этому, должны оказаться неподвижными всѣ точки, лежащія на прямой, соединяющей двѣ неподвижныя точки; такая неподвижная прямая называется *осью вращенія* тѣла. Тѣло въ такомъ случаѣ способно совершать всякія вращенія около неподвижной оси.

Мы знаемъ изъ § 395, что для такого тѣла примѣнимъ интегралъ площадей. Примемъ ось вращенія за ось x. Тогда по (806) имѣемъ:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum (yZ - zY) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (836)$$

Обыкновенно при изученіи движеніи твердаго тѣла употребляютъ пріемъ, состоящій въ томъ, что воображаютъ неизмѣняемо соединенную съ тѣломъ систему осей координатъ (ξ, η, ζ) (фиг. 277) и изучаютъ движе-



Фиг. 277. Фиг. 278.

ніе этой системы осей относительно неподвижной системы осей (x, y, z). Такой пріемъ мы употребимъ и въ настоящемъ случаѣ. Примемъ ось вращенія тѣла за ось ξ. начало координатъ (ξ, η, ζ), соединенныхъ съ тѣломъ, возьмемъ въ началѣ неподвижныхъ координатъ (фиг. 278). Ось x примемъ совпадающею съ осью вращенія ξ, благо ось вращенія неподвижна. Назовемъ θ уголъ, составляемый осями y и η. На чертежѣ (фиг. 279) оси x и ξ проектируются въ одну точку O. Оси η и ζ подвижны (вращаются около оси x). Оси y и z неподвижны. Изъ формулъ преобразованія координатъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta\cos\theta - \zeta\sin\theta \\ z &= \eta\sin\theta + \zeta\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (837)$$

Отсюда вычисляемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -(\eta\sin\theta + \zeta\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= (\eta\cos\theta - \zeta\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (838)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= -(\eta \sin\theta + \zeta\cos\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\eta\cos\theta - \zeta\sin\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= (\eta\cos\theta - \zeta\sin\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\eta\sin\theta + \zeta\cos\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\end{aligned}\right\} \quad . . (839)$$

Подставляя эти величины въ первую часть уравненія (836), видимъ, что онъ преобразовывается такъ:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum m(\eta^2 + \zeta^2)\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad . \; . \; . \; . \; (840)$$

Но $\sqrt{\eta^2 + z^2}$ есть разстояніе какой нибудь точки (η, ζ) тѣла отъ оси вращенія. Слѣдовательно $\sum m(\eta^2 + \zeta^2)$ = моменту инерціи тѣла относительно оси вращенія. Обозначимъ его чрезъ J. Тогда (840) дастъ:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = J\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (841)$$

Подставляя эту величину въ (836), получимъ:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum(yZ - zY) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (842)$$

Вторая часть этого уравненія вращенія около оси x преобразуется въ каждомъ частномъ случаѣ особо, смотря по тому, какія силы дѣйствуютъ на тѣло. Приложимъ это уравненіе къ слѣдующему частному случаю.

Сложный маятникъ.

§ 405. Изучимъ движеніе твердаго тѣла около горизонтальной оси подъ дѣйствіемъ тяжести. Тѣло, совершающее колебанія около горизонтальной оси, носитъ названіе физическаго или сложнаго маятника.

Возьмемъ ось z по направленію тяжести, (фиг. 279). На каждую точку массы m дѣйствуетъ сила тяжести mg. Слѣдовательно:

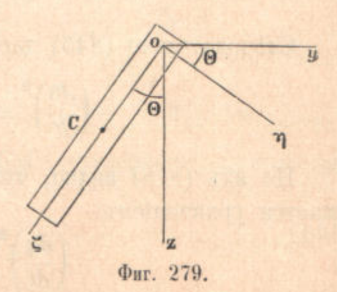
$$\begin{aligned}\sum m(Zy - zY) &= \sum mgy = \sum mg(\eta\cos\theta - \zeta\sin\theta) \\ &= g\cos\theta\sum m\eta - g\sin\theta\sum m\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (843)\end{aligned}$$

Если возьмемъ ось ζ такъ, чтобы она проходила чрезъ центръ тяжести, то по (783):

$$\sum m\eta = 0; \; \sum m\zeta = M\bar{\zeta},$$

гдѣ: $\bar{\zeta} = 0c$ = разстоянію центра тяжести отъ оси вращенія. Такимъ образомъ (843) приметъ видъ:

$$\sum m(Zy - zY) = -Mg\bar{\zeta}\,.\sin\theta$$



Фиг. 279.

Вотъ какъ въ данномъ случаѣ преобразовалась правая часть уравне-

нія (842); такъ что это уравненіе приметъ видъ:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = - Mg\bar{\zeta} . \sin\theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (844)$$

Замѣтимъ, что

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = - \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}$$

вслѣдствіе этого (844) можно представить такъ:

$$J\frac{d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = + Mg\bar{\zeta}\frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\frac{d\cos\theta}{dt};$$

или:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{Mg\bar{\zeta}}{J} d\cos\theta$$

Отсюда:

$$\int\left(\frac{d\theta}{dt}\right) d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{Mg\bar{\zeta}}{J}\int d\cos\theta,$$

откуда:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\,Mg\bar{\zeta}}{J}\cos\theta + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (845)$$

Принимая начальную скорость $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ равною нулю и называя начальный уголъ θ чрезъ α, имѣемъ изъ (845)

$$0 = \frac{2\,Mg\bar{\zeta}}{J}\cos\alpha + C,$$

откуда:

$$C = -\frac{2\,Mg\bar{\zeta}}{J}\cos\alpha$$

Слѣдовательно (845) даетъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\,Mg\bar{\zeta}}{J}(\cos\theta - \cos\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (846)$$

Но изъ (818) видно, что движеніе математическаго маятника выражается уравненіемъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (847)$$

Сравнивая (846) съ (847) видимъ, что сложный маятникъ движется

такъ, какъ математическій, имѣющій длину l, опредѣляемую изъ уравненія

$$\frac{Mg\bar{\zeta}}{J} = \frac{g}{l}$$

откуда:

$$l = \frac{J}{M\bar{\zeta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (848)$$

Эта формула показываетъ, что *сложный маятникъ, имѣющій массу M, моментъ инерціи около оси вращенія J, разстояніе центра тяжести отъ оси вращенія $\bar{\zeta}$, движется какъ математическій, длина котораго l равна:*

$$\frac{J}{M\bar{\zeta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (849)$$

Центръ качанія.

§ 406. Проведемъ чрезъ центръ тяжести сложнаго маятника ось параллельную его оси вращенья (оси подвѣса) и обозначимъ чрезъ $\bar{J}$ моментъ инерціи относительно этой оси. По формулѣ (835) имѣемъ:

$$J = \bar{J} + M\bar{\zeta}^2$$

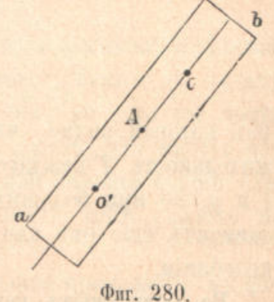
Вставляя эту величину вмѣсто J въ (848), получимъ:

$$l = \frac{\bar{J} + M\bar{\zeta}^2}{M\bar{\zeta}} = \frac{\bar{J}}{M\bar{\zeta}} + \bar{\zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (850)$$

Отложимъ на оси ζ (фиг. 280) отъ точки C, лежащей на оси подвѣса, длину l до точки O'. По сказанному въ предыдущемъ параграфѣ сложный маятникъ колеблется такъ, какъ математическій, имѣющій длину $l = CO'$, такъ что дѣло происходитъ такъ, какъ будто вся масса сложнаго маятника была сосредоточена въ O'. Эта точка O' называется *центромъ качанія*; точка же C называется *центромъ подвѣса*.

Оказывается, это эти центры взаимны. А именно: если O' сдѣлать центромъ подвѣса, то C будетъ центръ качанія. Это вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. По (850).

$$CO' = \frac{\bar{J}}{M\bar{\zeta}} + \bar{\zeta}$$



Фиг. 280.

Но буквою $\bar{\zeta}$ мы назвали разстояніе CA (координату центра тяжести A), такъ что:

$$CA = \bar{\zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (851)$$

Слѣдовательно:

$$CA = CO' - CA = \frac{\bar{J}}{M\bar{\zeta}} + \bar{\zeta} - \bar{\zeta} = \frac{\bar{J}}{M\bar{\zeta}} \quad . \; . \; . \; . \; (852)$$

Изъ (851) и (852), слѣдуетъ:

$$CA \cdot O'A = \frac{\overline{J}}{M} = \text{постоянная величина} \quad \ldots \quad (853)$$

Вычислимъ теперь какой длины l' долженъ быть математическій маятникъ, колеблющійся такъ же, какъ тѣло ab (фиг. 280), если его подвѣсить за ось проходящую чрезъ O' параллельно съ первоначальною осью подвѣса. По (850):

$$l' = \frac{\overline{J}}{M \cdot O'A} + O'A \quad \ldots \quad (854)$$

Изъ (853) имѣемъ:

$$O'A = \frac{\overline{J}}{M \cdot CA}.$$

Подставляя въ (854), получимъ:

$$l' = \frac{\overline{J}}{M \cdot \frac{\overline{J}}{M \cdot CA}} + \frac{\overline{J}}{M \cdot CA} = CA + \frac{\overline{J}}{M \cdot CA} = \zeta + \frac{\overline{J}}{M\zeta}$$

Сравнивая съ (850), видимъ, что

$$l' = l$$

Слѣдовательно, если O' принять за центръ подвѣса, то C будетъ центромъ качанія; что и требовалось доказать.

Циклоидальный маятникъ.

§ 407. Въ подробныхъ курсахъ изслѣдуется движеніе тяжелой точки по циклоидѣ. Мы видѣли, что продолжительность колебанія маятника, т. е. точки, двигающейся по дугѣ окружности, выражается формулою (823).

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right), \quad \ldots \quad (823)$$

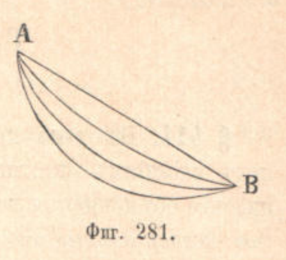
изъ которой видно, что только при весьма малыхъ колебаніяхъ продолжительность T каждаго колебанія можно считать зависящею только отъ l и g, но при большихъ колебаніяхъ продолжительность каждаго изъ нихъ зависитъ еще отъ входящаго въ формулу (823) угла α — отъ величины колебанія.

Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что, какъ это было замѣчено Гюйгенсомъ, точка движущаяся по циклоидѣ совершаетъ колебанія, продолжительность которыхъ не зависитъ отъ ихъ величины.

Брахистохрона.

§ 408. Другое интересное свойство циклоиды, доказываемое въ подробныхъ курсахъ, заключается въ слѣдующемъ. Представимъ себѣ (фиг. 281)

двѣ точки A и B, при чемъ A лежитъ на бо̀льшей высотѣ чѣмъ B, но не на одной съ нею вертикали; если устраивать различные пути отъ A до B: прямолинейный и разные криволинейные и пускать по этимъ путямъ тяжелую точку скользить подъ вліяніемъ тяжести, то въ кратчайшее время тяжелая точка придетъ изъ A въ B по циклоидѣ. Поэтому циклоиду называютъ «брахистохроной», то есть кривою наикратчайшаго времени.



Фиг. 281.

Равновѣсіе какъ частный случай движенія.

§ 409. Изъ общаго уравненія движенія (773) выводится и общее уравненіе равновѣсія. Дѣйствительно при равновѣсіи никакого движенія не происходитъ, такъ что всѣ ускоренія $\frac{d^2x}{dt^2}$; $\frac{d^2y}{dt^2}$; $\frac{d^2z}{dt^2}$ равны нулю и уравненіе (773) обращается въ:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (855)$$

Отдѣлы раціональной механики.

§ 410. Обыкновенно въ подробныхъ курсахъ теорія равновѣсія излагается отдѣльно и называется *Статикою*. Точно также отдѣльно излагается теорія движенія, не принимающая въ расчетъ силъ, а занимающаяся тольно соотношеніями между скоростями, ускореніями и положеніемъ точекъ.

Эта часть механики называется *Кинематикою*; она сводится къ разсмотрѣнію соотношеній между координатами и временемъ. Наконецъ тотъ отдѣлъ механики, который разсматриваетъ движеніе какъ произведенное силами называется *Кинетикою*.

Въ нашемъ бѣгломъ обзорѣ важнѣйшихъ формулъ и законовъ механики мы не придерживались разграниченій механики по отдѣламъ въ видахъ большей быстроты изложенія и избѣжанія повтореній; но зато мы почти не коснулись статическихъ задачъ. Надо правду сказать, что многія изъ задачъ статики рѣшаются элементарнымъ путемъ при помощи теоріи сложенія силъ и паръ. Нашею же цѣлью мы поставили себѣ указать на приложеніе Анализа къ механикѣ.

Однако одна изъ главъ статики, имѣющая большое приложеніе въ физикѣ и знакомящая съ теоремами, часто встрѣчающимися и въ другихъ отдѣлахъ механики, требуетъ широкаго примѣненія Анализа—это ученіе о притяженіи.

Съ этимъ ученіемъ мы считаемъ долгомъ познакомить читателя.

ГЛАВА III.

Теорія притяженія.

Ньютоніанское притяженіе.

§ 411. Ньютонъ показалъ, что планеты движутся по своимъ орбитамъ подъ вліяніямъ притяженія къ солнцу. Оказалось, что и многія другія явленія объясняются взаимнымъ притяженіемъ частицъ матеріи по закону: *двѣ матеріальныя точки притягиваются взаимно съ силою обратно пропорціональною квадрату ихъ взаимнаго разстоянія и прямо пропорціональною ихъ массамъ,* такъ что если обозначимъ чрезъ m и m' массы двухъ точекъ и чрезъ r ихъ взаимное разстояніе, то сила притяженія, оказываемая одною изъ этихъ точекъ на другую, будетъ равна:

$$-\frac{kmm'}{r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (856)$$

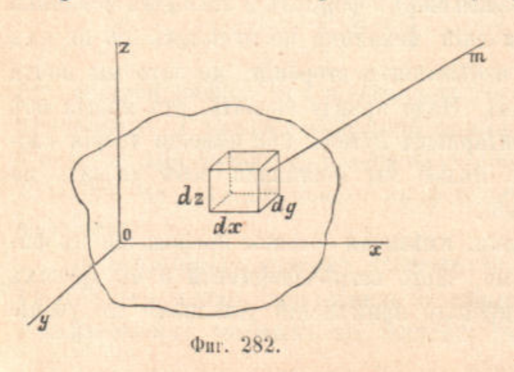
гдѣ k есть нѣкоторый коэффиціентъ пропорціональности.

Теорія притяженія изучаетъ, какимъ образомъ притягивается по этому закону точка собраніемъ другихъ точекъ, напримѣръ тѣломъ.

Въ механикѣ разсматриваются и другія притягательныя силы, напримѣръ пропорціональныя разстояніямъ или пропорціональныя какимъ-нибудь другимъ степенямъ разстоянія и проч. Но изо всѣхъ притягательныхъ силъ наиболѣе интересны силы, дѣйствующія по закону пропорціональности массамъ и обратной пропорціональности квадратамъ разстояній, потому что таково всемірное тяготѣніе небесныхъ свѣтилъ другъ къ другу и таковы электрическія и магнитныя притяженія. Эти притяженія называются ньютоніанскими.

Проложенія притяженія на оси координатъ.

§ 412. Обозначимъ чрезъ m массу притягиваемой точки; обозначимъ чрезъ q притяженіе, оказываемое единицею массы на единицу массы на единицѣ разстоянія; обозначимъ чрезъ D плотность притягивающаго тѣла. Тогда масса безконечно малаго объема $dx\,dy\,dz$, составляющаго часть притягивающаго тѣла, будетъ $D\,dx\,dy\,dz$. Пусть a, b, c будутъ координаты притягиваемой точки (фиг. 282). Притяженіе, оказываемое элементомъ $dx\,dy\,dz$ на точку, будетъ равно:



Фиг. 282.

$$\frac{q\,D\,m\,dx\,dy\,dz}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}, \quad \ldots\ldots \quad (857)$$

гдѣ x, y, z суть координаты ближайшей къ началу координатъ вершины параллелепипеда $dx\,dy\,dz$ (фиг. 282). Назовемъ чрезъ r разстояніе точки m отъ элемента $dx\,dy\,dz$, такъ что:

$$r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{1/2}. \quad (858)$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ разстояніемъ съ осями координатъ, суть:

$$\frac{x-a}{r};\ \frac{x-b}{r};\ \frac{x-c}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (859)$$

По этому изъ (857) выводимъ слѣдующія выраженія для проложеній X, Y, Z на оси координатъ силы, съ которою элементъ $dx\,dy\,dz$ притягиваетъ точку m:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{qDm\,dx\,dy\,dz\,.\,(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} \\ Y &= \frac{qDm\,dx\,dy\,dz\,.\,(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} \\ Z &= \frac{qDm\,dx\,dy\,dz\ \ (z-c)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (860)$$

Чтобы получить величины A, B, C проложеній на оси полнаго притяженія, оказываемаго на точку m всѣмъ тѣломъ, нужно суммировать всѣ притяженія, оказываемыя всѣми элементами тѣла—нужно, другими словами, интегрировать тройными интегралами выраженія (860), распространяя интеграцію на весь объемъ притягивающаго тѣла. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int\int\int \frac{qDm\,(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\,dx\,dy\,dz \\ B &= \int\int\int \frac{qDm\,(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\,dx\,dy\,dz \\ C &= \int\int\int \frac{qDm\,(x-c)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots (861)$$

Если плотность D во всѣхъ точкахъ притягивающаго тѣла одинакова, то одинъ изъ интеграловъ каждаго трехкратнаго интегрированія вычисляется весьма просто. Возьмемъ, напримѣръ величину A въ (861):

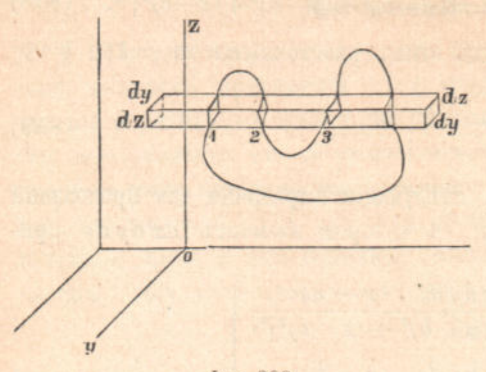
$$A = qDm \int\int\int \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz}{[(x-\alpha)^2+(y-b)^2+(z-\gamma)^2]^{3/2}}.$$

Извѣстно, что:

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} = \frac{-1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{1/2}}.$$

Предположимъ даже такой сложный случай, когда тѣло имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 283), такъ что параллелепипедъ, имѣю-

щій основаніе $dy\,dz$ и высоту параллельную оси x, пересѣкаетъ поверхность притягивающаго тѣла нѣсколько разъ въ элементахъ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Обозначимъ разстоянія этихъ поверхностныхъ элементовъ отъ притягиваемой точки чрезъ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6. Часть интеграла, относящаяся къ этому параллелепипеду, будетъ:



Фиг. 283.

$$dy\,dz\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}\right)\quad . \quad . \; (863)$$

Обозначая чрезъ $d\sigma'$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, $d\sigma_5$, $d\sigma_6$ вырѣзываемые параллелепипедомъ элементы поверхности притягивающаго тѣла, чрезъ N_1, N_2 ... нормали къ этимъ элементамъ и чреъ (N_1, x), (N_2, x) ... углы, образуемые *внѣшнею* частью нормали съ осью x, получимъ для величины (863) выраженіе:

$$-\frac{d\sigma_1}{r_1}\cos(N_1, x)-\frac{d\sigma_2}{r_2}\cos(N_2, x)-\frac{d\sigma_3}{r_3}\cos(N_3, x)-\frac{d\sigma_4}{r_4}\cos(N_4, x)$$

$$-\frac{d\sigma_5}{r_5}\cos(N_5, x)-\frac{d\sigma_6}{r_6}\cos(N_6, x)\,.$$

Вслѣдствіе этого получимъ:

$$A=-qDm\int\int\frac{d\sigma\,.\,\cos(N, x)}{r},\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; (864)$$

гдѣ r есть разстояніе элемента поверхности притягивающаго тѣла отъ притягиваемый точки, $d\sigma$—элементъ поверхности притягивающаго тѣла.

Такія же формулы получимъ для B и C. Итакъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A&=-qDm\int\int\frac{d\sigma\,.\,\cos(N, x)}{r}\\ B&=-qDm\int\int\frac{d\sigma\,.\,\cos(N, y)}{r}\\ C&=-qDm\int\int\frac{d\sigma\,.\,\cos(N, z)}{r}\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; (865)$$

Притяженіе, оказываемое шаромъ на внѣшнюю точку.

§ 413. Приложимъ выведенныя формулы къ опредѣленію притяженія, оказываемаго однороднымъ шаромъ, имѣющимъ радіусъ R, на точку m, находящуюся въ разстояніи a отъ центра шара (фиг. 284).

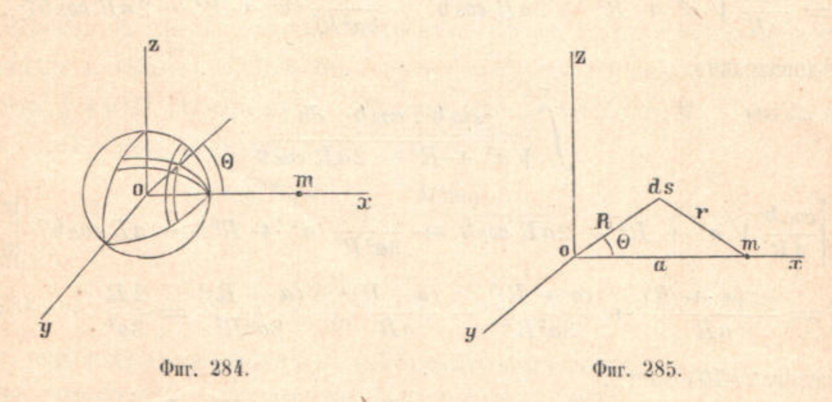
Примемъ прямую, соединяющую центръ шара съ точкою m, за ось x. Центръ шара примемъ за начало координатъ. Очевидно, что въ этомъ случаѣ $B = 0$, $C = 0$, и остается опредѣлить A по формулѣ:

$$A = -qDm \int\int \frac{d\sigma \, . \, cos\,(N, x)}{r}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (866)$$

гдѣ r есть разстояніе элемента $d\sigma$ поверхности шара отъ m.

Примемъ ось x за полярную ось (фиг. 284).

За элементъ $d\sigma$ поверхности шара можно принять весьма малый прямоугольникъ ограниченный двумя сосѣдними меридіанами и двумя сосѣдними параллелями. Назовемъ θ уголъ, составляемый радіусомъ, проведеннымъ въ этотъ элементъ, съ осью x. Обозначимъ чрезъ ψ долготу, принимая за первый меридіанъ плоскость (x, z). Одна сторона элемента $d\sigma$ будетъ дуга равная $Rd\theta$; другая его сторона будетъ дуга описанная ра-



Фиг. 284. Фиг. 285.

діусомъ $R\,sin\,\theta$ параллели, она будетъ равна $R\,sin\,\theta \, . \, d\psi$. Площадь элемента, принимаемаго за прямоугольникъ, будетъ $Rd\theta \, . \, R\,sin\,\theta \, . \, d\psi$; или:

$$d\sigma = R^2\,sin\,\theta\,d\theta\,d\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (867)$$

Не трудно видѣть, что $cos\,(N, x) = cos\,\theta$.

Вставляя эти величины въ (866), получимъ:

$$A = -qDm \int\int \frac{R^2\,sin\,\theta\,d\theta\,d\psi \, . \, cos\,\theta}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (868)$$

Интеграція по θ должна быть произведена въ предѣлахъ отъ 0 до π; интеграція по ψ должна быть произведена въ предѣлахъ отъ 0 до 2π: тогда вся поверхность сферы будетъ охвачена интегрированіемъ. Замѣтимъ, что изъ (фиг. 285) слѣдуетъ:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\,cos\,\theta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (869)$$

Вставляя эту величину въ (868), получимъ:

$$A = -qDm R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \, d\theta\, d\psi}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}}$$

$$= -2\pi qDm R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} \quad . \; . \; . \; . \; (870)$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int \frac{\sin\theta \,.\, \cos d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{aR}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$$

$$+ \frac{1}{aR}\int \sin\theta \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}\; d\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{aR}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta} - \frac{1}{3a^2R^2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}.$$

Слѣдовательно:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}}$$

$$= \left[\frac{\cos\theta}{aR}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta} + \frac{1}{3a^2R^2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-(a+R)}{aR} + \frac{(a+R)^3}{3a^2R^2} - \frac{(a-R)}{aR} - \frac{(a-R)^3}{3a^2R^2} = \frac{2R}{3a^2} \quad . \; . \; (871)$$

Поэтому (870) даетъ:

$$A = -2\pi qDm R^2 \frac{2R}{3a^2} = -\frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{} \frac{qDm}{a^2} \quad . \; . \; . \; (872)$$

Замѣтимъ, что здѣсь $\frac{3}{4}\pi R^3 . D$ есть масса притягивающаго шара, назовемъ ее M, тогда:

$$A = -\frac{q \,.\, Mm}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (873)$$

Сравнивая эту формулу съ (856) и припоминая, что a есть разстояніе притягиваемой точки отъ центра шара, заключаемъ, что: *шаръ притягиваетъ внѣшнюю точку такъ, какъ будто вся масса была сосредоточена въ центрѣ.*

Притяженіе шаромъ внутренней точки.

§ 414. Если притягиваемая точка лежитъ внутри шара (фиг. 286), то $a < R$, но разстояніе $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$ всегда считается положительнымъ. Значитъ въ этомъ случаѣ, при $\theta = 0$, мы должны положить $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos(0)} = R - a$, но не $a - R$, какъ прежде.

Такимъ образомъ (871) представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}}$$

$$= \left[\frac{\cos\theta}{aR}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta} + \frac{1}{3a^2R^2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{-(a+R)}{aR} + \frac{(a+R)^3}{3a^2R^2} - \frac{(R-a)}{aR} - \frac{(R-a)^3}{2a^2R^2} = \frac{2a}{3R^2}.$$

Поэтому (870) въ этомъ случаѣ дастъ:

$$A = -2\pi qDmR^2 \,.\, \frac{2a}{3R^2} = -\frac{4}{3}\pi qDma.$$

Итакъ, для внутренней точки:

$$A = -\frac{4}{3}\pi qDma \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (874)$$

Проведемъ чрезъ точку m внутреннюю сферу, радіусъ которой будетъ очевидно a. Объемъ этой сферы будетъ $\frac{4}{3}\pi a^3$; при плотности D масса ея будетъ $\frac{4}{3}\pi a^3 D$. Назовемъ ее M', такъ что $\frac{4}{3}\pi a^3 D = M'$. Замѣтимъ, что (874) можно написать такъ:

$$A = -\frac{4}{3}\frac{\pi a^3 Dqm}{a^2} = -\frac{M'mq}{a^2}.$$

Итакъ:

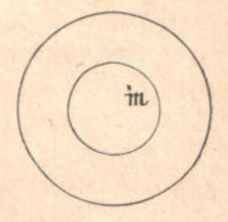
$$A = -\frac{qM'm}{a^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (875)$$

Фиг. 286.

Сравнивая это выраженіе съ (874) заключаетъ, что: *шаръ притягиваетъ внутреннюю точку такъ, какъ бы ее притягивалъ меньшій концентрическій шаръ, поверхность котораго проведена чрезъ притягиваемую точку* (фиг. 286), то есть: *какъ будто бы въ центръ была сосредоточена масса внутренняго шара.*

Притяженіе точки, лежащей внутри сферическаго слоя, этимъ слоемъ.

§ 415. Теперь легко опредѣлить, съ какою силою слой, заключенный между двумя концентрическими сферами, притягиваетъ лежащую внутри его точку (фиг. 287). Назовемъ R_2 радіусъ внѣшней сферы, R_1 радіусъ внутренней сферы. Притяженіе оказываемое слоемъ на точку очевидно равно разности, получаемой отъ вычитанія притяженія, оказываемаго сферою R_1, изъ притяженія, оказываемаго сферою R_2; но, по предыдущему параграфу, оба эти притяженія одинаковы, такъ какъ каждое изъ нихъ равно притяженію, оказываемому на точку сферою, радіусъ которой равенъ разстоянію точки m отъ центра. Если



Фиг. 287.

уменьшаемое и вычитаемое равны между собою, то разность равна нулю. Итакъ: *сферическій слой не притягиваетъ внутреннюю точку.*

Потенціалъ.

§ 416. Разсмотримъ выраженіе:

$$V = \int\int\int \frac{D\,dx\,dy\,dz}{r}$$

$$= \int\int\int \frac{D\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (876)$$

гдѣ r есть разстояніе притягиваемой точки (a, b, c) отъ элемента (x, y, z) притягивающаго тѣла. Этотъ интегралъ равенъ суммѣ безконечнаго числа членовъ: $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots$, гдѣ m_1, m_2, m_3 суть массы точекъ притягивающаго тѣла. Итакъ:

$$V = \int\int\int \frac{dm}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (877)$$

Предѣлы интеграціи здѣсь не зависятъ отъ (a, b, c), поэтому можно продифференцировать этотъ интегралъ по a, b, c, дифференцируя выраженіе $\frac{D}{r}$ подъ знакомъ интеграла. Получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dV}{da} &= \int\int\int \frac{D\,(x-a)\;dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} \\
\frac{dV}{db} &= \int\int\int \frac{D\,(y-b)\;dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}} \\
\frac{dV}{dc} &= \int\int\int \frac{D\,(z-c)\;dx\,dy\,dz}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (878)$$

Полагая въ (861) $q = 1$, что всегда мы можемъ сдѣлать, считая за единицу силы притяженіе, оказываемое единицею массы на другую единицу массы, расположенную отъ первой на единицѣ разстоянія, сравнимъ (878) съ (861). Изъ этого сравненія видимъ, что, если масса притягиваемой точки $m = 1$, то:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial a} &= A \\
\frac{\partial V}{\partial b} &= B \\
\frac{dV}{dc} &= C
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (879)$$

Эти уравненія показываютъ, что силы притяженія, оказываемыя точками притягивающаго тѣла на точку m, имѣютъ потенціалъ V, который

равенъ выраженію (876), если масса притягиваемой точки равна 1; если же масса ея m, то потенціалъ V' равенъ Vm.

Уравненіе Лапласа.

§ 417. Мы знаемъ, что:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\,.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 (z-c)^2}}\,.$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a} = \frac{x-a}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}}\,.$$

Далѣе по формулѣ $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ получимъ:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a^2} = \frac{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{1/2} - \frac{(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{1/2}}}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)}$$

$$= \frac{(x-a) + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}\,.$$

Точно также получимъ:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial b^2} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial c^2} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (z-c)^2}{[x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}\,.$$

Складывая эти вторыя производныя получимъ:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a^2} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial b^2} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial c^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (880)$$

Но по (877):

$$V = \iiint \frac{dm}{r}\,.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2}$$

$$= \iiint dm \left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial b^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial c^2}\right] = 0.$$

Итакъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (881)$$

Это уравненіе съ частными производными 2-го порядка есть знаменитое уравненіе Лапласа *). Оказывается, что потенціалъ внѣшней точки удовлетворяетъ уравненію Лапласа.

Уравненіе Пуассона.

§ 418. Для случая притяженія внутренней точки уравненіе, которому удовлетворяетъ потенціалъ V имѣетъ другой видъ. Выведемъ его. Принимая $q = 1$, получимъ изъ (874) для внутренней точки, притягиваемой шаромъ:

$$A = -\frac{4}{3}\pi D m a$$

Не трудно видѣть, что эта величина есть производная отъ функціи:

$$-\frac{2}{3}\pi D m a^2 + c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (882)$$

гдѣ c_1 есть произвольное постоянное интеграціи. Чтобы опредѣлить его, вычислимъ потенціалъ шара, который имѣется въ его центрѣ. Общая формула (877) потенціала такова:

$$\iiint \frac{dm}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (883)$$

Здѣсь тройной интегралъ показываетъ, что надо взять сумму элементовъ вида $\frac{dm}{r}$ и распространить ее на весь объемъ шара. Но вмѣсто этого можно взять объемъ слоя, содержащагося между сферою радіуса r и сферою радіуса $r + dr$; такой объемъ будетъ равенъ:

$$4\pi r^2 dr\,;$$

масса его будетъ:

$$4\pi r^2 D dr$$

Интегралъ (883) равенъ интегралу

$$\int_0^R \frac{4\pi r^2 D dr}{r}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (884)$$

взятому въ предѣлахъ отъ 0 до R при суммированіи всѣхъ концентрическихъ слоевъ, составляющихъ сферу радіуса R.

Выносся въ (884) постоянныя величины за знакъ интеграла, получимъ

---

*) Laplace знаменитый французскій математикъ, написавшій Небесную механику (Mécanique celeste) и установившій гипотезу о происхожденіи міра изъ однообразнаго вещества, распавшагося на отдѣльныя свѣтила и планеты.

для потенціала въ центрѣ величину:

$$4\pi D\int_0^R \frac{r^2 dr}{r}.$$

Это,—если сфера дѣйствуетъ на массу равную 1, находящуюся въ центрѣ; если же въ центрѣ находится масса m, то потенціалъ дѣйствія, оказываемаго на нее сферою, будетъ:

$$4\pi Dm\int_0^R \frac{r^2\,dr}{r} = 4\pi Dm\int_0^R r dr = 2\pi m DR^2 \quad . \quad . \qquad (885)$$

Мы видѣли въ (882), что потенціалъ сферы для внутренней точки (a, b, c) равенъ:

$$-\frac{2}{3}\pi Dma^2 + c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (886)$$

Теперь изъ (885) мы знаемъ, что въ центрѣ, слѣдовательно при $a^2 + b^2 + c^2$ равномъ нулю, (886) обращается въ $2\pi m DR^2$. Значитъ:

$$c_1 = 2\pi m DR^2$$

и потенціалъ (886) равенъ:

$$V^1 = -\frac{2}{3}\pi D m a^2 + 2\pi m DR^2;$$

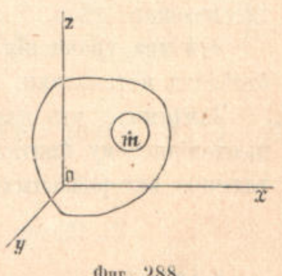
или:

$$M^1 = Dm\left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (887)$$

Теперь обратимся къ потенціалу V какого бы то ни было тѣла, относящагося въ притяженію этимъ тѣломъ точки, находящейся внутри тѣла.

Для этого окружимъ притягиваемую точку m (фиг. 288) весьма малою сферою радіуса ρ имѣющаго центръ въ притягиваемой точкѣ. Разобьемъ весь потенціалъ V притяженія, оказываемаго на точку m тѣломъ на два: V_2, относящійся къ притяженію точки m массою, заключенною въ описанной около m маленькой сферѣ радіуса ρ и V_1, относящійся къ притяженію точки m остальною частью тѣла, такъ что:

$$V = V_1 + V_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (888)$$



Фиг. 288.

По отношенію къ остальной части тѣла точка m внѣшняя; слѣдовательно къ потенціалу M_1 приложима формула (881), такъ что:

$$\frac{\partial^2 V'}{da^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial c^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (889)$$

Къ потенціалу же V_2 должна быть приложима формула (887), въ ко-

торой надо только замѣнить a^2 чрезъ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$; такъ что:

$$V_2 = D\left[2\pi\rho^2 - \frac{2}{3}\pi\left[(x-a)^2+(y-b)''+(z-c)^2\right]\right] \quad . \; . \; (890)$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = -\frac{4}{3}\pi(x-a)D; \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial a^2} = -\frac{4}{3}\pi D$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial b} = -\frac{4}{3}\pi(x-b)D; \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial b^2} = -\frac{4}{3}\pi D$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial c} = -\frac{4}{3}\pi(x-c)D; \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial c^2} = -\frac{4}{3}\pi D$$

Сложивъ вторыя производныя, получимъ:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = -4\pi D$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ (888) и (889) показываетъ, что:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = -4\pi D \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (891)$$

Это уравненіе (891) есть знаменитое уравненіе Пуассона *).

Основныя свойства потенціала.

§ 419. Итакъ основныя свойства потенціала силъ Ньютоніанскаго притяженія, оказываемаго притягивающимъ тѣломъ на точку, заключается въ томъ, что потенціалъ V долженъ удовлетворять уравненію (881) Лапласа, если притягиваемая точка находится внѣ притягиваемаго тѣла, и уравненію (891) Пуассона, если притягиваемая точка находится внутри притягивающаго тѣла.

Эти два уравненія играютъ чрезвычайно важную роль во многихъ отдѣлахъ математики, механики и физики.

Замѣтимъ, что излагаемая теорія притяженія относится ко всякому ньютоніанскому притяженію, слѣдовательно не только ко взаимному притяженію матерьяльныхъ массъ но и къ электричеству.

Сила въ данной точкѣ.

§ 420. Говоря о какомъ нибудь ньютоніанскомъ притяженіи, мы будемъ называть *силою въ данной точкѣ* равнодѣйствующую всѣхъ силъ притяженія, оказываемыхъ данными массами и дѣйствующихъ на единицу массы, помѣщенную въ данной точкѣ. Въ каждой точкѣ пространства равнодѣйствующая притяженій имѣетъ опредѣленную величину и направленіе.

---

*) Пуассонъ Poisson знаменитый французскій геометръ.

Силовыя линіи.

§ 421. *Силовою линіею* называется линія, проведенная такимъ образомъ, что она во всѣхъ точкахъ касательна къ соотвѣтствующимъ силамъ. Въ случаѣ притяженія, оказываемаго магнитомъ, силовыя линіи легко наблюдать, положивъ на магнитъ бумагу и посыпавъ ее желѣзными опилками: опилки располагаются по силовымъ линіямъ.

Поверхности уровня.

§ 422. Геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ потенціалъ силъ притяженія одинаковъ, называется *поверхностью уровня. Равнодѣйствующая притяженій въ каждой точкѣ поверхности уровня нормальна къ этой поверхности.* Дѣйствительно уравненіе поверхности уровня, по самому опредѣленію ея, таково:

$$V = const$$

По (394) углы составляемые нормалью къ поверхности (892) съ осями координатъ, имѣютъ такіе косинусы.

$$\cos(N, x) = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{X}{P}$$

$$\cos(N, y) = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{Y}{P}$$

$$\cos(N, z) = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{Z}{P},$$

гдѣ P есть равнодѣйствующая притяженій въ данной точкѣ; X, Y, Z ея проложенія на оси координатъ. Но:

$$\frac{X}{P} = \cos(P, x); \ \frac{Y}{P} = \cos(P, y); \ \frac{Z}{P} = \cos(P, z)$$

Слѣдовательно P и N составляютъ одинаковые углы съ осями, а такъ какъ они проходятъ чрезъ одну и ту же данную точку, то слѣдовательно совпадаютъ, что и требовалось доказать.

Случай одной притягивающей точки.

§ 423. Поверхности уровня, въ случаѣ существованія только одной притягивающей точки *m*, суть сферы, имѣющія центръ въ притягивающей

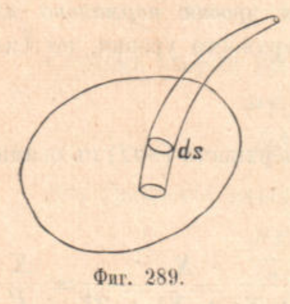
точкѣ, потому что по (883) потенціалъ для одной притягивающей точки есть $\frac{m}{r}$; такъ что уравненіе поверхности уровня таково:

$$V = \frac{m}{r} = const;$$

или:

$$r = \frac{m}{const}$$

Для каждаго *const.* получается своя сфера. Здѣсь силы, очевидно, направлены по радіусамъ этихъ сферъ, которые, какъ извѣстно, нормальны къ такимъ сферамъ.



Фиг. 289.

Силовыя трубки.

§ 424. Если вообразимъ себѣ элементъ поверхности уровня, ограниченный какою нибудь линіею (фиг. 289) и проведемъ чрезъ всѣ точки контура этого элемента ds силовыя линіи, то они составятъ *силовую* трубку.

Силовой потокъ.

§ 425. Если P есть равнодѣйствующая притяженій въ безконечно маломъ элементѣ ds какой нибудь поверхности, то произведеніе:

$$Pds \cdot \cos(P, N)$$

элемента ds на нормальную слагающую $P \cos(P, N)$ притяженія называется *силовымъ потокомъ, проходящимъ чрезъ элементъ* ds.

Сумма всѣхъ силовыхъ потоковъ, проходящихъ чрезъ всѣ элементы какой нибудь замкнутой поверхности, воображаемой въ присутствіи данныхъ притягивающихъ массъ, называется *полнымъ силовымъ потокомъ*, проходящимъ чрезъ всю воображаемую замкнутую поверхность; онъ равенъ:

$$\int\int P \cdot \cos(P, N)\, dz$$

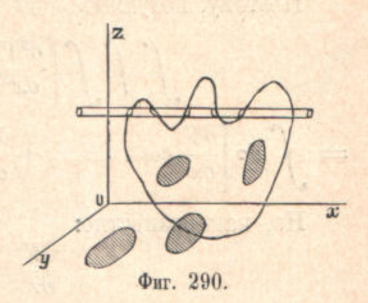
Теорема Гаусса.

§ 426. Гауссъ доказалъ слѣдующую теорему: *Полный силовой потокъ, проходящій чрезъ какую бы то ни было воображаемую замкнутую поверхность, равенъ произведенію $4\pi M$ массы M, заключенной въ этой поверхности, на 4π.* Докажемъ эту теорему. Положимъ (фиг. 390) ABC есть *воображаемая* замкнутая поверхность, проведенная вблизи притягивающихъ массъ изображенныхъ затушеванными частями, изъ которыхъ нѣкоторыя частью или вполнѣ объемлются поверхностью ABC, а другія находятся внѣ ея.

Разсмотримъ тройной интегралъ:

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz\,, \quad . \; . \; . \; . \; (893)$$

распространенный на весь объемъ, обнимаемый поверхностью ABC. Нѣкоторыя точки этого объема будутъ принадлежать притягивающимъ тѣламъ, другія будутъ находиться внѣ притягивающихъ тѣлъ; прилагая къ первымъ уравненіе Пуассона (891), а ко вторымъ уравненіе Лапласа (881), и замѣчая, что $dx\, dy\, dz$ есть элементъ объема, заключеннаго въ ABC и что масса равна произведенію плотности на объемъ, выводимъ заключеніе, что интегралъ (893) равенъ величинѣ $-4\pi M$, такъ что:



Фиг. 290.

$$-4\pi M = \iiint \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx\, dy\, dz \;.\;.\;.\; (894)$$

гдѣ M есть масса всѣхъ притягивающихъ частей, находящихся внутри поверхности ABC.

Разсмотримъ наиболѣе сложный случай, когда поверхность ABC такова, что прямая параллельная оси x пересѣкаетъ ее въ нѣсколькихъ точкахъ, напримѣръ въ точкахъ 1, 2, 3, 4. Тогда *)

$$\iiint \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_4 - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_3 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \right] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (895)$$

Назовемъ элементы поверхности ABC, встрѣчаемые упомянутою прямою въ точкахъ 1, 2, 3, 4 чрезъ $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$; проложеніе ихъ на плоскость (y, z) будетъ $dy\, dz$. Поэтому:

$$dy\, dz = -d\sigma_1 \cos(N_1, x) = +d\sigma_2 \,.\, \cos(N_2, x) = -d\sigma_3 \,.\, \cos(N_3, x) = d\sigma_4 \,.\, \cos(N_4, x) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (896)$$

гдѣ N_1, N_2, N_3, N_4 суть нормали въ точкахъ 1, 2, 3, 4, проведенныя къ поверхности ABC. Благодаря (896) получимъ изъ (895):

$$\iiint \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int d\sigma \,.\, \cos(N, x) \frac{\partial V}{\partial x}\,;$$

*) Если бы прямая параллельная оси x пересѣкала ABC только въ двухъ точкахъ, то (895) заключало бы только производныя $\left(\frac{dV}{dx}\right)_2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)_1$ и вычисленіе было бы еще проще, но съ тѣмъ же результатомъ.

точно также:

$$\int\int\int \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\, dx\, dy\, dz = \int d\sigma \,.\, cos\,(N, y)\,\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\int\int\int \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\, dx\, dy\, dz = \int d\sigma \,.\, cos\,(N, z)\,\frac{\partial V}{\partial z}$$

Поэтому, получимъ:

$$\int\int\int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \int d\sigma \left[\frac{\partial V}{\partial x} cos\,.\,(N,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot cos\,(N, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot cos\,(N, z)\right] \quad . \;.\;.\; (897)$$

Но, какъ извѣстно:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X = P\, cos\,(P, x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y = P\, cos\,(P, y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = Z = P\, cos\,(P, z)$$

Слѣдовательно изъ (897) имѣемъ:

$$\int\int\int \left[\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \int d\sigma\, [cos(P,x)\,.\, cos\,(N,x) + cos\,(P,y)\,.\, cos\,(N,y) + cos(P,z) cos(N, z)]\; P$$

или по (130):

$$\int\int\int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \int P\, cos\,(P, N)\, d\sigma = \int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$$

Пользуясь формулою (894) получимъ наконецъ:

$$\int P\,.\, cos\,(P, N)\, d\sigma = \int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\,4\,\pi M \;.\;.\;.\;.\; (898)$$

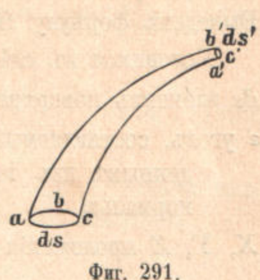
Но $\int P\,.\, cos\,(P, N)\, d\sigma$ и есть силовой потокъ, проходящій чрезъ *ABC*. Слѣдовательно уравненіе (898) и доказываетъ теорему Гаусса.

Эта теорема играетъ весьма важную роль въ ученіи объ электричествѣ.

Свойства силовыхъ трубокъ.

§ 427. Приложимъ теорему Гаусса къ выводу весьма замѣчательныхъ свойствъ силовыхъ трубокъ.

Разсмотримъ часть силовой трубки (фиг. 291) ограниченную двумя основаніями abc, $a'b'c'$ представляющими какія бы то ни было поверхности. Обозначимъ площади этихъ основаній (полагая, что трубка очень тонка) чрезъ ds и ds'. Приложимъ къ объему, заключенному въ такомъ отрѣзкѣ силовой трубки, теорему Гаусса. По этой теоремѣ полный потокъ, проходящій чрезъ поверхности такого отрѣзка, равенъ нулю, если внутри отрѣзка не заключено никакихъ притягивающихъ массъ. Но потокъ, проходящій чрезъ боковую (трубчатую) поверхность отрѣзка, равенъ нулю, такъ какъ нормальная слагающая притяженія въ каждой точкѣ боковой поверхности равна нулю по самому опредѣленію силовой трубки и силовыхъ линій. Слѣдовательно и сумма потоковъ, проходящихъ чрезъ оба основанія ds и ds', равна нулю, Поэтому потоки, проходящіе чрезъ каждое изъ основаній, должны быть равны и противуположны, если отрѣзокъ не содержитъ притягивающихъ массъ. Равны и противуположны— мы говоримъ въ томъ смыслѣ, что, если одинъ изъ нихъ направленъ по внутренней нормали одного основанія, то другой направленъ по внѣшней нормали другого основанія.



Фиг. 291.

Отсюда вытекаетъ:

Свойство 1-ое. Чрезъ всѣ поперечныя сѣченія одной и той же силовой трубки проходитъ одинъ и тотъ же силовой потокъ (всѣ потоки проходящіе чрезъ эти сѣченія равны между собою).

Это свойство можетъ быть выражено уравненіемъ.

$$Pds = P'\,ds', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (899)$$

если поперечныя сѣченія нормальны. Уравненіе же (899) выражаетъ собою: *Свойство 2-ое. Въ каждомъ сѣченіи трубки сила обратно пропорціональна площади сѣченія.*

Теорема Остроградскаго.

§ 428. Мы видѣли въ § 425-омъ,, что силовой потокъ выражается формулою:

$$\int\int P \,.\, cos\,(P, N)\, ds. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (900)$$

Эта величина и вообще понятіе о силовомъ потокѣ играетъ большую роль въ теоріи притяженія и электричества, а также и во многихъ другихъ отдѣлахъ физики. Остроградскій *) далъ замѣчательную формулу, по которой двойной интегралъ (900), выражающій силовой потокъ и распространенный на замкнутую поверхность, можетъ быть преобразованъ въ

*) Остроградскій — знаменитый русскій математикъ.

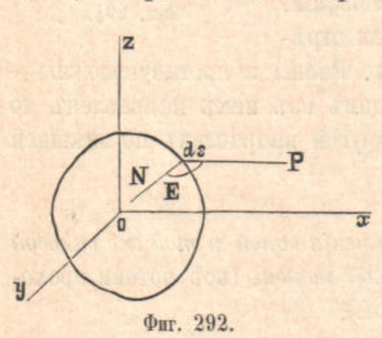
тройной интегралъ, распространенный на объемъ, ограниченный этою поверхностью. Эта формула Остроградскаго имѣетъ чрезвычайно важное значеніе: она, такъ сказать, даетъ возможность узнать, что дѣлается въ объемѣ, по тому, что происходитъ на поверхности его ограничивающей. Эта формула, равно какъ и болѣе общая формула Грина, которую мы выведемъ впослѣдствіи, имѣютъ обширное приложеніе въ теоріи притяженія, въ ученіи объ электричествѣ, въ ученіи о движеніи жидкостей и проч. Выведемъ формулу Остроградскаго *).

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

ds элементъ поверхности s

ε уголъ, составляемый прямолинейнымъ отрѣзкомъ (векторомъ) P, проведеннымъ изъ какой нибудь точки поверхности s, съ внутреннею нормалью N.

X, Y, Z проложенія вектора P на оси.



Фиг. 292.

$\iint P \cdot \cos(P, N)\, ds$ называется *поверхностнымъ интеграломъ*. Онъ представляетъ собою *силовой потокъ*, если векторъ P представляетъ собою силу. Но векторъ P можетъ представлять собою скорость, ускореніе или какую нибудь другую величину, способную изображаться прямолинейнымъ отрѣзкомъ. Формула Остроградскаго относится ко всякому поверхностному интегралу, а не только къ силовому потоку. Положимъ еще, что l, m, n суть косинусы угловъ наклоненія нормали N къ осямъ координатъ (фиг. 292). По (130) имѣемъ:

$$\cos\varepsilon = \frac{X}{P} \cdot l + \frac{Y}{P} m + \frac{Z}{P} n$$

Слѣдовательно:

$$\iint P \cos(N, P)\, ds = \iint P \cos\varepsilon \, .\, ds$$

$$= \iint X l ds + \iint Y m ds + \iint Z n ds \; . \; . \; . \; (901)$$

Очевидно, что $dy\,dz$ есть проложеніе элимента ds на плоскость (y, z), и такъ далѣе, такъ что:

$$dy\,dz = ds\, .\, l;\; dz\,dx = ds\, .\, m;\; dx\,dy = ds\, .\, n.$$

---

*) Записки С.-Петерб. Импер. Акад. Наукъ т. I, стр. 39 (1828 г.).

Поэтому:

$$\int\int P\cos(N,P)\,ds = \int\int X\,dy\,dz$$

$$+\int\int Y\,dz\,dx + \int\int Z\,dx\,dy\,. \;.\;.\;.\;.\;. \quad (902)$$

Обозначимъ чрезъ 1, 2, 3, 4... точки пересѣченія прямой параллельной оси x съ нашею поверхностью; тогда:

$$\int\int X\,dy\,dz = \int\int [(X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \ldots]\,dy\,dz\,.\,. \quad (903)$$

Если X конечна и непрерывна внутри объема, ограниченнаго этою поверхностью, то, называя чрезъ k какое нибудь число, получимъ:

$$X_{k+1} - X_k = \int_{xk}^{xk+1} \frac{\partial X}{\partial x}\,dx$$

Поэтому изъ (903) имѣемъ:

$$\int\int X\,dy\,dz = -\int\int\int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

Точно такъ же преобразуются и другіе двойные интегралы въ правой части (902). Поэтому (902) дастъ:

$$\int\int P.\cos(P,N)\,ds = -\int\int\int \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz\,.\,.\,. \quad (904)$$

Это и есть формула Остроградскаго. Въ лѣвой части $\int\int$ распространяется на всю поверхность; въ правой части $\int\int\int$ распространяется на весь ограниченный ею объемъ.

Изъ формулы Остроградскаго весьма просто выводится и доказанная въ § 426-омъ теорема Гаусса. Дѣйствительно, если V есть потенціалъ, то изъ (904) получимъ:

$$\int\int P\,.\,\cos(P,N)\,ds = -\int\int\int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\,dy\,dz$$

Прилагая сюда уравненіе Лапласа (881) и Пуассона (891), получимъ формулу (898) Гаусса.

Теорема Грина.

§ 429. Необыкновенно много приложеній въ различныхъ отдѣлахъ физики получила знаменитая теорема Грина. Она состоитъ въ слѣдующемъ: *Теорема: Если имѣются двѣ функціи U и V отъ x, y, z, которыя, равно какъ и ихъ первыя производныя, конечны, однозначны и непрерывны внутри*

нѣкотораго объема, то онѣ связаны слѣдующими тремя формулами.

$$\iiint U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]dx\,dy\,dz-\iint U ds\,\frac{\partial V}{\partial n}$$

$$=-\iiint\left[\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathrm{I})$$

$$\iiint V\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]dx\,dy\,dz-\iint V ds\,\frac{\partial U}{\partial n}$$

$$=-\iiint\left[\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\;.\;.\;.\;(\mathrm{II})$$

$$\iiint U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]dx\,dy\,dz-\iint U dz\,\frac{\partial V}{\partial n}$$

$$=\iiint V\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]dx\,dy\,dz-\iint V ds\,\frac{\partial U}{\partial n}\;.\;.\;.\;(\mathrm{III})$$

Эти три равенства, изъ которыхъ III есть прямое слѣдствіе первыхъ двухъ, и составляютъ теорему Грина. Здѣсь $\iiint$ распространяются на данный объемъ, $\iint$ распространяются на поверхность, ограничивающую этотъ объемъ; n откладывается по нормали.

Доказательство. Положимъ:

$$U\frac{\partial V}{\partial x}=X;\; U\frac{\partial V}{\partial y}=Y;\; U\frac{\partial V}{\partial z}=Z\;\;.\;.\;.\;.\;.\;(905)$$

Положимъ, что X, Y, Z суть проложенія на оси величины P; l, m, n косинусы угловъ, составляемыхъ внѣшнею нормалью N съ осями координатъ; ε уголъ, составляемый P съ N, такъ что:

$$-P\cos\varepsilon=Xl+Ym+Zn,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(906)$$

или, согласно съ (905):

$$-P\cos\varepsilon=U\left[l\frac{\partial V}{\partial x}+m\frac{\partial V}{\partial y}+n\frac{\partial V}{\partial z}\right]=U\frac{\partial V}{\partial n}\;.\;.\;.\;(907)$$

Изъ (905), кромѣ того, имѣемъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(908)$$

Вставляя величины (907) и (908) въ формулу (904) Остроградскаго, получимъ:

$$\iint U \frac{\partial V}{\partial n} ds = \iiint U \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz$$

$$+ \iiint \left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz$$

или:

$$\iiint U \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz - \iint U \frac{\partial V}{\partial n} ds$$

$$= - \iiint \left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz \quad . \; . \; . \; . \; (I)$$

Это и есть формула I теоремы Грина. Формула II выводится совершенно такъ же, полагая вмѣсто (905) такія равенства:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = X; \; V \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \; V \frac{\partial U}{\partial z} = Z;$$

формула III есть прямое слѣдствіе первыхъ двухъ.

ГЛАВА IV.

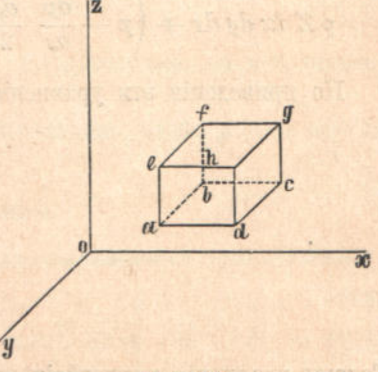
Гидростатика.

Опредѣленіе.

§ 430. Гидростатикою называется ученіе о равновѣсіи жидкости. Два весьма важные закона гидростатики: законъ Паскаля и законъ Архимеда, извѣстны уже изъ физики, мы на нихъ останавливаться не будемъ, а выведемъ уравненія равновѣсія жидкости.

Уравненія равновѣсія жидкости.

§ 431. Разсмотримъ внутри жидкости ея весьма малый элементъ, имѣющій форму параллелепипеда, ограниченнаго гранями параллельными плоскостямъ координатъ (фиг. 293) и имѣющаго ребра dx, dy, dz. Разобьемъ всю жидкость на такіе элементы и разсмотримъ одинъ изъ нихъ. Положимъ, что равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на этотъ элементъ равна RdM, гдѣ dM есть масса элемента. Назовемъ



Фиг. 293.

чрезъ X, Y, Z, проложенія ускоренія R на оси координатъ и чрезъ ρ плотность жидкости. Объемъ элемента очевидно будетъ $dx\,dy\,dz$. Проложенія силы RdM будутъ слѣдовательно:

$$\rho X\,dx\,dy\,dz;\ \rho Y\,dx\,dy\,dz;\ \rho Z\,dx\,dy\,dz\ \ldots\ldots \quad (909)$$

Назовемъ p давленіе на 1-цу площади въ центрѣ элемента. Давленіе на 1-цу площади граней $aefb$, $bfgc$ $abcd$ будутъ:

$$p-\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{dx}{2};\quad p-\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{dy}{2};\quad p-\frac{\partial p}{dz}\,\frac{dz}{2}.$$

Давленія на цѣлыя площади этихъ граней будутъ:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{dx}{2}\right)dy\,dz;\quad \left(p-\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{dy}{2}\right)dz\,dx;\quad \left(p-\frac{\partial p}{\partial z}\,\frac{dz}{2}\right)dx\,dy\ . \quad (910)$$

Давленія на противуположныя грани будутъ:

$$-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{dx}{2}\right)dy\,dz;\quad -\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{dy}{2}\right)dz\,dx;$$

$$-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\,\frac{dz}{2}\right)dx\,dy\ \ldots\ldots\ldots \quad (911)$$

Для равновѣсія необходимо, чтобы суммы проложеній силъ и давленій на оси координатъ были равны нулю. Пользуясь величинами (909), (910), (911), напишемъ это въ видѣ:

$$\rho X\,dx\,dy\,dz+\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{dx}{2}\right)dy\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{dx}{2}\right)dy\,dz=0$$

$$\rho Y\,dx\,dy\,dz+\left(p-\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{dy}{2}\right)dz\,dx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{dy}{2}\right)dx\,dz=0$$

$$\rho Z\,dx\,dy\,dz+\left(p-\frac{\partial p}{\partial z}\,\frac{dz}{2}\right)dx\,dy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\,\frac{dz}{2}\right)dx\,dy=0.$$

По приведеніи эти уравненія даютъ:

$$\left.\begin{aligned}\rho X&=\frac{\partial p}{\partial x}\\ \rho Y&=\frac{\partial p}{\partial y}\\ \rho Z&=\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (912)$$

Таковы уравненія равновѣсія жидкаго элемента.

Давленія на стѣнки сосудовъ должны быть нормальны къ нимъ. Давленія на свободной поверхности жидкости должно быть равно нулю.

Условія равновѣсія жидкости.

§ 432. Уравненія (912) приводятъ къ слѣдующимъ условіямъ равновѣсія жидкости.

Условіе 1-е. Для равновѣсія жидкости необходимо, чтобы выраженіе:

$$\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(913)$$

было полнымъ дифференціаломъ, то есть, чтобы существовала такая функція U, которая давала бы:

$$\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dU\;.\;.\;.\;.\;.\;(914)$$

Дѣйствительно, изъ (912) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dy}(\rho\,X) &= \frac{d}{dx}(\rho\,Y) \\ \frac{d}{dz}(\rho\,Y) &= \frac{d}{dy}(\rho\,Z) \\ \frac{d}{dx}(\rho\,Z) &= \frac{d}{dz}(\rho\,X) \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(915)$$

а эти уравненія показываютъ, что ρX, ρY, ρZ суть частныя производныя отъ одной и той же функціи. Называя эту функцію (потенціалъ) чрезъ U, получимъ (914).

Условіе 2-е. Для равновѣсія жидкости необходимо, чтобы свободная поверхность опредѣлялась уравненіемъ:

$$U + C = 0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(916)$$

гдѣ C есть величина постоянная.

Дѣйствительно изъ (912) и (914) получимъ:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = dU\;.\;.\;.\;.\;.\;(917)$$

откуда:

$$p = U + C\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(918)$$

Но на свободной поверхности $p = 0$. Слѣдовательно на ней удовлетворяется условіе (916).

Условіе 3-е. Для равновѣсія жидкости необходимо, чтобы p было внутри жидкости положительнымъ.

Поверхности уровня.

§ 433. Поверхности равнаго потенціала, выражаемыя уравненіями:

$$U = c\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(919)$$

называются ***поверхностями уровня*** (см. § 422). Если $c = -C$, то (919) обращается въ (916); слѣдовательно свободная поверхность жидкости есть одна изъ поверхностей уровня.

Элементы поверхностей уровня нормальны къ силамъ (см. § 422).

Шаръ есть одна изъ формъ равновѣсія свободной жидкости.

§ 434. Положимъ, что частицы жидкости оказываютъ одна на другую ньютоніанское притяженіе и жидкость подвержена только этимъ взаимнымъ силамъ. Если такая жидкость имѣла форму шара, то она и сохранитъ эту форму.

Дѣйствительно, принимая центръ сферы за начало координатъ, заключаемъ по формулѣ (874), что:

$$\rho X = -\frac{4\pi Dqm}{3}x;\ \rho Y = -\frac{4\pi Dqm}{3}y;\ \rho Z = -\frac{4\pi Dqm}{3}z.$$

Не трудно видѣть, что эти три величины суть частныя производныя одной величины:

$$-\frac{4\pi Dqm}{3\,.\,2}(x^2+y^2+z^2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(920)$$

Слѣдовательно первое условіе § 432-го удовлетворено, и

$$U = -\frac{4\pi Dqm}{6}(x^2+y^2+z^2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(921)$$

По (916) имѣемъ для свободной поверхности уравненіе:

$$-\frac{4\pi Dqm}{6}({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2)+C=0,\,.\,.\,.\,.\,.\,(922)$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты точки свободной поверхности.

Если положить:

$$\frac{+6C}{4\pi Dqm} = R^2,$$

то

$$x^2+y^2+z^2=R^2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(923)$$

Итакъ, свободная поверхность остается сферою.
(918) и (922) даютъ:

$$p = U + C = U + \frac{4\pi Dqm}{6}({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2).$$

Пользуясь уравненіемъ (921), находимъ:

$$p = \frac{4\pi Dqm}{6}(x_1+{y_1}^2+{z_1}^2)-\frac{4\pi Dqm}{6}(x^2+y^2+z^2)\,.\,.\,.\,(924)$$

Здѣсь x_1, y_1, z_1 суть координаты сферы; x, y, z точки лежащей внутри сферы. Слѣдовательно уравненіе (924) показываетъ, что p внутри жидкости положительно. Итакъ, всѣ три условія равновѣсія оказались удовлетворенными. Слѣдовательно сфера есть одна изъ формъ равновѣсія свободной жидкости.

ГЛАВА V.

Гидродинамика.

Уравненія гидродинамики.

§ 435. Гидродинамикою называется ученіе о движеніи жидкости.

Переходъ отъ уравненій равновѣсія жидкости къ уравненіямъ движенія совершается весьма просто при помощи начала Д'Аламбера (см. § 378): стóитъ только выразить, что *потерянныя* силы находятся въ равновѣсіи; для этого достаточно замѣнить въ уравненіяхъ (912) равновѣсія жидкости дѣйствительныя силы ρX ρY ρZ потерянными

$$\rho\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right);\quad \rho\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right);\quad \rho\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Получимъ уравненія движенія жидкости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=X-\frac{d^2x}{dt^2}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=Y-\frac{d^2y}{dt^2}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=Z-\frac{d^2z}{dt^2}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(925)$$

Однако въ этомъ видѣ нельзя пользоваться непосредственно этими уравненіями по слѣдующимъ причинамъ. Если мы будемъ слѣдить за какою-нибудь точкою жидкости, которая имѣла въ моментъ t_0 координаты x_0, y_0, z_0, то вслѣдствіе движенія жидкости увидимъ, что въ другой моментъ t координаты той же точки жидкости будутъ уже другія, напримѣръ x, y, z, потому что точка жидкости перемѣстится. Но и въ моментъ t_0 для разныхъ точекъ жидкости будутъ разныя координаты x_0, y_0, z_0. Въ уравненія (925) входятъ и координаты x_0, y_0, z_0, и координаты x, y, z для разныхъ точекъ, и время t. Вообще необходимо различать точки жидкости, которыя движутся отъ точекъ пространства, чрезъ которыя онѣ проходятъ. Эйлеръ далъ такое преобразованіе уравненій (925), въ конечномъ выводѣ котораго получаются уравненія, содержащія только координаты x, y, z точекъ пространства, время t и скорости жидкости, существующія въ различныхъ точкахъ пространства въ моментъ t. Движеніе жидкости будетъ вполнѣ опредѣлено, если будемъ знать въ каждый моментъ t, какія скорости имѣетъ жидкость въ различныхъ точкахъ пространства и какъ эти скорости направлены, а это будетъ извѣстно, если будемъ знать въ каждый моментъ t для каждой точки (x, y, z) пространства проложенія u, v, w скорости жидкой частицы, проходящей чрезъ (x, y, z).

Совершимъ это преобразованіе. Имѣемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt};$$

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Но u, v, w зависятъ отъ x, y, z. Слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\,u + \frac{\partial u}{\partial y}\,v + \frac{\partial u}{\partial z}\,w \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\,u + \frac{\partial v}{\partial y}\,v + \frac{\partial v}{\partial z}\,w \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\,u + \frac{\partial w}{\partial y}\,v + \frac{\partial w}{\partial z}\,w \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (926)$$

Подставляя эти величины въ (925), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\,u - \frac{\partial u}{\partial y}\,v - \frac{\partial u}{\partial z}\,w \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}\,u - \frac{\partial v}{\partial y}\,v - \frac{\partial v}{\partial z}\,w \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x}\,u - \frac{\partial w}{\partial y}\,v - \frac{\partial w}{\partial z}\,w \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (927)$$

Вотъ каковы уравненія Эйлера.

Уравненіе несжимаемости.

§ 436. Для опредѣленія движенія жидкости нужно къ уравненіямъ (927) присоединить еще условіе несжимаемости жидкости, если изслѣдуемъ движеніе капельной жидкости. Выведемъ уравненіе, выражающее это условіе.

Вообразимъ себѣ внутри жидкости какую-нибудь замкнутую поверхность, заключающую въ себѣ опредѣленный объемъ жидкости. Если жидкость *несжимаема* и *сплошная*, то количество жидкости въ такомъ объемѣ будетъ одинаково несмотря на движеніе: сколько въ него будетъ притекать жидкости, столько же ея будетъ выходить изъ этого объема. Обозначимъ чрезъ V скорость жидкости въ какой-нибудь точкѣ замкнутой поверхности, отложенную отъ этой точки въ видѣ вектора; обозначимъ чрезъ ε уголъ, составляемый скоростью V съ нормалью. Тогда по теоремѣ (904) Остроградскаго имѣемъ:

$$\int\!\!\int V \cos\varepsilon \,.\, ds = -\int\!\!\int \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz \quad . \; . \; (928)$$

Величина $\int\!\!\int V \cos\varepsilon \,.\, ds$ представляетъ собою количество притекающей въ упомянутый объемъ жидкости. Это количество, какъ мы только что замѣтили, равно нулю. Оно равно нулю для всякой замкнутой поверхности, проведенной внутри жидкости—при всякихъ предѣлахъ интеграціи.

Поэтому должна равняться нулю стоящая подъ $\iiint$ правой части уравненія (928) величина $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$. Итакъ условіе ***несжимаемости*** и ***сплошности*** жидкости таково:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (929)$$

Установившееся движеніе.

§ 437. *Установившимся* или *стаціонарнымъ* движеніемъ жидкости называется такое ея движеніе, при которомъ во всѣхъ точкахъ пространства, занимаемаго жидкостью, скорости проходящихъ чрезъ нихъ жидкихъ частицъ сохраняютъ свою величину и направленіе, давленія и плотность сохраняютъ свою величину, такъ что:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial p}{\partial t}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (930)$$

При такомъ движеніи всѣ точки жидкости, проходящія чрезъ какую-нибудь точку пространства, движутся одна за другою по одной и той же траекторіи; каждая такая траекторія называется *линіею тока*.

Обозначимъ чрезъ V скорость жидкой точки, чрезъ u, v, w ея проложенія на оси координатъ. Будемъ опредѣлять положеніе точки на данной линіи тока длиною дуги S пройденной точкою по этой линіи отъ нѣкоторой данной точки. Тогда

$$u=V\frac{dx}{ds};\quad v=V\frac{dy}{ds};\quad w=V\frac{dz}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (931)$$

такъ какъ $\frac{dx}{ds}$; $\frac{dy}{ds}$; $\frac{dz}{ds}$ суть косинусы угловъ наклоненія элемента ds линіи тока къ осямъ координатъ. Положимъ, что дѣйствующія силы имѣютъ потенціалъ U. Замѣнимъ въ 1-мъ изъ уравненій (927) величины u, v, w ихъ значеніями изъ (931). Получимъ:

$$V\left[\frac{\partial\left(V\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\left(V\frac{dx}{ds}\right)}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\left(V\frac{dx}{ds}\right)}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right]=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

или:

$$V\frac{d\left(V\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{ds}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

точно такъ же выводятся:

$$V\frac{d\left(V\frac{dy}{ds}\right)}{ds}=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$V\frac{d\left(V\frac{dz}{ds}\right)}{ds}=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Помноживъ эти уравненія, соотвѣтственно, на $\frac{dx}{ds}ds$; $\frac{dy}{ds}ds$; $\frac{dz}{ds}ds$, и сложивъ, получимъ:

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) = dU - \frac{dp}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots (932)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{V^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = const.$$

Это выраженіе имѣетъ постоянную величину *на всей линіи тока* (для каждой линіи тока можетъ быть своя постоянная величина). Если жидкость однородна и несжимаема, то:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$$

и уравненіе (932) обращается въ

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = C,$$

или:

$$p = \rho\left(C + U - \frac{V^2}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (933)$$

Теорема Бернулли.

§ 438. Если жидкость находится подъ дѣйствіемъ силы тяжести, то, взявъ ось z внизъ по вертикали, имѣемъ:

$$U = gz.$$

Тогда (933) обращается въ:

$$p = \rho\left(C + gz - \frac{V^2}{2}\right).$$

Это уравненіе обыкновенно выражается въ видѣ:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} - z = H \quad \ldots\ldots\ldots (934)$$

гдѣ H есть нѣкоторая постоянная величина. Формула (934) называется уравненіемъ Бернулли и служитъ исходнымъ пунктомъ *гидравлики*—науки, изучающей движеніе воды въ трубахъ, рѣкахъ, каналахъ и водяные двигатели.

Часть IV.

Бѣглый обзоръ общаго строя математическихъ наукъ.

ГЛАВА I.

Обзоръ.

Вступленіе.

§ 439. Предлагая этотъ обзоръ математическихъ наукъ, я далекъ былъ отъ мысли представить ихъ строгую классификацію. Цѣль этого обзора состоитъ въ томъ, чтобы дать возможность читателю хоть сколько нибудь оглядѣться среди названій различныхъ отраслей математическихъ знаній, чтобы читатель зналъ, къ какому отдѣлу математики онъ долженъ обратиться для отъисканія того, что̀ ему можетъ понадобиться. При составленіи этого обзора я пользовался болѣе всего университетскими программами, оглавленіемъ издаваемой Буркхардтомъ и Мейеромъ математической энциклопедіи: Encyklopädie der mathematischen Wissenshaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von Dr. H. Burkhardt und Dr. W. Franz Meyer. (6 томовъ по 40 листовъ, приблизительно, въ каждомъ) и указателемъ статей Математическаго Сборника.

I. Чисто-математическія науки.

Чисто-математическія науки можно подраздѣлить на три большія группы:

А. *Аритмологію*, изучающую *прерывныя* функціи.

Б. *Анализъ*, изучающій функціи *непрерывныя*.

В. *Геометрію*.

Но эти отдѣлы имѣютъ между собою много точекъ соприкосновенія. Очень часто подъ анализомъ разумѣютъ именно дифференціальное и интегральное исчисленіе. Высшая алгебра занимается тоже и непрерывными функціями, но она, по духу, ближе къ теоріи чиселъ, чѣмъ къ интегральному исчисленію. Поэтому мы будемъ придерживаться менѣе строгаго, но болѣе практичнаго дѣленія, проведеннаго въ оглавленіи къ упомянутой энциклопедіи.

A. Ариөметика и Алгебра.

1) *Элементарная ариөметика.*

2) *Элементарная алгебра.*

Теорія чиселъ.

§ 440. 3) *Теорія чиселъ.* Эта наука, сравнительно еще молодая, обособившаяся только въ первой половинѣ XIX-го столѣтія, а потому еще не такъ сильно развита какъ анализъ, но ей предстоитъ широкое развитіе, потому что она захватываетъ огромную область *прерывныхъ* функцій. Прямымъ предметомъ ея изслѣдованія служатъ *цѣлыя числа* и числовые законы. Числа же именно и являются представителями прерывныхъ функцій, потому что въ *натуральномъ* рядѣ чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \ldots\ldots\ldots \quad (935)$$

переходъ отъ одного числа къ сосѣднему является уже скачкомъ чрезъ всѣ промежуточныя дроби и ирраціональныя величины. Напримѣръ въ промежуткѣ между числами 1 и 2 заключается и безконечное число дробей $\left(\text{напримѣръ } \frac{5}{3},\ \frac{7}{4} \ldots\right)$ и множество ирраціональныхъ величинъ (напримѣръ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$), но теорія чиселъ ими не занимается, а изучаетъ только цѣлыя числа. Она изучаетъ также числовыя функціи, имѣющія существенно прерывный характеръ. Примѣромъ числовой функціи можетъ быть, напримѣръ, такая: *число чиселъ меньшихъ даннаго числа* n *и первыхъ съ нимъ.*

Однимъ изъ главныхъ орудій теоріи чиселъ являются *сравненія.* Если разность $a - b$ дѣлится безъ остатка на число p, то пишутъ:

$$a \equiv b \ (\text{мод. } p) \ldots\ldots\ldots \quad (936)$$

и выговариваютъ: a сравнимо съ b по модулю p. Напримѣръ:

$$11 \equiv 2 \ (\text{мод. } 3)$$

$$25 \equiv 4 \ (\text{мод. } 7)$$

Свойства чиселъ можно было бы изслѣдовать при помощи неопредѣленныхъ уравненій или при помощи *непрерывныхъ дробей*: и тѣ и другія стоятъ въ тѣсной связи со сравненіями; но особенное удобство сравненій заключается въ томъ, что они имѣютъ много общихъ свойствъ съ уравненіями. Сравненія бываютъ (какъ и уравненія) различныхъ порядковъ.

Особенно важную роль въ теоріи чиселъ играютъ числа *первоначальныя*, которыя дѣлятся только на себя или на 1, каковы: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Типическою теоремою теоріи чиселъ можетъ служить, напримѣръ, такая: *если р есть число первоначальное, то величина*

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (p - 1) + 1$$

дѣлится на цѣлое на р. Напримѣръ:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1}{7} = \frac{721}{7} = 103$$

Кромѣ сравненій въ теоріи чиселъ имѣютъ большое значеніе *теорія квадратичныхъ формъ* и особенное, изобрѣтенное профессоромъ Н. В. Бугаевымъ, *ученіе о числовыхъ производныхъ*, дѣйствующее надъ числовыми функціями способами похожими на способы дифференціальнаго исчисленія.

Величайшій изъ современныхъ химиковъ Д. И. Менделѣевъ и такой глубокій знатокъ аритмологіи какъ Н. В. Бугаевъ надѣются, что именно аритмологіи и суждено проникнуть тайны періодическаго закона химическихъ элементовъ, такъ какъ атомный вѣсъ элементовъ есть функція существенно прерывная *).

Профессоръ Н. В. Бугаевъ въ своей рѣчи, произнесенной имъ на Цюрихскомъ конгрессѣ математиковъ въ 1897 году и повторенной имъ на X-омъ съѣздѣ натуралистовъ и врачей въ Кіевѣ, высказалъ по поводу будущности аритмологіи, въ необыкновенно красивой формѣ, цѣлый рядъ взглядовъ на судьбы философіи, отличающихся глубиною и оригинальностью. Я не могу отказать себѣ въ удовольствіи привести хотя бы сухое извлеченіе изъ рѣчи знаменитаго нашего математика.

Н. В. замѣчаетъ, что математическія науки должны были оказывать сильное воздѣйствіе на философскую мысль. Математика, со времени открытій Ньютона и Лейбница, очарованная стройностью и мощью анализа, развивалась болѣе всего въ направленіи изученія *непрерывныхъ* функцій и при томъ такихъ, которыя получаютъ опредѣленное значеніе при данномъ значеніи перемѣннаго. Явленія, отражающіяся въ математикѣ непрерывными функціями, отличаются своею опредѣленностью: данная причина неотразимо производитъ извѣстное, вполнѣ опредѣленное, явленіе.

Подъ вліяніемъ необыкновеннныхъ успѣховъ въ изученіи именно этого разряда явленій, философія невольно увлеклась детерминизмомъ, и въ ней явилась склонность сводить къ законамъ раціональной механики не только явленія неорганической природы но даже и явленія и законы человѣческаго духа. Философія окрылилась надеждою объяснить все какъ нѣкоторый механизмъ; человѣкъ при этомъ становился въ безнадежное положеніе: великія начала свободы, красоты, справедливости начинали тускнѣть. Но вотъ именно въ XIX вѣкѣ обособляется и начинаетъ быстро развиваться аритмологія, занимающаяся прерывными функціями и такими, для которыхъ равно-возможны нѣсколько значеній при данномъ значеніи перемѣннаго. Не повліяетъ ли аритмологія на философію въ смыслѣ противуположномъ тому, какъ на нее повліялъ анализъ. Не отвѣтитъ ли она утвердительно на потребность нашего духа высоко держать знамя свободы, красоты и справедливости наперекоръ отрицанію свободы воли?

---

*) Энциклопедическій Словарь Брокгауза и Ефрона, т. XXIII, стр. 323.

Въ связи съ такими идеями интереснѣйшимъ вопросомъ современной теоріи чиселъ является изученіе числовыхъ (прерывныхъ) функцій.

Высшая Алгебра.

§ 441. 4) *Высшая Алгебра.* Главная цѣль высшей алгебры состоитъ въ изученіи свойствъ уравненій перваго и высшихъ порядковъ.

а) *Теорія уравненій* содержитъ въ себѣ строгое доказательство того, что уравненіе *m*-го порядка имѣетъ *m* корней. Изслѣдованіе уравненій квадратнаго, биквадратнаго, 3-го порядка и 4-го порядка, которыя всѣ имѣютъ алгебраическое рѣшеніе въ радикалахъ. Теорія двучленныхъ уравненій вида $Ax^m + B = 0$. Опредѣленіе предѣловъ, между которыми заключаются корни даннаго уравненія съ числовыми коэффиціентами. Приближенное вычисленіе корней уравненія *m*-го порядка съ числовыми коэффиціентами. Уравненія высшихъ порядковъ, въ которыхъ корни суть функціи отъ одного изъ нихъ. Уравненія Галуа. Уравненія Абеля. Симметрическія функціи (не измѣняющіяся отъ перестановки перемѣнныхъ): Детерминанты (опредѣлители).

б) *Теорія комбинацій*, которая необходима для теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій; въ ней изслѣдуются различныя перестановки данныхъ группъ величинъ и вліяніе ихъ на функціи этихъ величинъ.

в) *Теорія группъ*, проникающая отдѣлы *а* и *б*, созданная французскимъ, въ ранней молодости умершимъ, геніальнымъ математикомъ Галуа (Galois). Эта теорія пріобрѣтаетъ все большее значеніе и овладѣваетъ нѣкоторыми другими отдѣлами математики.

г) *Теорія линейныхъ преобразованій*, основанная на теоріи опредѣлителей. Если имѣемъ два уравненія 1-го порядка:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

то изъ нихъ получаемъ рѣшенія:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

знаменатель $a_1b_2 - a_2b_1$ навывается опредѣлителемъ и обозначается такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Числители легко получаются по опредѣленнымъ правиламъ изъ знаменателя. При трехъ уравненіяхъ съ 3-мя неизвѣстными играетъ роль опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(см. Алгебра Давидова).

Изъ теоріи опредѣлителей (детерминантовъ) развилась обширная теорія линейныхъ преобразованій, широко пользующаяся символическими обозначеніями детерминантовъ. Она имѣетъ тѣсное соотношеніе съ преобразованіемъ координатъ: координаты не содержатся въ задачахъ какъ нѣчто имъ присущее и неотъемлемое. Онѣ намъ служатъ для построенія рѣшенія, какъ лѣса служатъ для постройки зданія. Поэтому весьма интересно узнать, какія величины не измѣняются отъ преобразованія координатъ. Эти величины назывкются *инварьянтами.* Линейнымъ преобразованіемъ функціи называется такое, при которомъ перемѣнныя замѣняются другими, связанными съ ними помощью уравненій 1-го порядка. Преобразованія Декартовыхъ координатъ суть линейныя. Цѣль этой теоріи нахожденіе инварьянтовъ (неизмѣнныхъ), коварьянтовъ (соизмѣнныхъ) и другихъ величинъ, такъ или иначе относящихся къ преобразованію.

Теорія конечныхъ разностей.

§ 442. 5) *Теорія конечныхъ разностей* разсматриваетъ не безконечно малыя, но *конечныя* приращенія перемѣннаго и функціи. Представимъ себѣ рядъ величинъ:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \ldots;$$

опредѣляемъ ихъ разности:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0;\ \Delta u_1 = u_2 - u_1;\ \Delta u = u_3 - u_2 ..$$

называемыя первыми разностями; составляемъ разности этихъ 1-ыхъ разностей:

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0;\ \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1;\ \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2 \ldots$$

и такъ далѣе, такъ что получается таблица:

u_0				
	Δu_0			
u_1		$\Delta^2 u_0$		
	Δu_1		$\Delta^3 u_0$	
u_2		$\Delta^2 u_1$		$\Delta^4 u_0$
	Δu_2		$\Delta^3 u_1$	
u_3		$\Delta^2 u_2$		$\Delta^4 u_1$
	Δu_3		$\Delta^3 u_2$	
u_4		$\Delta^2 u_3$		
	Δu_4			
u_5				

. . . .

Примѣръ:

1	Δ	Δ^2	Δ^3
	3		
4		2	
	5		0
9		2	
	7		0
16		2	
	9		
25			

Пользуясь этими разностями устанавливаютъ формулы нѣсколько сходныя съ формулами дифференціальнаго исчисленія. Получается исчисленіе особенно удобное для приближенныхъ вычисленій.

Б. Анализъ

§ 443. Дифференціальное и интегральное исчисленія, составляющія существенную часть анализа, какъ мы надѣемся, уже охарактеризованы въ основномъ текстѣ настоящей книги. Но мы не касались мнимаго перемѣннаго, введеніе котораго необыкновенно расширяетъ кругозоръ математика и характеризуетъ новѣйшую математику, о немъ мы скажемъ впослѣдствіи нѣсколько подробнѣе; мы не касались многихъ весьма важныхъ рядовъ, непрерывныхъ дробей и проч. Затѣмъ къ анализу относятся еще слѣдующіе отдѣлы.

1) *Общая теорія функцій*, уясняющая свойство функцій именно при помощи мнимаго перемѣннаго z равнаго $x + y\sqrt{-1}$ (о ней скажемъ впослѣдствіи).

§ 444. 2) *Эллиптическія функціи.* Еслибы мы не имѣли понятія о тригонометрическихъ функціяхъ sin, cos, tg, то не могли бы взять

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \text{ или } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

которые по формуламъ (430) и (432) равны $ar tg x$ и $ar \sin x$. Весьма вѣроятно, что и теперь многіе интегралы недоступны нашему вычисленію только потому, что мы не знаемъ многихъ простыхъ функцій. Поэтому прямой и весьма интересный путь для нахожденія интеграловъ неподдающихся обыкновенному вычисленію заключается въ нахожденіи свойствъ тѣхъ новыхъ функцій, которыя ими выражаются.

Ближайшими функціями къ $ar tg x$, $ar \sin x$, $ar \cos x$ по виду выражаемыхъ ими интеграловъ будутъ тѣ, которыми выражаются интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$$

содержащіе въ знаменателѣ радикалъ (квадратный) и подъ этимъ радикаломъ алгебраическую функцію 3-го порядка. Если подъ радикаломъ содержится алгебраическая функція 2-го порядка, то интегралъ выражается хотя сложными, но состоящими изъ знакомыхъ намъ функцій выраженіями (см. § 263—265). Но если подъ радикаломъ стоитъ алгебраическая функція 3-го порядка, то интегралъ не поддается обыкновеннымъ вычисленіямъ. Между тѣмъ такіе именно интегралы встрѣчаются очень часто въ различныхъ вопросахъ. Напримѣръ точное рѣшеніе задачи о маятникѣ приводится (§ 399, формула 819) къ такому интегралу. Геніальныя изысканія Абеля и Якоби поставили вопросъ объ изученіи такихъ интеграловъ на надлежащую почву изученія новыхъ функцій, несоставляемыхъ изъ обыкновенныхъ простыхъ функцій, какъ $\sin x$ не можетъ быть составленъ алгебраическими дѣйствіями. Эти интегралы называются эллиптическими.

Однако несравненно удобнѣе имѣть дѣло съ прямыми тригонометрическими функціями *siu x*, *cos x*, *tgx*, чѣмъ съ обратными *ar sin x*, *ar cos x*, *artg x* такъ какъ первыя лучше преобразуются однѣ въ другія, чѣмъ послѣднія.

Интересно, слѣдовательно, изучить функціи обратныя *эллиптическимъ интеграламъ*.

Разсмотримъ сначала переходъ, напримѣръ отъ *ar sin x* къ *sin x*. Назовемъ чрезъ U интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Имѣемъ:

$$U = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ar\, sin\, x$$

откуда:

$$sin\, U = x.$$

Итакъ прямая тригонометрическая функція $sin\, U$ равна верхнему предѣлу въ $\int_0^x$, выражающемъ обратную тригонометрическую функцію *ar sin x*.

Сообразно съ этимъ, *эллиптической функціею* называется верхній предѣлъ эллиптическаго интеграла:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$$

Оказалось, что эти функціи представляютъ высокій математическій интересъ по гибкости, съ которой онѣ подчиняются весьма красивымъ преобразованіямъ и по тому, что онѣ оказались двояко-періодическими.

Въ послѣднія 30 лѣтъ, благодаря Вейерштрассу, Ермиту, Шварцу и другимъ, эллиптическія функціи изслѣдованы весьма обстоятельно. Вейерштрассъ показалъ, что всѣ эллиптическія функціи выражаются алгебраически чрезъ одну функцію P, опредѣляемую дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 = (P - e_1)(P - e_2)(P - e_3)$$

гдѣ e_1, e_2, e_3, суть нѣкоторыя постоянныя.

Эта функція P и называется вейерштассовскою функціею.

Эллиптическія функціи получили свое названіе отъ того, что дуга эллипса выражается эллиптическимъ интеграломъ.

§ 445. 3) *Сферическія функціи* суть такія функціи V, которыя удовлетворяютъ уравненію Лапласа.

$$\frac{\partial^2 V}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{dy^2} + \frac{\partial^2 V}{dz^2} = 0$$

Съ этимъ уравненіемъ тѣсно связаны: гидродинамика, теоріи: притяженія, электричества, теплопроводности и проч. Поэтому ихъ теорія получила широкое развитіе, стоящее въ связи со многими другими отдѣлами чистой математики.

§ 446. 4) *Варьяціонное исчисленіе.* Въ дифференціальномъ исчисленіи давая перемѣнному x приращеніе dx, мы переходимъ отъ одной точки кривой къ другой ея точкѣ. Въ варьяціонномъ исчисленіи переходимъ отъ точки данной на кривой къ ближайшей точкѣ лежащей на другой сосѣдней кривой. Въ дифференціальномъ исчисленіи мы отъискиваемъ максимумы и минимумы, которыхъ достигаетъ $f(x)$ при измѣненіи икса;— ищемъ, при какомъ иксѣ $f(x)$ получитъ наибольшее или наименьшее значеніе. Въ варьяціонномъ исчисленіи мы мѣняемъ самую форму функціи и отыскиваемъ при какой формѣ функціи

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\right)$$

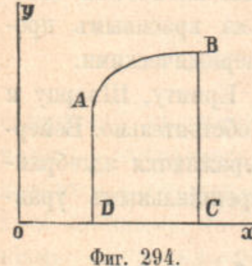
получитъ наибольшее или наименьшее значеніе интегралъ

$$\int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\right) dx$$

Этимъ исчисленіемъ рѣшаются такіе вопросы:

Найти кратчайшую линію между двумя точками на данной поверхности.

Провести между двумя данными точками A и B такую кривую, чтобы при вращеніи ея плоскости около лежащей въ этой плоскости прямой ox получился бы наименьшій объемъ $ABCD$.



Фиг. 294.

Провести между двумя данными точками A и B такую кривую, чтобы площадь $ABCD$ (фиг. 294) была наименьшею.

Всѣ задачи механики можно свести къ варьяціонному исчисленію.

§ 447. 5) *Теорія непрерывныхъ группъ преобразованій*—созданіе знаменитаго Софуса Ли представляетъ собою необыкновенно глубокое и въ то же время поразительно ясное сплетеніе идей аналитическихъ, геометрическихъ и механическихъ, дающее возможность свести въ одно цѣлое самые разнообразные способы интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Лучше всего конечно эта теорія изложена въ объемистомъ сочиненіи Ли: *Theorie der Transformationsgruppen*, *S. Lie.* Читая эту книгу, не знаешь чему болѣе удивляться: глубинѣ ли и обширности познаній Софуса Ли по всѣмъ отдѣламъ математики или стройности зданія, которое онъ построилъ. Нигдѣ геометрія не сплетается съ анализомъ такъ тѣсно какъ у Ли и нигдѣ они не поясняютъ взаимно другъ друга такъ поразительно,

какъ въ этой книгѣ: это какъ бы сводъ всѣхъ математическихъ ученій воедино. Опредѣлить въ краткихъ словахъ или охарактеризовать ее типическимъ примѣромъ потому и трудно, что Ли, составивъ ее изъ самыхъ отдаленныхъ одна отъ другой математическихъ теорій, сплотилъ ихъ въ такое сплошное цѣлое, которое представляется вылитымъ изъ одного куска. Онъ замѣтилъ, что главные способы матемитики это преобразованія, оцѣнилъ капитальное значеніе группъ Галуа, проникъ въ самую глубину связи дифференціальныхъ уравненій съ движеніемъ и съ теоріею касанія, освѣтилъ это все геометріею, широко воспользовался такими обобщеніями какъ геометрія многихъ измѣреній и неэвклидовы геометріи и создалъ такую теорію, которая еще не можетъ быть достаточно оцѣнена современниками, но несомнѣнно почтется величайшимъ математическимъ произведеніемъ XIX-го вѣка. Теорія Ли это сведеніе математики въ одно цѣлое. Геометрія въ ней настолько все проникаетъ, что даже интегрирующій множитель получаетъ геометрическое представленіе. По умѣнію все пропитывать и освѣщать геометріею съ Софусомъ Ли можетъ поспорить въ нашъ аналитическій вѣкъ, развѣ только Ф. Клейнъ — знаменитый профессоръ Геттингенскаго университета *).

B. Геометрія.

§ 448. 1) Элементарная Геометрія.

2) Тригонометрія, какъ она трактуется въ нашихъ гимназіяхъ, гдѣ ее сводятъ къ ученію о рѣшеніи треугольниковъ. Она можетъ быть отнесена къ анализу, если ее разсматривать какъ ученіе о функціяхъ выраженныхъ верхними предѣлами интеграловъ:

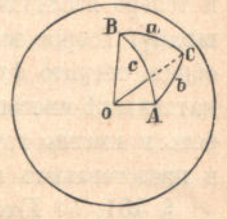
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

и о соотношеніяхъ между этими функціями.

§ 449. 3) *Сферическая тригонометрія*—наука о соотношеніяхъ между углами и сторонами сферическихъ треугольниковъ — чрезвычайно важная для Астрономіи.

Основная формула сферической тригонометріи такова:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A$$



Фиг. 295.

гдѣ a, b, c суть центральные углы, соотвѣтствующіе дугамъ большихъ круговъ, составляющимъ сферическій треугольникъ (фиг. 295). A, B, C двугранные углы между плоскостями этихъ большихъ круговъ. Дуги a, b, c служатъ сторонами сферическаго треугольника; углы A, B, C углами его.

*) С. Ли, родомъ шведъ, состоитъ въ настоящее время проффессоромъ Лейпцигскаго университета.

§ 450. 4) *Аналитическая геометрія.* Въ настоящей книгѣ аналитическая геометрія затронута лишь настолько, насколько она необходима для уразумѣнія анализа: пропущено изслѣдованіе общихъ уравненій 2-го порядка съ двумя и съ тремя перемѣнными, особые пріемы Аналитической Геометріи, геометрія кривыхъ и поверхностей высшихъ порядковъ.

Кромѣ координатъ Декартовыхъ, полярныхъ и сферическихъ, указанныхъ къ настоящей книгѣ, Аналитическая Геометрія пользуется многими другими системами координатъ: трилинейными, однородными, эллиптическими, криволинейными и проч.

Кромѣ обыкновенныхъ указанныхъ нами способовъ, она еще пользуется: проэктивнымъ способомъ (о немъ скажемъ, когда дойдемъ до геометріи положенія), способомъ взаимныхъ поляръ, теоріею линейныхъ преобразованій и проч.

Кромѣ точекъ, линій и поверхностей она разсматриваетъ еще болѣе сложныя формы, напримѣръ Плюккеровскіе *комлексы прямыхъ.* Примѣромъ такого *комплекса* можетъ служить совокупность всѣхъ прямыхъ касательныхъ къ поверхности трехоснаго эллипсоида. Менѣе сложныя совокупности составляются изъ такихъ прямыхъ, которыя принадлежатъ одновременно двумъ комплексамъ; такія *«пересѣченія»* двухъ комплексовъ называются *конгруэнціями.* Примѣромъ конгруэнціи можетъ служить совокупность прямыхъ, пересѣкающихъ двѣ данныя прямыя непараллельныя и непересѣкающіяся между собою. Наконецъ совокупность прямыхъ, принадлежащихъ одновременно двумъ конгруэнціямъ, составляетъ линейчатую поверхность. Напримѣръ, если изо всѣхъ прямыхъ, составляющихъ конгруэнцію прямыхъ пересѣкающихъ двѣ данныя прямыя, отберемъ только тѣ, которыя параллельны данной плоскости, то получимъ гиперболическій параболоидъ.

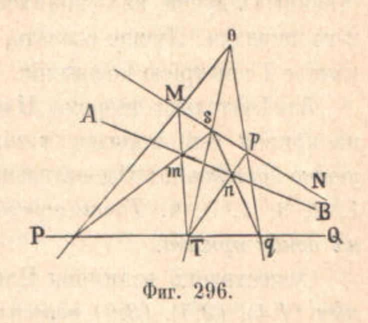
Аналитическая Геометрія изслѣдуетъ отдѣльно линіи 1-го, линіи 2-го, 3-го и 4-го порядка и начинаетъ изслѣдовать линіи порядковъ выше 4-го. Такъ же и съ поверхностями.

Кривыя и поверхности болѣе всего характеризуются особыми точками и теперь изслѣдованіе особыхъ точекъ уже поставлено на надлежащую высоту. Теорія особыхъ точекъ оказалась стоящею въ тѣсной связи съ общею теоріею функцій комплекснаго (мнимаго) перемѣннаго. Вообще въ математикѣ многія ея отдѣльныя отрасли тѣсно переплетаются между собою, и именно точки соприкосновенія отдѣльныхъ областей математики и представляютъ наибольшій интересъ.

§ 451. 5) *Геометрія положенія*—геометрія, очищенная отъ всякаго анализа, единственная математическая наука, не имѣющая никакого дѣла съ величинами, а только съ относительнымъ положеніемъ точекъ линій и поверхностей. О теоремахъ такого характера, не имѣющаго дѣла съ величинами, можно дать нѣкоторое понятіе слѣдующею задачею и способомъ ея рѣшенія.

Задача. Провести чрезъ точку m (фиг. 296) прямую, проходящую чрезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ MN и PQ, которыя до этой точки пересѣченія не продолжены.

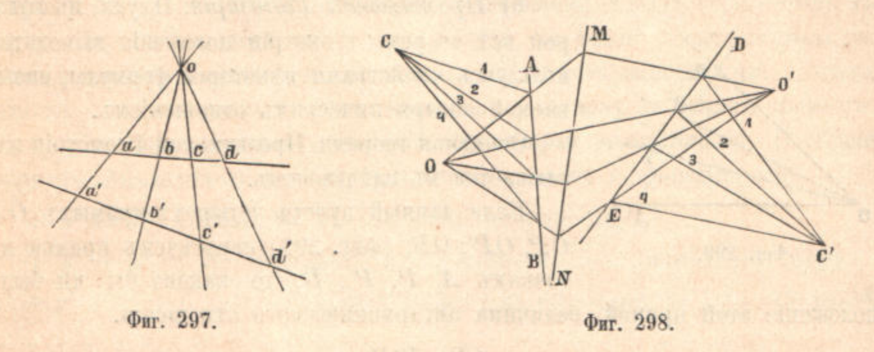
Рѣшеніе. Проводимъ чрезъ m какія нибудь прямыя SP и MT. Соединяемъ P съ M, T съ S. Получаемъ на пересѣченіи прямыхъ PM и TS точку O. Чрезъ O проводимъ какъ нибудь прямую Oq. Получаемъ точку пересѣченія n діагоналей Sq и pT образованнаго 2-го четырехсторонника $SpqT$. Соединяя m съ n, получимъ искомую прямую AB, которая пройдетъ чрезъ пересѣченіе MN съ PQ.



Фиг. 296.

Мы здѣсь не приводимъ доказательства справедливости такого рѣшенія, но приводимъ самое рѣшеніе, чтобы показать, что въ немъ мы не откладывали никакихъ величинъ, ни длины, ни угловъ: все устроилось нахожденіемъ различныхъ точекъ пересѣченія между собою проведенныхъ прямыхъ.

Методъ Геометріи положенія проэктивный. Совокупность прямыхъ выходящихъ изъ точки O называется ***пучкомъ***, O—центръ пучка (фиг. 297). Эти прямыя называются также ***проэктивными лучами***. Пересѣчемъ пучекъ прямыми *ад* и *а'д'*. Точки *а'b'c'д'* второй прямой называются проэкціями



Фиг. 297. Фиг. 298.

точекъ *a*, *b*, *c*, *д* первой прямой. Проэктивные лучи устанавливаютъ ***перспективное*** соотвѣтствіе между точками *a* и *a'*, *b* и *b'*, *c* и *c'*, *д* и *д'* (вообще между точками первой и точками второй прямой); соотвѣтственными называются точки, лежащія на одномъ и томъ же лучѣ. Прямая называется ***рядомъ***. Перспектива—это самое простое соотвѣтстіе пучка съ рядомъ; ряды *ад* и *а'д'* находятся въ перспективномъ соотвѣтствіи съ пучкомъ O. Разсмотримъ соотвѣтствіе болѣе сложное (фиг. 298). Два пучка O и O' находятся въ перспективномъ соотвѣтствіи если соотвѣтственные лучи проходятъ чрезъ однѣ и тѣ же точки какого либо ряда MN. Пересѣчемъ пучекъ O рядомъ AB, пучекъ O' рядомъ ED. Возьмемъ два новыхъ пучка C и C' такъ, чтобы между пучками O и C было установлено перспектив-

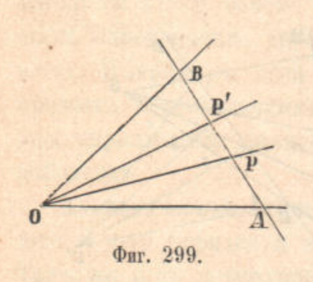
ное соотвѣтствіе рядомъ AB, и между пучками O' и C' было установлено перспективное соотвѣтствіе рядомъ ED. Пучки C и C' будутъ находиться въ *проэктивномъ* соотвѣтствіи, а именно будутъ соотвѣтственны лучи 1 съ $1'$, 2 съ $2'$, 3 съ $3'$, 4 съ $4'$, и такъ далѣе. Въ Геометріи положенія доказывается, что геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей, находящихся въ проэктивномъ соотвѣтствіи, есть кривая 2-го порядка. Лучше сказать, таково опредѣленіе кривой 2-го порядка, даваемое Геометріею положенія, и изъ него она выводитъ всѣ ихъ свойства.

Замѣчательна теорема Паскаля, состоящая въ слѣдующемъ: возьмемъ на кривой 2-го порядка какія либо 6 точекъ, соединимъ ихъ *въ какомъ угодно порядкѣ* послѣдовательными прямыми, назовемъ эти прямыя цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Точки пересѣченія прямыхъ 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 лежатъ на одной прямой.*

Существуетъ взаимная Паскалевой теоремѣ теорема Бріаншона: *прямыя (1,4), (2,5), (3,6) пересѣкаются въ одной точкѣ* *).

Эти теоремы позволяютъ, по даннымъ 5 точкамъ кривой 2-го порядка, найти сколько угодно остальныхъ ея точекъ. Кривая 2-го порядка, оказывается, вполнѣ опредѣляется такими 5-ью точками, изъ которыхъ никакія три не лежатъ на одной прямой.

Геометрія положенія захватываетъ теорію кривыхъ и поверхностей высшихъ порядковъ и теорію Плюккеровскихъ комплексовъ.



Фиг. 299.

6) *Проэктивная Геометрія.* Наука, въ которой всѣ теоремы геометріи положенія выводятся пользуясь свойствами нѣкоторой формулы, называемой ангармоническимъ отношеніемъ.

Основная теорема Проэктивной Геометріи заключается въ слѣдующемъ.

Если данный пучекъ четырехъ прямыхъ OA OP, OP', OB, (фиг. 299) пересѣченъ прямою въ точкахъ A, P, P', B, то каково бы ни было положеніе этой прямой, величина ангармоническаго отношенія.

$$\frac{AP \cdot P'B}{AP' \cdot PB}$$

остается постоянною.

7) *Высшая Геометрія.* Если не обращаютъ вниманіе на то, какими способоми излагаются теоремы Геометріи положенія и Проэктивной Геометріи, то научное изложеніе этихъ теоремъ называютъ Высшею Геометріею.

§ 452. 8) *Неэвклидова Геометрія.* Постулатъ Евклида, состоящій въ томъ, что чрезъ одну точку можно провести только одну прямую параллельную данной прямой, не обладаетъ такою убѣдительностью какъ другія аксіомы математики. Было много попытокъ доказать его, но всѣ онѣ не увѣнчались

*) Здѣсь цифрами обозначены самыя точки на кривой.

успѣхомъ. Наконецъ нашъ знаменитый математикъ Лобачевскій выяснилъ дѣло совершенно особеннымъ пріемомъ: доказать положеніе Евклида значитъ показать, что оно вытекаетъ изъ другихъ аксіомъ; это можно сдѣлать только въ томъ случаѣ, если постулатъ Евклида не представляетъ собою самостоятельной аксіомы. Если же онъ представляетъ собою самостоятельную аксіому, независимую отъ прочихъ, то и не можетъ быть ихъ слѣдствіемъ. Напротивъ того въ этомъ случаѣ, отвергнувъ справедливость постулата, можно построить геометрію, которая не войдетъ въ противорѣчіе ни сама съ собою, ни съ другими аксіомами. Лобачевскій и построилъ такую геометрію и доказалъ этимъ, что постулатъ Евклида или представляетъ собою совершенно особую аксіому и потому не можетъ быть доказанъ, или невѣренъ. Такую же отвергающую постулатъ Евклида геометрію намѣтилъ Риманъ. Эти три геометріи характеризуются слѣдующимъ: по Евклиду—пространство безконечно и неограниченно, по Лобачевскому оно безконечно, но ограничено, по Риману оно конечно, но безгранично. Въ послѣднее время Russel написалъ превосходную и самую полную монографію по этому вопросу. Заслуга Лобачевскаго громадна во первыхъ потому, что онъ совершенно строго показалъ невозможность *доказательства* постулата Евклида и этимъ избавилъ математиковъ отъ заблужденій. Во-вторыхъ, благодаря ему подвергаются весьма плодотворной критикѣ аксіомы геометріи и ихъ значеніе. Наконецъ Лобачевскій открылъ своимъ способомъ множество совершенно новыхъ горизонтовъ въ наукѣ. Что же касается постулата Евклида, то можно искать *замѣны* его *болѣе очевидною* аксіомою, но доказывать его, то есть выводить изъ другихъ аксіомъ,—это напрасный трудъ, который ни къ чему не можетъ привести.

9) *Геометрія многихъ измѣреній* или *теорія многообразій*. Обобщая формулы Аналитической Геометріи можно сказать напримѣръ, что:

$x^2 + y^2 = R^2$ выражаетъ въ плоскости окружность

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ выражаетъ въ простанствѣ 3-хъ измѣреній сферу.

$x^2 + y^2 + z^2 + U^2 = R^2$ выражаетъ сферу въ пространствѣ 4-хъ измѣреній.

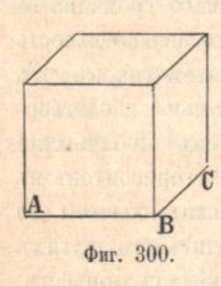
. . . .

Но при этомъ никакъ нельзя думать, что существуетъ реально пространство 4-хъ измѣреній. Пространства 4-хъ измѣреній мы и представить себѣ не можемъ. Тѣмъ не менѣе такой способъ выражаться, вводя слова сфера или плоскость 4-хъ измѣреній, весьма полезенъ, возбуждая мысль объ аналогіяхъ и особенно красиво приложенъ Софусомъ Ли къ теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Формы изучаемыя въ пространствахъ какихъ бы то ни было измѣреній называются *многообразіями*.

§ 453. 10) *Исчисленіе положеній*—Геометрія, въ которой аналитическія дѣйствія производятся не надъ координатами, а надъ самими линіями и поверхностями, обозначаемыми нѣкоторыми величинами. Сюда же относится *теорія эквиполленцъ* Беллавитиса.

11) *Теорія кватерніоновъ.* Желая освободиться отъ координатъ, вносящихъ въ задачу много ей чуждаго, англійскій математикъ Гамильтонъ создалъ особую науку—теорію кватерніоновъ, въ которой строго различаются величины не имѣющія направленія (потенціалъ, плотность) называемыя *скаларами* (Scalar) отъ величинъ имѣющихъ направленіе (сила, скорость) называемыхъ *векторами.* Надъ векторами производятся особыя дѣйствія (операціи) помощью особыхъ символовъ, удлиняющихъ или укорачивающихъ векторы, вращающихъ ихъ на опредѣленный уголъ и проч. Эта теорія играла бы весьма важную роль въ механикѣ и физикѣ, еслибы всѣ согласились ее примѣнять и привыкли бы къ ея сложнымъ обозначеніямъ, въ которыхъ, безъ достаточнаго навыка, легко спутаться. Недавно возникло между математиками различныхъ странъ особое общество, распространяющее эту теорію.

§ 454. 12) *Начертательная Геометрія.* Когда представляютъ на плоскомъ чертежѣ пространственные предметы, то приходится укорачивать удаляющіяся линіи. Напримѣръ въ изображеніи куба (фиг. 300) ребро BC дѣлается болѣе короткимъ чѣмъ AB, хотя въ дѣйствительности всѣ ребра куба равны между собою, но на чертежѣ необходимо укорачивать идущія въ даль линіи, потому что онѣ представляются укороченными глазу, наблюдающему дѣйствительность. Но какъ велико это укороченіе, остается неизвѣстнымъ, вслѣдствіе чего по такимъ чертежамъ нельзя узнать истинныхъ размѣровъ линій. Между тѣмъ для механиковъ, инженеровъ, архитекторовъ необходимо имѣть чертежи, которые представляли бы предметы такими (или почти такими), какими они представляются нашему глазу, но давали бы при этомъ возможность точно измѣрять всѣ линіи. Знаменитый Монжъ (Monge), приглядѣвшись къ чисто практическимъ пріемамъ, употребляемымъ каменщиками и другими мастерами, создалъ особую, удивительно удобную въ приложеніяхъ, науку—Начертательную Геометрію, которая даетъ возможность получать чертежи, похожіе на то, что представляется глазу и позволяющіе опредѣлять точно истинные размѣры удаляющихся линій.

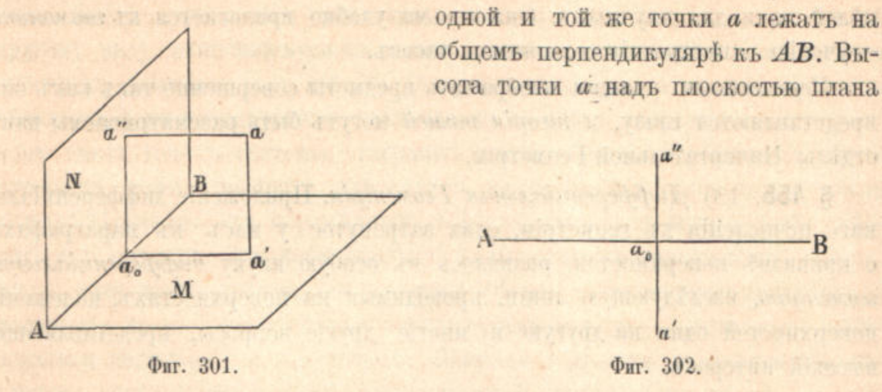


Фиг. 300.

Ортогональною проэкціею точки на плоскость называется основаніе перпендикуляра, опущеннаго на плоскость изъ данной точки. Въ Начертательной Геометріи пространственные предметы изображаются ортогональными проэкціями ихъ точекъ на горизонтальную плоскость, называемую *планомъ* и на вертикальную плоскость, называемую *фасадомъ.*

Пусть (фиг. 301) M изображаетъ плоскость плана, N—плоскость фасада. Положеніе точки a будетъ вполнѣ опредѣлено, если даны ея планъ a' и ея фасадъ a'', такъ какъ возставляя перпендикуляры изъ a' и a'' къ ихъ плоскостямъ, получимъ въ пересѣченіи перпендикуляровъ точку a. Но съ такими системами плоскостей, составляющихъ двугранный

уголъ, неудобно обращаться. Поэтому плоскость фасада вращаютъ около ребра AB до совмѣщенія съ плоскостью плана (на 90°); тогда получается изображеніе точки на *совмѣщенномъ* чертежѣ (фиг. 302). Ребро AB называется общимъ прорѣзомъ. Не трудно видѣть, что планъ a' и фасадъ a'' одной и той же точки a лежатъ на общемъ перпендикулярѣ къ AB. Высота точки a надъ плоскостью плана

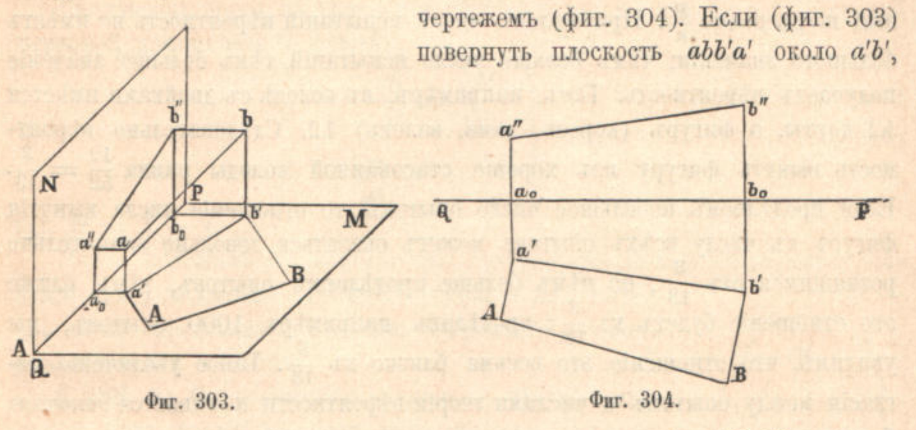


Фиг. 301. Фиг. 302.

равна a_0a''; разстояніе точки a отъ плоскости фасада равно a_0a'.

Чертежи начертательной геометріи представляютъ собою именно совмѣщеніе плана и фасада (какъ на фиг. 302). Въ началѣ изложенія этой науки прибѣгаютъ и къ пояснительнымъ чертежамъ, исполняемымъ обыкновеннымъ способомъ (какъ фиг. 303).

Покажемъ—какъ опредѣляется истинная длина прямолинейнаго отрѣзка ab (фиг. 303). Планъ его $a'\,b'$ и фасадъ $a''\,b''$ заданы совмѣщеннымъ чертежемъ (фиг. 304). Если (фиг. 303) повернуть плоскость $abb'a'$ около $a'b'$,



Фиг. 303. Фиг. 304.

то можно наложить ab на плоскость плана въ положеніе AB. При этомъ $a'A$ и $b'B$ будутъ перпендикулярны къ $a'b'$, и кромѣ того

$$a'A = a'a = a_0a''$$
$$b'B = b'b = b_0b''$$

Отсюда вытекаетъ такое построеніе на совмѣщенномъ чертежѣ (фиг. 304): проводимъ изъ a' и b' перпендикуляры къ $a'b'$, откладываемъ на нихъ

$$a_1A = a_0a''; \quad b'B = b_0b''.$$

Длина AB равна длинѣ прямой ab, изображенной планомъ $a'b'$ и фасадомъ ab.

Начертательною геометріею весьма удобно опредѣляются линіи пересѣченія поверхностей и проч. Она служитъ не только для практическихъ цѣлей, но и для научныхъ. Она весьма удобно прилагается къ *гномоникѣ* —ученію о построеніи солнечныхъ часовъ.

Перспектива, учащая изображать предметы совершенно такъ какъ они представляются глазу, и *теорія тѣней* могутъ быть разсматриваемы какъ отдѣлы Начертательной Геометріи.

§ 455. 13) *Дифференціальная Геометрія.* Приложеніе дифференціальнаго исчисленія къ геометріи, едва затронутое у насъ въ параграфахъ о кривизнѣ поверхностей, развилось въ особую науку *дифференціальную геометрію*, изслѣдующую линіи, проводимыя на поверхностяхъ, наложеніе поверхностей одна на другую и многіе другіе вопросы, представляющіе высокій интересъ.

Теорія вѣроятности.

§ 456. Если, изъ числа n одинаково возможныхъ событій, p совпадаютъ съ ожидаемымъ событіемъ, то дробь $\frac{p}{n}$ называется вѣроятностью ожидаемаго событія.

Напримѣръ, если въ ящикѣ находится n шаровъ одинаковой величины, изъ которыхъ p бѣлыхъ, а остальные черные, то вѣроятность вынуть бѣлый шаръ равна $\frac{p}{n}$. При маломъ числѣ испытаній вѣроятность не имѣетъ большого значенія; чѣмъ больше число испытаній, тѣмъ большее значеніе получаетъ вѣроятность. Такъ, напримѣръ, въ колодѣ съ двойками имѣется 52 карты, а фигуръ (король, дама, валетъ) 12. Слѣдовательно вѣроятность вынуть фигуру изъ хорошо стасованной колоды равна $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$. Если продѣлаемъ небольшое число опытовъ, то отношеніе числа вынутія фигуръ къ числу всѣхъ опытовъ можетъ оказаться довольно значительно розднящимся отъ $\frac{3}{13}$, но чѣмъ больше продѣлаемъ опытовъ, тѣмъ ближе это отношеніе будетъ къ $\frac{3}{13}$; продѣлавъ напримѣръ 1000 опытовъ, мы увидимъ, что отношеніе это весьма близко къ $\frac{3}{13}$. Такое увеличеніе согласія между опытомъ и числами теоріи вѣроятности называется *закономъ большихъ чиселъ*.

Наиболѣе важное значеніе теорія вѣроятности пріобрѣтаетъ при обработкѣ наблюденій. Можно сказать, что во многихъ случаяхъ астрономъ, пользующійся теоріею вѣроятности, но располагающій неточными инструментами, можетъ дать столь же точныя цифры какъ астрономъ, обладающій болѣе точными инструментами, но пренебрегающій теоріею вѣроятности.

Въ этомъ отношеніи особенно полезенъ отдѣлъ теоріи вѣроятности, называемый *способомъ наименьшихъ квадратовъ*.

II. Прикладная математика.

§ 457. 1) *Аналитическая механика*—наука о движенiи, сведенная Лагранжемъ на интегрированiе дифференцiальныхъ уравненiй извѣстнаго типа. Дифференцiальныя уравненiя механики (769) Лагранжъ привелъ къ другому виду, относящемуся къ *независимымъ координатамъ.* Каждая связь стѣсняетъ движенiе системы. Въ Декартовыхъ координатахъ каждая точка обладаетъ 3-мя координатами, такъ что число всѣхъ координатъ = утроенному числу точекъ системы. Лагранжъ вводитъ новыя перемѣнныя, число которыхъ равно разности утроеннаго числа точекъ системы и числа условiй. Принявъ эти перемѣнныя за координаты, уже нечего болѣе заботиться о связяхъ. Эти координаты и называются независимыми. Напримѣръ, если точка должна двигаться по сферѣ, то незачѣмъ опредѣлять ее положенiе тремя сферическими координатами r, λ, φ — достаточно пользоваться долготою λ и широтою φ. Широта и долгота и будутъ независимыми координатами точки, принужденной двигаться по сферѣ.

Эти уравненiя Лагранжа имѣютъ, въ случаѣ существованiя потенцiала U видъ:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (939)$$

гдѣ T живая сила; $p = \frac{\partial T}{\partial q}$, q независимыя координаты, i значки, отмѣчающiе различныя координаты.

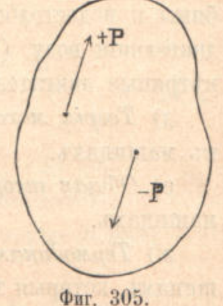
Гамильтонъ привелъ уравненiя (939) къ весьма интересной такъ называемой канонической формѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (940)$$

гдѣ $H = T - U$.

Якоби положилъ основанiя теорiи интегрированiя каноническихъ уравненiй (940) механики. Развитiе ученiя о ихъ интегрированiи представляетъ собою существенную часть аналитической механики.

§ 458. 2) *Теоретическая механика.*—Наука о движенiи. Какъ частный случай движенiя она изучаетъ и равновѣсiе. Она заключаетъ въ себѣ аналитическую механику и всѣ другiе способы изслѣдованiя равновѣсiя и движенiя, какъ напримѣръ:



Фиг. 305.

а) *Теорiю сложенiя силъ и паръ. Парою силъ* называются двѣ равныя и противоположно направленныя параллельныя между собою силы P и $-P$ (фиг. 305) приложенныя къ твердому тѣлу. Разстоянiе между параллелями, по кото-

рымъ направлены составляющія пару силы P и $-P$, называется *плечомъ пары.* Перпендикуляръ, возставленный изъ какой-нибудь точки плоскости пары къ этой плоскости, называется *осью* пары. Векторъ отложенный на оси пары и равный произведенію P на плечо называется *моментомъ* пары. Доказывается, что данная пара равносильна всякой другой парѣ, у которой тотъ же моментъ по величинѣ и направленію.

Послѣдній выводъ этой теоріи, основанной Пуансо (Poinsot), заключается въ слѣдующемъ: *всякая совокупность силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ твердаго тѣла, можетъ быть приведена къ одной силѣ и къ такой парѣ, моментъ которой направленъ по этой силѣ—то есть къ винтовому усилію.*

Эта теорема теоріи паръ въ связи съ плюккеровсками комплексами породила особую *теорію винтовъ,* въ которой слагаются между собою не отдѣльныя силы, а именно винтовыя усилія. Подобно тому какъ паралеллограммъ служитъ для сложенія силъ, — особая линейчатая поверхность *цилиндроидъ* служитъ для сложенія винтовъ. Уравненіе цилиндроида таково:

$$z\,(x^2 + y^2) = 2p\,xy \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (941)$$

б) Геометрическіе методы въ кинематикѣ твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

в) Геометрическіе методы въ теоріи движенія твердаго тѣла около неподвижной точки.

§ 459. 3) *Практическая механика.* Обширная наука о приложеніи механики къ машинамъ.

а) *Теорія упругости*—ученіе о движеніи и равновѣсіи упругихъ тѣлъ.

б) *Графическая статика* — ученіе объ особомъ способѣ графически (помощью извѣстнаго рода чертежей) рѣшать задачи на равновѣсіе.

в) *Теорія сопротивленія матеріаловъ*—ученіе о прочности матеріаловъ, употребляемыхъ при сооруженіи машинъ, зданій, плотинъ и проч. и основанное на теоріи упругости и на графической статикѣ ученіе о растяженіи, сжатіи, сгибаніи, скалываніи и крученіи упругихъ тѣлъ различной формы.

г) *Гидравлика*—ученіе о движеніи воды въ трубахъ, каналахъ и рѣкахъ и о двигателяхъ, дѣйствующихъ силою воды: водяныя колеса, турбины и водостолбовыя машины. Въ гидравликѣ же изучаются машины, двигающія воду (насосы и проч.). Кромѣ того гидравлика же изучаетъ вѣтряные двигатели и воздуходувки.

д) *Теорія механизмовъ*—ученіе о передачѣ и преобразованіи движенія въ машинахъ.

е) *Общая теорія машинъ* — ученіе о треніи и передачѣ работы въ машинахъ.

ж) *Термодинамика*—ученіе о теплотѣ въ примѣненіи къ тепловымъ машинамъ, которыя теперь раздѣляются: на паровыя, газовыя и керосиновыя.

з) *Ученіе о животныхъ двигателяхъ* — о работѣ, сообщаемой машинамъ силою человѣка и животныхъ.

§ 460. 4) *Математическая физика.*

а) *Термодинамика* — ученіе о теплотѣ—распадается на изслѣдованіе общихъ уравненій и законовъ на почвѣ начала сохраненія энергіи, на ученіе о теплопроводности и на кинетическую теорію газовъ, въ которой газъ разсматривается какъ совокупность весьма быстро движущихся частицъ.

б) *Электро-магнитизмъ* — (электричество, магнитизмъ, гальванизмъ и проч.).

в) *Оптика*—ученіе о свѣтѣ.

г) *Акустика*—ученіе о звукѣ.

д) *Теорія упругости.*

§ 461. 5) *Астрономія.*

а) Сферическая астрономія, изучающая преобразованія астрономическихъ координатъ. Помощью этихъ-то преобразованій астрономъ и выводитъ заключеніе объ истинномъ движеніи свѣтилъ, по тѣмъ кажущимся движеніямъ, которыя онъ наблюдаетъ.

б) *Поправки.* Положеніе свѣтилъ представляется намъ не такимъ, какое ими занимается въ дѣйствительности. Въ Астрономіи изучаются способы, при помощи которыхъ освобождаются отъ ошибокъ, вносимыхъ рефракціею (преломленіемъ лучей въ атмосферѣ), прецессіею, нутаціею, аберраціею и параллаксомъ.

в) *Геодезія*—наука объ измѣреніи земного шара.

г) Опредѣленіе географическихъ мѣстъ.

д) Опредѣленіе планетныхъ и кометныхъ орбитъ изъ наблюденій.

е) Небесная механика—ученіе о движеніи небесныхъ тѣлъ.

ж) Физическая астрономія.

ГЛАВА II.

Литература по чистой математикѣ.

§ 462. 1) *Теорія чиселъ:*

Чебышевъ. Теорія сравненій, 1849 г. Ц. 2 р. 50 к.

Бугаевъ. Ученіе о числовыхъ производныхъ, 1870. Ц. 3 р. 50 к.

Gauss. Disquisitiones arithmeticae.

Legendre. Théorie des nombres, 1830. 2 Vol. Ц. 120 фр.

Leujeune Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1879. 2 Vol. Ц. 13 мр. 20 пф. Это сочиненіе содержитъ и теорію формъ.

§ 463. 2) *Высшая Алгебра.*

Тоттгёнтеръ. Начальная теорія уравненій. Ц. 3 р.

Ващенко-Захарченко. Высшая Алгебра.

Тихомандрицкій. Краткій курсъ высшей алгебры. Ц. 2 р. 50 к.

Serret. Cours d'algebre supérieure, 5 edit., 2 Vol. Ц. 20 фр. (классическій курсъ).

Weber. Lehrbuch der Algebra, 2 Vol. 1895—1896. Ц. 45 fr. Лучшее руководство.

Ващенко-Захарченко. Теорія опредѣлителей и теорія формъ.

Salmon. Lessons introduct. to the modern higher algebra, 1866. Ц. 4 фр.

Salmon. Theorie der lineären Transfarmationen.

§ 464. 3) *Теорія конечныхъ разностей.*

Марковъ. Исчисленіе конечныхъ разностей, 1891. Ц. 2 р. 50 к.

Въ курсѣ Анализа Штурма, есть краткое изложеніе исчисленія конечныхъ разностей.

§ 465. 4) *Анализъ (дифференціальное и интегральное исчисленіе).*

Тотгёнтеръ. Дифференціальное вычисленіе, 1873. Ц. 3 р.

Sturm. Cours d'Analyse de l'école polytechnique. Ц. 15 фр. Существуетъ русскій переводъ этой весьма распространенной книги.

Рощинъ. Записки по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ, 1888. Ц. 6 р.

Алексѣевъ. Интегральное исчисленіе. Ц. 3 р.

Поссе. Курсъ интегральнаго исчисленія, 1891. Ц. 2 р. 50 к.

Шиффъ Вѣра J. Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Ц. 2 р.

Алексѣевъ. Дифференціальныя уравненія.

Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики, 1867.

Коркинъ и Имшенецкій, два русскіе ученые, внесшіе много новаго въ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Къ сожалѣнію труды Имшенецкаго очень трудно достать въ продажѣ, печатались они въ ученыхъ запискахъ Казанскаго университета 1864 и 1868 г.г.

Hoüel. Cours de calcul infinitésimal, 4 тома. Ц. 50 фр.

Laurent. Traité d'Analyse, 7 томовъ. Ц. 70 фр. Каждый томъ продается отдѣльно.

Jordan. Cours d'Analyse de l'école polytechnique, 3 тома, 1894—1896. Ц. 45 фр. Содержитъ теорію мнимаго перемѣннаго.

Picard. Traité d'Analyse, 3 тома, 1891. Ц. 48 фр.—Содержитъ теорію мнимаго перемѣннаго.

Hermite. Cours d'Analyse, литографированъ. Ц. 30 фр. Содержитъ теорію мнимаго перемѣннаго.

Bertrand. Traité de calcul differentiel et de calcul integral. Ц. 145 fr.

Schlömilch. Compendium der höheren Analysis. Ц. 18 mr.

Serret. Cours de calcul differentiel et intégral. Ц. 24 фр.

Meray. Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale, 1894—1899, 3 тома. Ц. 29 фр. Отличается большою строгостью выводовъ и опредѣленій.

Painlevé. Leçons sur le theorie analytique des equations differentielles. Литографиров. Ц. 20 fr.

Painlevé. Leçons sur l'intégration des équations differentielles de la mecanique et applications, 1895. Ц. 14 fr. Прекрасное руководство для изученія метода Якоби-Гамильтона.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik. Ц. 25 fr.—Классическое сочиненіе по интегрированію уравненій съ частными производными.

Goursat. Leçons sur l'intégration des equations aux derivées partielles du deuxième ordre, 2 тома, 1896—98. Ц. 18 fr.

Некрасовъ. Линейныя дифференціальныя уравненія.

Анисимовъ. Линейныя дифференціальныя уравненія.

S. Lie. Theorie der Differentialgleichungen, 1892. Ц. 17 fr.

S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen, 1888—1893, 3 тома. Ц. 72 фр.

§ 466. 5) *Общая теорія аналитическихъ функцій (теорія мнимаго перемѣннаго).*

Покровскій. Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго. Ц. 1 р. (основной курсъ).

Biermann. Theorie der analytischen Functionen, 1887. Ц. 12 mr. 80 pf. Составлено по Вейерштрассу.

Dürege. Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. 1864. (Основной курсъ).

Burkhardt. Einführung in die Theorie der analytishen Functionen einer complexen veränderlichen, 1897. Краткое и ясное изложеніе теоріи и новѣйшихъ взглядовъ.

Picard, Jordan, Hermite—указанные выше курсы анализа.

Weierstrass. Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes (переводъ сдѣланъ Пикаромъ), 1879. Ц. 15 fr.

Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre, 1886. Ц. 13 fr. 50.

Appel et Goursat. Theorie des fonctions algebriques et de leurs intégrales, 1895. Ц. 16 fr.

F. Klein. Verlesungen über Riemansche Flächen, Ц. 15 fr. 50.

Riemann. Grundlage für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, 1851. Классическій мемуаръ.

§ 467. 6) *Эллиптическія функціи.*

Покровскій. Теорія эллиптическихъ функцій. Ц. 2 р. 25 к.

Halphen. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, 1891—1891, 3 тома. Ц. 42 fr. Весьма полное руководство, содержащее новыя формулы *Вейерштрасса.*

Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Ц. 3 fr.

Weierstrass. Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques. Ц. 10 fr. Французскій переводъ изданія Шварца.

Tannery et Molk. Théorie des fonctions elliptiques, 1891—1895, 2 тома. Ц. 16 fr. Весьма ясное изложеніе.

Briott et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques, 1875. Ц. 28 fr. Весьма полное, но немного устарѣлое изложеніе.

Классическіе труды Абеля и Якоби въ:

Abel Oeuvres complètes, 1881. Ц. 24 fr.

Jacobi Mathematiche Werke herausgegeben von Weierstrass, 1884—1891, 7 томовъ. Ц. 130 fr.

F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, 1891—1893, 2 тома, Ц. 55 fr.

§ 468. 7) *Сферическія функціи.*

Heine. Handbuch der Kugelfunctionen, 1861. Ц. 3 fr.

Heine. Handbuch der Kugelfunctionen, 1878. Ц. 16 fr.

Thomson und Tait. Handbuch der Theoretischen Physik, 1871. Ц. 12 mr. (переводъ Гельмгольтца).

Thomson und Tait. Treatise on Natural Philosophy. Ц. 16 mr.

Maxwell. Electricity and Magnetism.

Maxwell. Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus (переводъ Weinstein'a), 1883.

§ 469. 8) *Варьяціонное исчисленіе.*

Лѣтниковъ. Варьяціонное исчисленіе, 1890. Ц. 1 р. 25 к.

Ващенко-Захарченко. Варьяціонное исчисленіе, 1890. Ц. 1 р. 75 коп.

Moigno. Calcul der variations. Ц. 6 фр. (классическое руководство).

§ 470. 9) *Теорія группъ преобразованій.*

S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen, 1888—1893, 3 тома. Ц, 72 fr.

§ 471, 10) *Сферическая тригонометрія.*

Брюнновъ. Сферическая астрономія.

§ 472. 11) *Аналитическая Геометрія.*

Андреевъ. Основной курсъ Аналитической Геометріи, 1887—1888, Ц. 3 р. 50 к. — Замѣчательное соединеніе ясности, сжатости и полноты изложенія.

Ващенко-Захарченко. Аналитическая Геометрія, 1887. Ц. 5 р.

Граве. Аналитическая Геометрія.

Самый лучшій, классическій, трактатъ по Аналитической геометріи, содержащій и теорію кривыхъ и поверхностей высшихъ порядковъ, это написанное первоначально на англійскомъ языкѣ сочиненіе Салмона, состоящее изъ отдѣльныхъ томовъ:

Salmon. Treatise on conic sections, 1873. Ц. 12 шиллинг.

Salmon. Treatise on the higher plane curves. Ц. 7 fr.

Salmon. Treatise on the analytic geometry of three dimensions. Ц. 15 fr.

Salmon. Analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearbeitet von Fiedler. Ц. 16 мр. 80 пф.

Salmon. Analytische Geometrie des Raumes, bearbeitet von Fiedler. Ц. 24 мр.

Salmon. Traité de Géomerie analytique (Sections coniques). Ц. 12 fr.

Salmon. Traité de Géometrie (Courbe planes). Ц. 12 fr.

Salmon. Traité de Géometrie analytique à trois dimensions. Ц. 17 fr. 50 c.

Сальмонъ. Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній, Ц. 5 р.

Сальмонъ. Аналитическая Геометрія трехъ измѣреній. Ц. 3 р. (не всѣ части подлинника).

Briot et Bouquet. Leçons de géometrie analytique. Ц. 8 fr. 75 c. (хорошій учебникъ).

Plücker. Neue Geometrie des Raumes. Содержитъ теорію комплексовъ.

Königs. La géometrie reglée et ses applications, 1896. Ц. 5 fr. (содержитъ теорію комплексовъ).

§ **473**. 12) *Геометрія положенія.*

Reye. Die Geometrie der Lage, 1877—1880, 3 тома. Ц. 12 fr.

§ **474**. 13) *Высшая геометрія.* (Проективная Геометрія).

Steiner. Vorlesungen über synthetische Geometrie. Ц. 14 Mr

Chasles. Traité de Géometrie supérieure, 1852. Ц. 15 fr.

Chasles. Traité de Géometrie supérieure, 1880. Ц. 35 fr.

Chasles. Memoires de Géometrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie. Ц. 6 fr.

Шаль. Исторія Геометріи (изданіе Московск. Мат. Общ.). Ц. 3 р.

§ **475**. 14) *Неэвклидавы геометріи.*

Лобачевскій. О началахъ Геометріи («Казанскій Вѣстникъ», 1829—1830).

Лобачевскій. Воображаемая Геометрія. Ученыя записки Казанскаго Университета, 1835.

Лобачевскій. Новыя начала геометріи. Учен. зап. Казанск. Унив. 1835, 1836, 1837, 1838 г.г.

Гауссъ, Бельтрами, Риманнъ, Гельмгольтцъ, Ли, Пуанкаре, собраніе статей объ основаніяхъ геометріи, 1893, изд. Казанск. Физ. Мат. Общ. Ц. 1 р.

Сжато пересказаны идеи Лобачевскаго въ предисловіи къ переводу «Началъ Евклида», сдѣланному Ващенко-Захарченко.

Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Ц. 2 fr.

Lobatschewsky. Pangéometrie ou précis de géometrie fondeé sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Ц. 10 fr.

F. Klein. Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. Ц. 19 fr. 50 c. lithogr.

Недавно вышло прекрасное и весьма многое уясняющее сочиненіе:

Russel. An essay on the Foundations of geometry, 1897. Ц. 9 fr. 75 с.; выходитъ французскій переводъ этой прекрасной книги.

§ 476. 15) *Многообразіе многихъ измѣреній.*

Млодзѣевскій. О многообразіяхъ, 1889.

Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Riemans Werke. Ц. 16 Mr. Русскій переводъ этой статьи находится въ указанномъ сборникѣ Казанск. Физ. Мат. Общ.

§ 477. 16) *Исчисленія положеній.*

Богуславскій. Алгебра плоскости и пространства, 1891.

Ермаковъ. Теорія векторовъ на плоскости, 1887.

Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre. Ц. 12 fr.

Möbius. Der Barycentrische Calcul. Ц. 12 fr.

Bellavitis. Sposizione del metodo delle equipollenze, 1854.

§ 478. 17) *Теорія кватерніоновъ.*

Hamilton. Lectures on Quaternions. Ц. 75 fr.

Hamilton. Elements of quaternions. Ц. 100 fr.

Hoüel. Théorie des quaternions. Ц. 12 fr.

Laisant. Introduction à la methode des quaternions. Ц. 4 fr. 50 c.

Котельниковъ. Винтовое счисленіе, 1895. Ц. 2 р.

§ 479. 18) *Начертательная Геометрія.*

Макаровъ. Начертательная Геометрія.

Monge. Géometrie descriptive, 1820. Ц. 6 fr.

La Gournerie. Traité de Géometrie descriptive, въ трехъ частяхъ, каждая по 10 fr.

La Gournerie. Traité de perspective linéaire. Ц. 25 fr.

§ 480. 19) *Дифференціальная Геометрія.*

Букрѣевъ. Курсъ приложеній диф. и интегр. исчисл. къ геометріи. Ц. 1 р. 50 к., 1900.

Darboux. Leçons sur ia théorie générale des surfaces, 4 тома. 1887—1896. Ц. 52 fr. Прекрасное, отличающееся полнотою содержанія и ясностью, изложеніе,—содержитъ многое по интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

Monge. Applications de l'Analyse à la géometrie, 1809. Ц. 12 fr.

§ 481. 20) *Теорія Вѣроятностей.*

Буняковскій. Основанія математической теоріи вѣроятностей, 1846. Ц. 3 р.—со многими практическими примѣненіями.

Ермаковъ. Теорія вѣроятностей, 1879. Ц. 1 р. 50 к.

Ермаковъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ, 1887.

Laplace. Oeuvres complètes, т. VII. Ц. 35 fr.

Poisson. Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et criminelle, 1837. Ц. 7 fr.

Quetelet. Lettres sur la théorie des probabilités, 1846. Ц. 12 fr.

Литература по прикладной математикѣ.

§ 482. 1) *Аналитическая и теоретическая механика.*

Курсы на русскомъ языкѣ.

Слудскій. Курсъ теоретической механики. 1881. Ц. 2 р. 50 к. Краткое и ясное изложеніе.

Бобылевъ. Курсъ аналитической механики, 3 части по 2 р. 50 к., 1882—1885. Очень обстоятельный курсъ со множествомъ примѣровъ.

Сомовъ. Раціональная механика 1862—1877. Особенно развита кинематика.

Жуковскій. Лекціи по гидродинамикѣ. 1887.

Классическія творенія.

Newton. Philosophiae naturalis principia mathematica, Ц. 60 fr.

Lagrange. Mécanique Analitique, новое изд. 1889. Ц. 40 fr.

Jacobi. Vorlesunhen über Dynamik.

Особенно замѣчательныя книги.

Thomson and Tait. Treatise of Natural Philosophy. Ц. 16 Mr., и нѣмецкій ея переводъ, сдѣланный Гельмгольтцемъ и Вертгеймомъ:

Thomson und Tait. Handbuch der theoretischen Physik.—Замѣчательная книга, въ которой обращено особенное вниманіе на философское значеніе формулъ. Написана въ два шрифта: крупный можно читать съ меньшею математическою подготовкою. Для желающихъ прилагать механику къ изученію природы это пожалуй наиболѣе поучительная книга.

Kirchhoff. Vorlesungen üher mathematische Physik., т. I. Mechanik., 1877. Ц. 8 Mr.

Helmholtz. Ueber die Erhaltung der Kraft. Ц. 6 Mr.

Poinsot. Théorie nouvelle de la rotation des corps, 1851. Ц. 15 fr. Замѣчательно ясное геометрическое представленіе вращенія тѣла около одной точки.

Poinsot. Sur la percussion des corps, 1857. Ц. 4 fr. Классическая теорія удара.

Lamb. Hydrodynamics.

Курсы.

Appell. Traité de mécanique rationnelle, 1893—1895, 2 тома. Ц. 32 fr.

Poisson. Traité de mécanique. 1833. Ц. 10 fr.

Despeyrous. Cours de mécanique, avec notes de Darboux, 1884—1886, 2 тома. Ц. 30 fr.

Bour. Cour de mécanique et machines, 3 т. и 2 атласа. Ц. 23 fr. 50 c.

Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1870. Ц. 14 Mr.—Особенно хорошо изложено движеніе твердаго тѣла и соотношенія механики съ плюккеровскимъ комплексомъ.

Collignon. Traité de mécanique, 1886, 5 томовъ. Ц. 25 р.—очень хорошій и весьма полный курсъ.

Routh. Dynamics of a system of rigid Bodies. 1882—1884. Ц. 25 fr.

Moigno. Leçons de mécanique analytique, 1868. Ц. 12 fr. Составлено по Cauchy.

Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Изложеніе работъ Ball'я по приложенію теоріи винтовъ къ механикѣ твердаго тѣла.

Saint Germain. Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle. Ц. 9 fr. 50 c. Задачникъ.

§ 483. 2) *Теорія упругости.*

Бобылевъ. Гидростатика и теорія упругости, 1886. Ц. 1 р. 70 к.

Kirchhoff. Mechanik. 1887. Ц. 8 Mr. (1-й т. его Theoret. Phisik.),

Lamé. Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1852. Ц. 15 fr.

Thomson и Tait. Приведенное выше сочиненіе.

Saint-Venant. Mémoire sur la torsion des prismes avec des considérattons sur leur flexion, 1855. Ц. 10 fr.

§ 484. 3) *Графическая статика.*

M. Levy. La statique graphique et ses applications aux constructions, 1873. Ц. 12 fr. Второе изданіе весьма пополнено, но стоитъ 63 fr.

§ 485. 4) *Теорія сопротивленія матеріаловъ.*

Кирпичевъ. Теорія сопротивленія матеріаловъ.

Паукеръ. Строительная механика, 1891. Ц. 5 р.

Bach. Elasticität und Festigkeit.

Collignon. Cours de mécanique appliquée aux constructions, Premièro partie: resistance des matériaux. 1885.

Bresse. Cours de mécanique appliquée,, 1-re partie. Ц. 13 fr.

Leman. Cours de resistace des matériaux, 1895. Ц. 25 fr.

Müller-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 1893. Ц. 5 fr.

§ 486. 4) *Гидравлика.*

Тиме. Гидравлическіе двигатели, 1891. Ц. 6 р. 50 к.; весьма практично изложенный трактатъ, съ изслѣдованіемъ всѣхъ механическихъ и конструктивныхъ подробностей.

Евневичъ. Курсъ Гидравлики, 1891. Ц. 6 р. Прекрасно составленный курсъ.

Bach. Die Wasserräder, 1886. Ц. 36 Mr.—Прекрасно излагаются турбины и водяныя колеса.

Meiszner. Theorie und Ban der Turbinen und Wasserräder, 1880. Ц. 45 Mr.

§ 487. 6) *Теорія механизмовъ.*

Reuleaux. Theoretische Kinemaiik, 1875. Ц. 17 mr.—Классическое сочиненіе, произведшее совершенный переворотъ во взглядахъ на машину. Изложено необыкновенно просто и интересно, читается совершенно легко.

Reuleaux. Cinématiqne (переводъ его Theor. Kinematik. на французскій языкъ).

Burmester. Lehrbuch der Kinematik.

§ 488. 7) *Термодинамика.*

Тиме. Практическій курсъ паровыхъ машинъ, 1887. Ц. 12 р.

Головъ. Двигатели малой силы.

Reiche. Der Dampfmaschinen-Constructeur, 2 т., каждый томъ по 16 марокъ. 2-й томъ содержитъ разсчетъ машинъ примѣнительно къ шахтамъ, насосамъ и проч.

Harabak. Hilfsbuch für die Dampfmaschinentechniker, 1891. Ц. 16 mr.

Busley. Die Schiffmaschinen, 1886.

Hirn. Théorle mecanique da la chaleur, 1876. Ц. 24 fr.

Zeuner. Technische Thermodinamik, 1887—1890.

§ 489. 8) *Общія сочиненія по практической механикѣ.*

Евневичъ. Курсъ прикладной механики (съ атласомъ).

Вейсбахъ. Практическая механика. 5 томовъ.

Худяковъ. Детали машинъ.

Weisbach, bearbeitet v. Hermann.

Grasshoff. Theoretiche Maschinenlehre. 3 тома.

Rühlmann. Allgemeine Maschinenlehre.

Литература по математической физикѣ.

§ 490. 1) *Термодинамика.—Ученіе о теплотѣ.*

Clausius. Mechanische Wärmetheorie, 1876—1891. Ц. 22 mr. 40 pf. Классическое произведеніе. Общіе законы и уравненія термодинамики.

Poiucaré. Thermodynamique, 1892. Ц. 16 fr.

Fourier. Théorie analytique de la chaleur. Ц. 16 fr. Классическое сочиненіе по теплопроводности.

Meyer, O. E. Die Kinetische Theorie der Gase, 1877. Ц. 8 mr.

2) *Электричество.*

Боргманъ. Основы ученія объ электрическ. и магнитн. явленіяхъ.

Жуберъ. Основы ученія объ электричествѣ.

Maxwell. Treatise on Electricity and Magnetism, 1873. Ц. 31 mr. Классическое сочиненіе. Переводъ идей Фарадея на математическій языкъ, Максуелль нашелъ, что электричество распространяется какъ свѣтъ волнами эфира. Эта книга составила эпоху въ физикѣ. Переводы этого сочиненія:

Maxwell. Traité d'electricité et de magnétisme, 1885—1889. Ц. 24 fr.

Maxwell. Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus, 1883.

Bolzmann. Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und des Magnetismus. Ц. 5 mr.

Mascart et Joubert. Electricité et Magnetisme.

Poinçaré. Electricité et Optique, 1890—1891. Ц. 19 fr.

Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik, t. III, Electricität. Ц. 8 mr.

3) *Оптика.*

Kirchhoff. Vorlesungen über mathematishe Physik., т. II Optik., 1891. Ц. 10 mr.

Poincaré. Théorie mathématique de la lumière, 1889. Ц. 16 fr. 50 c.

Mascart. Traité d'optique.

4) *Акустика.*

Rayleigh. Theory of Sound, 1877—1878. Ц. 25 mr.

Столѣтовъ. Введеніе въ акустику и оптику.

5) *Общаго содержанія книги:*

Шиллеръ. Теорія потенціальной функціи и обозрѣніе ея приложеній къ вопросамъ физики, 1885. Ц. 1 р. 50 к.

Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung an physikalische Fragen, 1876. Ц. 8 mr.

Neumann. Vorlesungen über mathematische Physik:

Einleitung in der theoret. Physik., 1883. Ц. 8 mr. (механика).

Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers, 1885. Ц. 11 mr. 60 pf.

Theoretische Optik., 1885. Ц. 9 mr. 60 pf.

Theorie des Magnetismus, 1881. Ц. 3 mr. 60 pf.

Electrische Ströme, 1884. Ц. 9 mr. 60 fr.

Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen, 1887. Ц. 12 mr.

Mathieu. Cours de Physique mathématique.

Indroduction-Méthodes d'intégraiion, 1873. Ц. 15 fr.

Théorie de la Capillarité, 1883. Ц. 10 fr.

Théorie du potentiel, 1885—1886. Ц. 21 fr.

Théorie de l'électrodynamique, 1888. Ц. 15 fr.

Theorie de l'élasticité, 1890. Ц. 20 fr.

Литература по Астрономіи.

§ 491. 1) *Сферическая Астрономія, и поправки.*

Brünnow. Traité d'astronomie sphérique et d'astronomie pratique, 1869—1872. Ц. 30 fr.

2) *Геодезія.*

Іорданъ. Руководство высшей геодезіи, 1881. Ц. 8 р.

Кларкъ. Геодезія, 1890. Ц. 2 р.

3) *Опредѣленіе географическихъ мѣстъ.*

Савичъ. Приложеніе практической астрономіи къ геометрическому опредѣленію мѣстъ, 1868—1871. Ц. 4 р. 75.

Brünnow (указано выше).

4) *Опредѣленіе планетныхъ и кометныхъ орбитъ.*

Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Ц. 28 fr.

Oppolzer. Zum Bestimmung der Bahnelemante, 1878. Ц. 1 fr. 50 с.

5) *Небесная механика.*

Цингеръ. Элементарная теорія эллиптическаго движенія планетъ, оттискъ IV тома Трудовъ Отдѣл. Физ. Наукъ Обществ. Любителей Естествознанія. Ц. 50 коп.

Gauss. Theoria motus corporum coelestium, 1809. Ц. 12 fr.

Laplace. Traité de mécanique céleste, 5 томовъ. Ц. 85 fr.

Poincaré. Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, 1894—1896. Ц. 26 fr.

ЗАДАЧИ.

Аналитическая Геометрія на плоскости.

Прямая линія и окружность. (По тексту отъ 1—18 параграфа).

1) Построить треугольникъ, вершины котораго суть: (2,3), (4,—5), (—3,—6) если за 1 длины принятъ 1 сантиметръ.

2) Найти разстояніе точки (a, b) отъ начала координатъ.

3 Найти разстояніе точки (3,4) отъ начала координатъ.

4) Написать уравненіе окружности, центръ которой находится въ началѣ координатъ, а радіусъ равенъ 5.

5) Найти точку пересѣченія прямыхъ $3x + 5y = 13$; $4x - y = 2$.

6) Написать уравненіе прямой, пересѣкающей ось y на разстояніи равномъ 3 отъ начала и составляющей съ осью x уголъ въ 30°.

7) Написать уравненіе прямой, пересѣкающей ось x на разстояніи равномъ a отъ начала и составляющей съ осью y уголъ, тангенсъ котораго равенъ k.

8) Написать уравненіе прямой, отсѣкающей отъ оси x отрѣзокъ равный 5 и отъ оси y отрѣзокъ равный (—3).

9) Начертить прямую $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, принимая за 1 длины сантиметръ.

10) Начертить прямую $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1$, принимая за 1 длины сантиметръ.

11) Начертить прямую $x - y = 1$, принимая за 1 длины сантиметръ.

12) Написать уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки (2,3), (5,8).

13) Написать уравненія прямыхъ, служащихъ сторонами треугольника задачи 1-ой.

14) Написать уравненіе прямой, проходящей на разстояніи 7 отъ начала, если разстояніе это составляетъ съ осью x уголъ въ 30°.

15) Найти длины сторонъ треугольника задачи 1-ой.

16) Написать уравненіе окружности, имѣющей радіусъ равный 7 и центръ въ точкѣ (2, 3).

17) Найти координаты средины прямой, соединяющей точки (5, 10), (3, –4).

18) Прямую, соединяющую точки (2, 3), (4,—5) дѣлимъ на 3 части. Найти координаты точки дѣленія ближайшей къ точкѣ (2, 3).

19) Координаты двухъ точекъ суть (x_1, y_1), (x_2, x_2). Найти уравненіе прямой, соединяющей начало съ срединою разстоянія между данными точками.

20) Найти тангенсъ угла, заключеннаго между прямыми:

$$y = 3x + 5$$
$$y = 2x - 1$$

21) Найти тангенсъ угла, заключеннаго между прямыми:

$$3x + 5y - 2 = 0$$
$$2x + 7y + 1 = 0$$

22) Найти тангенсъ угла, заключеннаго между прямыми:

$$y = kx$$
$$y = k'x$$

23) Найти тангенсъ угла, заключеннаго между прямыми:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$$

24) Найти координаты вершинъ треугольника, уравненія сторонъ котораго суть:

$$2x - 5y + 11 = 0$$
$$6x - y - 9 = 0$$
$$x + y + 2 = 0$$

25) Написать уравненія діагоналей параллелограмма, уравненія сторонъ котораго суть:

$$x = a;\ x = a';\ y = b;\ y = b'$$

26) Найти координаты точки пересѣченія діагоналей параллелограмма, уравненія сторонъ котораго суть:

$$x = 5;\ x = 2;\ y = 8;\ y = 3.$$

27) Найти уравненіе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y') на прямую $y = kx + b$.

28) Найти уравненія сторонъ треугольника (x', y'), (x'', y''), (x''', y''').

29) Найти уравненія высотъ треугольника (x', y'), (x'', y''), (x''', y''').

30) Найти разстояніе начала координатъ отъ прямой

$$3x + 4y + 20 = 0.$$

31) Найти разстояніе точки (2, 3) отъ прямой

$$2x + y - 4 = 0.$$

32) Найти разстояніе начала отъ прямой

$$a(x-a)+b(y-b)=0.$$

33) Найти уравненіе прямой *) дѣлящей пополамъ уголъ между прямыми

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$
$$x\,эos\,\beta+y\sin\beta=p'$$

34) Найти уравненіе биссектора угла, составляемаго прямыми:

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

35) Найти площадь треугольника (x', y'), (x'', y''), (x''', y''').

36) Найти площадь треугольника, составленнаго точками (x', y'), (x'', y'') и началомъ координатъ.

37) Найти условіе, чтобы три точки (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') лежали на одной прямой.

38) Опредѣлить площадь треугольника $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4 -1)$.

39) Написать уравненіе прямой, проходящей какъ нибудь чрезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$Ax+By+C=0$$
$$A_1x+B_1y=C_1=0$$

40) Найти уравненіе прямой, соединяющей начало съ точкою пересѣченія прямыхъ

$$Ax+By+C=0;\ A_1x+B_1y+C_1=0.$$

41) Найти уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1;\ \frac{x}{1}-\frac{y}{2}=1$$

и чрезъ начало.

42) Даны уравненія трехъ прямыхъ:

$$Ax+By+C=0:\ A'x+B'y+C'=0:\ A''x+B''y+C''=0,$$

Что выражаетъ собою условіе:

$$l(Ax+By+C)+m(A'x+B'y+C')+n(A''x+B''y+C'')=0,$$

гдѣ l, m, n суть какія нибудь постоянныя.

43) Пользуясь рѣшеніями задачъ 29 и 42 доказать аналитически, что всѣ три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

44) Опредѣлить геометрическое мѣсто вершинъ C треугольниковъ, опирающихся на данное основаніе AB и при томъ такихъ, въ которыхъ

$$AC^2-CB^2=m^2.$$

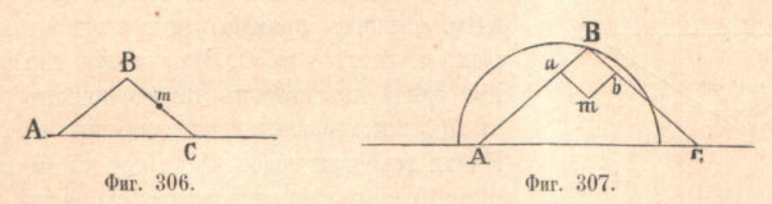
---

*) Прямая дѣлящая уголъ пополамъ называется *биссекторомъ* этого угла.

Эллипсъ. (По тексту параграфы 28—41).

45) Прямолинейный отрѣзокъ длины p движется такъ, что одинъ конецъ его ходитъ по нѣкоторой прямой, тогда какъ другой — по другой прямой, перпендикулярной къ первой. Опредѣлить траекторію (путь), описываемый точкою m, лежащею на отрѣзкѣ и находящеюся на разстояніи a отъ одного изъ его концовъ.

46) Двѣ равныя линейки AB и BC соединены шарниромъ въ B. Линейка AB вращается около A. Точка C ходитъ по прямой AM.



Фиг. 306. Фиг. 307.

Найти путь описываемый точкою m отмѣченной гдѣ нибудь на BC (фиг. 306).

47) По даннымъ фокусамъ и большой полуоси построить, помощью циркуля, сколько угодно точекъ эллипса.

48) Двѣ прямыя AB и BC одинаковой неизмѣняемой длины p пересѣкаются въ точкѣ B ходящей по окружности. Концы A и C прямыхъ ходятъ по діаметру этой окружности. Отъ B откладываемъ по прямымъ BA и BC равные между собою отрѣзки q и на нихъ достраиваемъ ромбъ $Babm$. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки m (фиг. 307).

Гипербола. (По тексту параграфы 42—47).

49) Доказать, что обѣ вѣтви гиперболы и одна изъ ея ассимптотъ отсѣкаютъ на прямыхъ, параллельныхъ дѣйствительной оси, такіе отрѣзки AB и AC, произведеніе которыхъ есть величина постоянная, равная квадрату дѣйствительной полуоси (фиг. 308).

50) Доказать, что, при равныхъ ординатахъ, разность квадратовъ абсциссъ гиперболы и ассимптоты есть величина постоянная равная квадрату дѣйствительной полуоси.



Фиг. 308. Фиг. 309.

51) Пвямыя Am и Bm равной длины p пересѣкаются въ точкѣ m (фиг. 309); прямыя An и Bn равной длины q пересѣкаются въ точкѣ n. Точки A и B ходятъ

по прямой *oy*. Доказать, что если поведемъ точку *n* по прямой *MN*, то точка *m* опишетъ вѣтвь гиперболы.

52) Построить помощью циркуля сколько угодно точекъ гиперболы по даннымъ фокусамъ и большой полуоси *a*.

Парабола. (По тексту параграфы 48—50).

53) По даннымъ фокусу и директрисѣ построить сколько угодно точекъ параболы помощью циркуля и линейки.

54) Дана точка 0 и прямая *MN* (фиг. 310). Строимъ прямые углы, вершины которыхъ находятся въ 0. Изъ точки пересѣченія одной изъ сторонъ такого прямого угла съ *MN* возставляемъ перпендикуляръ къ *MN*. Найти геометрическое мѣсто точекъ *m* пересѣченій этого перпендикуляра съ другою стороною прямого угла.

Фиг. 310.

Полярныя координаты. (По тексту параграфы 51—55).

55) Выразить въ полярныхъ координатахъ уравненіе прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

56) Выразить въ полярныхъ координатахъ уравненіе окружности проходящей чрезъ полюсъ и имѣющій центръ на полярной оси.

57) Выразить въ полярныхъ координатахъ уравненіе прямой, перпендикулярной къ полярной оси и проходящей на разстояніи *a* отъ полюса.

58) Преобразовать въ полярныя координаты уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

принявъ центръ за полюсъ, большую ось—за полярную ось.

59) Преобразовать въ полярныя координаты уравненіе $y^2 = 2px$ параболы, принявъ вершину за полюсъ, ось параболы—за полярную ось.

Преобразованіе координатъ. (§§ 56—61).

60) Какъ выразится уравненіе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ эллипса, если повернуть оси координатъ на уголъ φ.

61) Какъ выразится уравненіе параболы $y^2 = 2px$, если повернуть оси координатъ на уголъ φ.

62) Какъ выразится уравненіе параболы, если, сохраняя направленіе осей координатъ, взять начало въ точкѣ пересѣченія оси параболы съ директрисою.

63) Вывести формулы преобразованія прямоугольныхъ координатъ x, y въ такія косоугольныя x', y', въ которыхъ ось x' совпадалала бы съ осью x, начало совпадало бы съ началомъ координатъ x, y, уголъ же между осями x' и y' былъ бы θ.

64) Повернуть эллипсъ на 90°,

65) Выразить уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

въ координатахъ X, Y задачи 63-ей.

Задачи къ параграфамъ 62—66.

66) Какая кривая выражается уравненіемъ:

$$3x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 5y - 20 = 0.$$

67) Какая кривая выражается уравненіемъ:

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x + 3y - 10 = 0$$

Аналитическая Геометрія въ пространствѣ.

Задачи къ параграфамъ 67—76.

68) Что представляетъ собою въ пространствѣ уравненіе $x = 2$?

69) Что представляетъ собою въ пространствѣ уравненіе:

$$x^2 + y^2 = 25?$$

70) Что представляетъ собою въ пространствѣ совокупность уравненій

$$x = 0$$
$$y = 0$$

71) Какою совокупностью уравненій выражается въ пространствѣ ось x?

72) Что представляетъ собою въ пространствѣ совокупность уравненій

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$
$$z = 3$$

73) Что представляетъ собою въ пространствѣ уравненіе $y = kx$?

74) Что представляется въ пространствѣ уравненіемъ $y^2 = 2px$?

Задачи къ параграфамъ 77—84.

75) Новая система координатъ X, Y, Z получается изъ прежней x, y, z поворотомъ этой послѣдней около оси y на уголъ φ, при чемъ углы считаются въ направленіи отъ положительнаго конца оси x къ положительному концу оси z. Написать формулы преобразованія координатъ x, y, z въ X, Y, Z.

76) Какъ выразится въ координатахъ X, Y, Z плоскость $x = a$, если кординаты x, y, z связаны съ координатами X, Y, Z формулами (118)?

77) Сообразуясь съ формулами (124) опредѣлить, что выражаетъ собою уравненіе:

$$r \, . \, sin \, \varphi = c$$

въ сферическихъ координатахъ.

Задачи къ параграфамъ 85—115.

78) Опредѣлить углы составляемые діагональю куба съ его ребрами, если ребро куба равно a.

79) Опредѣлить уголъ, составляемый діагональю куба выходящею изъ его вершины 0, съ выходящею изъ 0 діагональю квадрада составляющаго одну изъ граней куба.

80) Опредѣлить уголъ, составляемый плоскостями:

$$3x + 5y - 2z + 5 = 0$$
$$2x - 3y + 5z - 1 = 0$$

81) Опредѣлить уголъ, составляемый плоскостями:

$$3x + 5y - 2z + 5 = 0$$
$$6x + 10y - 4z + 7 = 0$$

82) Опредѣлить длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала на плоскость, отсѣкающую на осяхъ x, y, z соотвѣтственно отрѣзки a, b, c.

83) Написать уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки (2, 3, 1), (5, —6, 2).

84) Показать, что эллипсоидъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

въ которомъ $a > b > c$ пересѣкается сферою $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ по окружностямъ двухъ круговъ.

85) Показать, что сѣченія эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

плоскостями параллельными плоскостямъ круговъ упомянутыхъ въ задачѣ 84, всѣ круговыя.

86) Найти геометрическое мѣсто центровъ круговыхъ сѣченій эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Дифференціальное исчисленіе.

Задачи къ §§ 126—150.

87) $d\,(a + bx)$

88) $d\,(Ax^m + Bx^n + Cx^5)$

89) $d\,(A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0)$

90) $d\,(3x^2 + 5x^4 + 6x^7 + 3x'')$

91) $d\,[(a + bx)\,(m + nx)]$

92) $d\,[(ax^2 + bx + c)\,(Ax^2 + Bx + C)]$

93) $d\,[(ax^2 + bx + c)\,x]$

94) $d\left[\dfrac{ax + b}{Ax + B}\right]$

95) $d\left[\dfrac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}\right]$

96) $d\left[\dfrac{3x^2 + 5x''}{2x^5 - 3x^7}\right]$

97) $d\,\sin\,(ax^2 + b)$

98) $d\,[(ax^2 + bx + c)\,\sin x]$

99) $d\,[\sin\,(ax^2 + bx + c)]$

100) $d\,[\sin x\,.\,\cos x]$

101) $d\,\dfrac{\sin x + \cos x}{ax + b}$

102) $d\,(\sqrt{ax + b})$

103) $d\,(\sqrt{ax^2 + bx + c})$

104) $d\left(\dfrac{1}{\sqrt{ax + b}}\right)$

105) $d\left(\dfrac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right)$

106) $d\,(\sqrt{a^2 + x^2})$

107) $d\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$

108) $d\,(\sin x\,.\,\sqrt{a + x^2})$

109) $d\,\dfrac{\sqrt{a + x^2}}{\sin x}$

110) $d\,(lg\,(ax^2 + bx + c))$

111) $d\,(lg\,\sin x)$

112) $d\,(x^x)$

113) $d\,(e^{x^2})$

114) $d\,(e^{-x^2})$

115) $d\left[\dfrac{[(x + 1)\,(x + 3)^9]^{\frac{1}{2}}}{(x + 2)^4}\right]$

116) $d\left[lg\,\dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + x)^{\frac{1}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}}}\right]$

117) $d\,[lg\,(lgx)]$

118) $d\,[e^{ar\,\sin x}]$

119) $d\,(x^{\sin x})$

Задачи къ § 152.

120) Найти полный дифференціалъ dz отъ $z = \dfrac{y}{x}$

121) dz отъ xy

122) dz отъ $z = 5x^3 - 3x^2y + 5xy^3 - 10y$

123) dz отъ $z = lg\,tg\left(\dfrac{x}{y}\right)$

124) du отъ $u = \sin x\,.\,\cos y,$

Задачи къ § 154. Опредѣлить $\dfrac{dy}{dx}$ изъ:

125) $y = e^x + e^y + x$

126) $y = 1 + xe^y$

127) $x\sin y - \cos y + \cos\,(2y) = 0$

128) $$y \sin x - \cos(x-y) = 0$$

129) $$y - ar\sin x + e^x = 0$$

Задачи къ § 155.

130) Опредѣлить $\frac{d^3y}{dy^3}$, если $y = x^5$.

131) Опредѣлить $\frac{d^4y}{dx^4}$, если $y = \sin x$.

132) Опредѣлить $\frac{d^3y}{dx^3}$, если $y = \cos^2 x$.

133) Опредѣлить $\frac{d^4y}{dx^4}$, если $y = lgx$.

134) Опредѣлить $\frac{d^ny}{dx^n}$, если $y = (a - bx)^m$

135) Опредѣлить $\frac{d^ny}{dx^n}$, если $y = \frac{1}{x}$

136) Провѣрить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ на примѣрѣ $u = \frac{x+y}{\sin(x-y)}$

137) Провѣрить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ на примѣрѣ $u = x^3 - 3axy + y^3$.

138) Опредѣлить d^2u, если $u = x^3 - 3axy + y^3$.

139) Найти d^3u, если $u = e^x \cdot \sin y$.

Задачи къ § 156.

140) Во что обращается

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

если принять y за независимое перемѣнное.

141) Дано

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

доказать, что при $x = a \cdot \cos^3 \omega$ получается:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\, tg\, \omega$$

142) Дано

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0$$

Во что оно обращается, если возьмемъ за независимое перемѣнное t, если при этомъ $x = \cos t$.

Задачи къ §§ 157—158.

143) Во что обращается $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, если x обратится въ $x + 2$?

144) Дано $f(x) = x^6 - x^3 + 1$. Опредѣлить $f(x + 3)$.

145) Полагая, что $f(x) = \sqrt{x}$, разложить въ рядъ $\sqrt{1 + x}$

Задачи къ §§ 157—165.

146) Разложить въ рядъ $\frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

147) Разложить въ рядъ $ar \sin x$.

148) Разложить въ рядъ $(ar \sin x)^2$.

149) Разложить въ рядъ $\sin(m\, ar \sin x)$. Затѣмъ, положивъ $ar\sin x = u$, доказать, что:

$$\sin(mu) = m \sin u + \frac{m(1 - m^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \sin^3 u + \frac{m(1 - m^2)(9 - m^2)}{1 \,.\, 2 \ldots 5} \sin^5 u + \ldots$$

150) Разложить въ рядъ $\cos[m \operatorname{arc} \cos x]$. Затѣмъ, положивъ $\operatorname{arc} \cos x = u$, доказать, что:

$$\cos(mu) = 1 - \frac{m^2 \cos^2 u}{1 \,.\, 2} - \frac{(4 - m^2)}{1 \,.\, 2, \ldots 4} \cos^4 n - \ldots$$

Задачи къ § 167—169. Вычислить:

151) $$Lim \left[\frac{x^2 - \sqrt{a^3 x}}{\sqrt{ax} - a}\right]_{x = a}$$

152) $$Lim \left[\frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}\right]_{x = 7}$$

153) $$Lim \left[\frac{lg \cos x}{\sin^2 x}\right]_{x = 0}$$

154) $$Lim \left[\frac{a^x - 1}{xu^x}\right]_{x = 0}$$

Показать, что:

155) $$Lim \left[\frac{e^x - e^{-x}}{lg(1 + x)}\right]_{x = 0} = 2$$

156) $$Lim \left[\frac{x + \sin x}{x}\right]_{x = \infty} = 1$$

157) $$Lim \left[\frac{e^{x + \sin x}}{x + \sin x}\right]_{x = \infty} = \infty$$

Задачи къ §§ 170—172. Опредѣлить наибольшія и наименьшія значенія слѣдующихъ функцій:

158) $$x^3 - 12x^2 + 45x + 30 = y$$

159) $$x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000 = y$$

160) $$\frac{1-x}{(1+x)^2}=y$$

161) $$\frac{x}{lgx}=y$$

162) Доказать, что изъ всѣхъ треугольниковъ, у которыхъ сумма основанія и высоты одинакова, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго основаніе равно высотѣ.

163) У какого изъ прямоугольныхъ треугольниковъ, опирающихся на одну и ту же гипотенузу, сумма катетовъ наибольшая.

164) Окно состоитъ изъ прямоугольника, завершеннаго полукругомъ. При данномъ периметрѣ (длинѣ линіи ограничивающей окно) требуется найти такую высоту и ширину окна, чтобы оно давало наибольшее количество свѣта.

165) Найти наименьшее z для $z=x^2-xy+y^2-3y$.

Задачи къ §§ 173—178.

166) Найти уравненіе касательной къ кривой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ и опредѣлить длину ея отрѣзка, отсѣкаемаго осями координатъ.

167) Найти уравненіе касательной къ кривой $y=x^3$.

168) Опредѣлить длину подкасательной кривой $x=e^{\frac{x-y}{y}}$.

169) Найти уравненіе касательной къ кривой $r^2=a^2\cos(2\varphi)$.

Задачи къ §§ 179—182.

170) Въ какихъ промежуткахъ кривая $y=\cos x$ обращена выпуклостью къ оси x?

171) При какихъ значеніяхъ икса кривая $y=\cos x$ имѣетъ точки перегиба?

172) Опредѣлить координаты той точки параболы, въ которой элементъ ея наклоненъ къ оси x подъ угломъ 45°.

Задачи къ §§ 183—184.

173) Найти огибающую эллипсовъ, направленіе главныхъ осей которыхъ одно и то же и сумма полуосей есть величина постоянная.

174) Найти огибающую окружностей $(x-a)^2+y^2=b^2$, удовлетворяющихъ условію $b^2=4ma$.

Задачи къ §§ 185—189.

175) Опредѣлить радіусъ кривизны кривой $y^2=2px+qx^2$.

176) Опредѣлить радіусъ кривизны и развертку полукубической параболы $3ay^2=2x^3$.

177) Опредѣлить координаты центра кривизны циссоиды

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$$

Задача къ §§ 190—192.

178) Опредѣлить радіусъ кривизны лемнискаты: $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$, и уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ касательною.

Задачи на §§ 193—232. Изслѣдованіе вида кривыхъ.

179) Изслѣдовать видъ лемнискаты $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$.

180) Дана точка 0 и прямая MN. Чрезъ 0 проводятся прямыя и на нихъ, отъ точекъ пересѣченія ихъ съ MN откладываются въ обѣ стороны однnаковые отрѣзки b. Разстояніе 0 отъ MN равно a, Найти уравненіе геометрическаго мѣста концовъ отрѣзковъ и выяснить видъ этой кривой.

181) Дана окружность и діаметръ ея AB, длина котораго равна a. Изъ конца A этого діаметра проводятся прямыя и на нихъ, отъ точекъ пересѣченія ихъ съ окружностью, откладываются въ обѣ стороны одинаковые отрѣзки. Найти уравненіе геометрическаго мѣста концовъ этихъ отрѣзковъ и выяснить видъ его.

182) Найти абсциссу точки перегиба кривой $xy = 2a\sqrt{2ax - x^2}$.

183) Найти абсциссы точекъ перегиба кривой $ax^3 + by^3 = c^4$.

184) Выяснить видъ кривой $x^4 - ax^2y + by^3 = 0$.

185) Найти уравненіе и выяснить видъ кривой, имѣющей два фокуса и опредѣляемой тѣмъ свойствомъ, что произведеніе радіусовъ-векторовъ есть величина постоянная равная a^2:

186) Геометрическое мѣсто основаній перпедикуляровъ, опущенныхъ изъ данной точки на касательныя къ данной кривой, называется *подошвенною* кривою данной кривой по отношенію къ данной точкѣ. Найти уравненіе и опредѣлить видъ подошвенной эллипса по отношенію къ его центру.

187) Доказать, что касательная, проведенная къ параболѣ въ точкѣ ея (x, y), пересѣкаетъ ось иксовъ на разстояніи x отъ вершины параболы.

188) Доказать, что отрѣзокъ, отсѣкаемый ассимптотами на касательной къ гиперболѣ, дѣлится пополамъ въ точкѣ прикосновенія.

Задачи къ §§ 233—246.

189) Написать уравненіе касательной къ кривой происходящей отъ пересѣченія цилиндровъ $x^2 + y^2 = R_1^2$; $y^2 + z^2 = R_2^2$.

190) Написать уравненіе плоскости нормальной къ кривой задачи 189-ой.

191) Написать уравненіе плоскости касательной къ эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

192) Опредѣлить косинусы угловъ наклоненія къ осямъ координатъ нормали эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

193) Написать уравненіе нормали къ эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Интегральное исчисленіе.

Задачи къ § 255—256. Интегрированіе по частямъ.

194) $\int \frac{arsin\, x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

195) $\int \frac{arsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} x\, dx.$

196) $\int artg\, x\,.\, dx.$

197) $\int \frac{x^2}{1+x^2} artg\, x\,.\, dx.$

Задачи къ § 257. Интегрированіе подстановкою.

198) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$

199) $\int \frac{x\, dx}{a^4 + x^4}.$

200) $\int \frac{x^2\, dx}{a + bx}.$

201) $\int \frac{cos\, x\,.\, dx}{sin^2\, x}.$

Задачи къ §§ 259—262. Интегрированіе раціональныхъ дробей.

202) $$\int \frac{(x^2 - x + 2)\, dx}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

203) $$\int \frac{x^2\, dx}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}.$$

Задачи къ §§ 263—266. Интегрированіе радикальныхъ функцій

204) $$\int \frac{1 + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

205) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x + x^2}}.$$

206) $$\int \frac{dx}{\sqrt{mx^2 + nx + p}}$$

Задачи къ §§ 267—269. Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

207) $\int \sin x \,.\, \cos x \, dx$.

208) $\int tg\, x \, dx$.

209) $\int cotg\, x \, dx$.

210) $\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x}$.

Задачи къ §§ 271—278. Вычисленіе площадей.

211) Площадь кривой $y=x^3$, ограниченная осью абсциссъ, кривою и ординатою при $x=a$.

212) Площадь лемнискаты: $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$.

Задачи къ §§ 279—284. Выпрямленіе дугъ.

213) $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Задачи къ § 287. Среднія значенія функцій.

214) Опредѣлить среднее значеніе функціи x^3 въ предѣлахъ отъ 2 до 5

215) Опредѣлить среднее значеніе $\sin\varphi$ въ предѣлахъ отъ 0 до π.

216) Опредѣлить среднюю величину ординаты параболы $y^2 = 2px$ въ предѣлахъ отъ $x = o$ до $x = a$.

Задача къ § 288. Правило Симпсона.

217) Квадратъ завершенъ полукругомъ. Раздѣливъ нижнюю сторону квадрата на 8 частей, опредѣлить площадь всей фигуры по правилу Симпсона и найти ошибку сравнительно съ точною величиною этой площади.

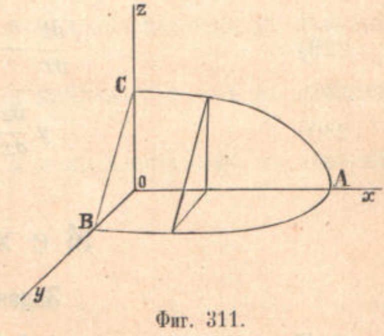
Вычисленіе объемовъ.

Задачи на §§ 289.

218) Опредѣлить объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія параболы около оси и ограниченный плоскостью, проведенною перпендикулярно оси на разстояніи x отъ вершины.

Задачи на §§ 290—291.

219) Эллиптическій цилиндръ пересѣкаетъ (фиг. 311) плоскость (x, y) по эллипсу, полуоси котораго суть $OA = a$; $OB = b$; плоскость (x, z) пересѣкается цилиндромъ по эллипсу, полуоси котораго суть $OA = a$; $OC = c$. Образующія цилиндра параллельны BC. Опредѣлить объемъ тѣла $OABC$, ограниченнаго цилиндромъ и плоскостями координатъ.



Фиг. 311.

220) Опредѣлить объемъ, заключенный между цилиндрами:

$$x^2 + z^2 = a^2;\ x^2 + y^2 = a^2.$$

Задача къ § 293.

221) Вычислить

$$\int_0^a \int_{y=0}^{y=kx} \int_{z=0}^{z=\sqrt{k^2x^2-y^2}} dx\, dy\, dz\,.$$

Задача къ §§ 294—296.

222) Вычислить поверхность параболоида, образованную вращеніемъ параболы $y^2 = 2px$ около оси x и ограниченную плоскостью $x = a$.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

Задачи къ § 298.

223) $$x^2\, dy = (y + a)\, dx.$$

224) $$xy\, dx = (a - x)\,(y - b)\, dy.$$

Задача къ § 299.

225) $$x\, dx + y\, dy = 2ny\, dx.$$

Задачи къ § 306.

226) $$x\, dx + y\, dy = dy \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\,.$$

227) Найти кривую, касательныя которой находились бы на одинаковомъ разстояніи отъ начала.

Задачи къ § 314. Уравненія съ частными производными.

228) $$x \frac{dz}{dx} - y \frac{dz}{dy} = \frac{x^2}{y}\cdot$$

229) $$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = \frac{z}{x+y}\cdot$$

230) $$y \frac{dz}{dx} + x \frac{dz}{dy} = z.$$

Механика.

Задачи къ § 346.

1) По уравненіямъ движенія $x = at$; $y = o$; $z = sin\ (at)$ опредѣлить траекторію.

2) По уравненіямъ движенія

$$x = a\,sin\,(mt) + b\,cos\,(mt);\ \ y = a\,cos\,(mt) - b\,sin\,(mt);\ \ z = o$$

опредѣлить траекторію.

3) По уравненіямъ движенія $x = a\,sin\,t$; $y = b\,cos\,t$; $z = o$ опредѣлить траекторію.

4) По уравненіямъ движенія $x = R\,cos t$; $y = R\,sin t$; $z = ct$ опредѣлить траекторію.

Задачи къ §§ 348—349.

5) Опредѣлить скорость и ускореніе въ прямолинейномъ движеніи:

$$x = sin\,(at);\ \ y = o;\ \ z = o.$$

6) Опредѣлить скорость и ускореніе въ прямолинейномъ движеніи:

$$x = o;\ \ y = o;\ \ z = e^t.$$

Задача къ § 351.

7) Опредѣлить силу, подъ вліяніемъ которой можетъ происходить движеніе точки m, данное въ задачѣ 5-ой.

Задачи къ § 358.

8) Опредѣлить движеніе точки брошенной вверхъ въ воздухѣ, принимая, что сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости.

9) Съ какою скоростью нужно бросить точку съ поверхности земли по направленію къ лунѣ для того, чтобы точка долетѣла до луны. Радіусъ земли можно принять равнымъ 6 400 000 метровъ; разстояніе между центрами земли и луны равно 60 земнымъ радіусамъ; масса земли въ 81 разъ болѣе массы луны.

Задачи къ §§ 363—364.

10) Опредѣлить скорость, ускореніе и направленія ихъ въ движеніи, данномъ въ задачѣ 1-ой.

11) Опредѣлить скорость, ускореніе и направленія ихъ въ движеніи, данномъ въ задачѣ 3-ей.

12) Опредѣлить скорость, ускореніе и направленія ихъ въ движеніи, данномъ въ задачѣ 4-ой.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

2) $\sqrt{a^2 + b^2}$. 4) $x^2 + y^2 = 25$.

3) 5. 5) (1, 2).

6) $y = x \, . \, tg\, 30° + 3$. Извѣстно, что $sin\, 30° = \frac{1}{2}$. Слѣдовательно

$$cos\, 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; tg\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Итакъ искомое уравненіе таково: $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 3$.

7) $$x = ky + a.$$

8) $$\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1.$$

9) Откладываемъ на оси x отъ начала длину OA равную 3 сантиметрамъ, на оси y откладываемъ длину OB равную 2 сантиметрамъ. Прямая, соединяющая полученныя на осяхъ точки A и B есть искомая.

10) Напишемъ данное уравненіе въ видѣ

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Откладывая на отрицательныхъ частяхъ осей отъ начала длины: на оси иксъ 3 сантиметра, на оси игрекъ 2 сантиметра, соединяемъ полученныя точки прямою.

11) Данное уравненіе можно представить такъ:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1.$$

Поэтому, отложивъ на положительной оси иксовъ и на отрицательной части оси игрековъ длины равныя одному сантиметру, соединяемъ полученныя точки прямою.

12) По формулѣ (17) пишемъ:

$$\frac{y - 3}{y - 8} = \frac{x - 2}{x - 5}$$

или по формулѣ (18) пишемъ

$$y = \frac{3 - 8}{2 - 5}\, x + \frac{2\, .\, 8 - 5\, .\, 3}{2 - 5}$$

или:

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}.$$

13) По формулѣ (18) находимъ:

для стороны, соединяющей (2, 3) съ (4, —5) уравненіе:

$$y = -4x + 11.$$

для стороны, соединяющей (4, —5) съ (—3, —6) уравненіе:

$$y = \frac{1}{7}x - \frac{39}{7},$$

для стороны, соединяющей (—3, —6) съ (2, 3) уравненіе:

$$y = \frac{9}{5}x - \frac{3}{5}.$$

14) $x \cos 30° + y \sin 30° = 7$. Но $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Слѣдовательно искомое уравненіе будетъ: $\sqrt{3}\,x + y = 14$.

15) Сторона, соединяющая точки (2, 3) съ (4, —5) равна $\sqrt{68}$.
Сторона, соединяющая точки (4, —5) съ (—3, —6) равна $\sqrt{50}$.
Сторона, соединяющая точки (—3, —6) съ (2, 3) равна $\sqrt{106}$.

16) $$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 49.$$

17) $$x = 4;\ y = 3.$$

18) $$x = \frac{1\,.\,4 + 2\,.\,2}{3} = \frac{8}{3};\ y = \frac{-1\,.\,5 + 2\,.\,3}{3} = \frac{1}{3}.$$

19) Координаты средины суть:

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2};\ b = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Уравненіе искомой прямой таково:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}\,x.$$

20) $$tg\,\varphi = \frac{3-2}{1+3\,.\,2} = \frac{1}{7}.$$

21) $$tg\,\varphi = \frac{2\,.\,5 - 3\,.\,7}{2\,.\,3 + 5\,.\,7} = \frac{-11}{41}.$$

22) $$tg\,\varphi = \frac{k-k'}{1+kk'}.$$

23) $$tg\,\varphi = \frac{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}} = \frac{2\,ab}{b^2 - a^2}$$

24) $(2,\ 3),\ (1,\ -3),\ (-3,\ 1)$.

25) Уравненіе діагонали, проходящей чрезъ вершины $(a,\ b)$, $(a',\ b')$ таково:

$$y = \frac{b - b'}{a - a'}\,x + \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

Уравненіе діагонали, проходящей чрезъ вершины (a, b') (a', b) таково:

$$y = \frac{b' - b}{a - a'}\,x + \frac{ab - a'b'}{a - a'}.$$

26) Уравненіе одной изъ діагоналей таково:

$$y = \frac{4}{3}\,x + \frac{1}{3};$$

уравненіе другой діагонали таково:

$$y = -\frac{4}{3}\,x + \frac{29}{3}.$$

Координаты точки пересѣченія діагоналей будутъ: $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$.

27) По условію перпендикулярности (36) заключаемъ, что уравненіе искомаго перпендикулятора имѣетъ видъ

$$y = -\frac{1}{k}\,x + b'.$$

Точка $(x',\ y')$ по условію задачи ему удовлетворяетъ; потому

$$y' = -\frac{1}{k}\,x' + b'.$$

Вычитая одно изъ другого, получимъ:

$$y - y' = -\frac{1}{k}\,(x - x').$$

28) По формулѣ (18):

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}\,x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}.$$

$$y = \frac{y'' - y'''}{x'' - x'''}\,x + \frac{x''y''' - x'''y''}{x'' - x'''}.$$

$$y = \frac{y''' - y'}{x''' - x'}\,x + \frac{x'''y' - x'y'''}{x''' - x'}.$$

29) По задачамъ 27 и 28 получимъ:

$$y - y''' = \frac{x'' - x'}{y' - y''}\,(x - x''').$$

$$y - y' = \frac{x''' - x''}{y'' - y'''}\,(x - x').$$

$$y - y'' = \frac{x' - x''}{y''' - y'}\,(x - x'').$$

30) $$\delta = \frac{20}{\sqrt{9+16}} = 4.$$

31) $$\delta = \frac{2\,.\,2 + 1\,.\,3 - 4}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

32) $$\delta = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

33) Каждая точка биссектора находится въ одинаковомъ разстояніи отъ сторонъ угла, раздѣляемаго имъ пополамъ. Поэтому по формулѣ (41) получимъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = x\cos\beta + y\sin\beta - p'.$$

34) По формулѣ (45) получимъ:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

35) Длина стороны (x', y'), (x'', y'') равна $\sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}$. Уравненіе ея:

$$y = \frac{y'-y''}{x'-x''}\,x + \frac{x_1y'' - x''y'}{x'-x''};$$

или:

$$(y'-y'')\,x - (x'-x'')\,y + x_1y'' - x''y'.$$

Если принять эту сторону за основаніе, то высота треугольника будетъ равна разстоянію этой стороны отъ (x''', y'''). По формулѣ (45) это будетъ

$$\frac{(y'-y'')\,x''' - (x'-x'')\,y''' + x_1y'' - x''y'}{\sqrt{(y_{,}-y_{,,})^2 + (x_{,}-x_{,,})^2}}.$$

Слѣдовательно площадь треугольника равна:

$$\frac{(y'-y'')\,x''' - (x'-x'')\,y''' + x'y'' - x''y'}{2}.$$

Эту величину можно представить въ такомъ легко запоминаемомъ видѣ:

$$\frac{y'\,(x'''-x'') + y''(x'-x''') + y'''(x''-x')}{2}.$$

36) Согласно предыдущей задачѣ искомая площадь равна

$$\frac{-y'x'' + x'y''}{2} \quad \text{или} \quad \frac{x'y'' - x''y'}{2}.$$

37) Если три точки лежатъ на одной прямой, то онѣ не образуютъ треугольника. Требуемое условіе выразится по этому тѣмъ, что площадь треугольника задачи 35-ой будетъ равна нулю. Итакъ условіе это таково:

$$y'\,(x'''-x'') + y''\,(x'-x''') + y'''\,(x''-x') = 0.$$

38) Согласно задачѣ 35-ой получимъ:

$$\frac{1\,.\,(-4-3)+(-2)\,(2+4)+(-1)\,(3-2)}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Но площадь всегда положительна. Отвѣтъ: $\frac{1}{2}$.

39) $Ax+By+C+m\,(A_1x+B_1y+C_1)=0$, потому что величины x, y, удовлетворяющія и тому и другому уравненіямъ прямыхъ удовлетворяютъ и этому уравненію. Величина m произвольная, покуда уравненіе выражаетъ *какую нибудь* прямую, проходящую чрезъ пересѣченіе данныхъ прямыхъ.

40) $Ax+By+C+m\,(A_1x+B_1y+C_1)=0$ должна пройти чрезъ начало. Слѣдовательно должно удовлетвориться равенство:

$$C+mC_1=0,\quad \text{откуда } m=-\frac{C}{C'}.$$

Отвѣтъ:

$$Ax+By+C-\frac{C}{C'}\,(A_1x+B_1y+C_1)=0.$$

41) $$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1-\left(x-\frac{y}{2}-1\right)=0.$$

или: $$\frac{5y}{6}-\frac{x}{2}=0;\ \text{или } y=\frac{3}{5}\,x.$$

42) Условіе это выражаетъ, что прямыя

$$Ax+By+C=0;\ A'x+B'y+C'=0;\ A''x+B''y+C''=0$$

проходятъ чрезъ одну точку (см. задачу 39).

43) Приведя къ одному знаменателю уравненія высотъ, данныя въ рѣшеніи задачи 29-ой и сложивъ ихъ, получимъ въ результатѣ тожественно (при всякихъ x и y) нуль. Такимъ образомъ уравненія высотъ выполняютъ условіе задачи (42), и слѣдовательно высоты пересѣкаются въ одной точкѣ.

44) Принимаемъ AB за ось x; перпендикуляръ возставленный къ AB изъ ея средины—за ось y. Обозначимъ чрезъ c половину основанія AB, чрезъ (x, y) координаты вершины C. Имѣемъ:

$$AC^2=(c+x)^2+y^2;\ CB^2=(c-x)^2+y^2.$$

Слѣдовательно $AC^2-CB^2=4cx$. Уравненіе искомаго геометрическаго мѣста будетъ: $4cx=m^2$; или $x=\frac{m^2}{4c}$. Искомое геометрическое мѣсто есть перпендикуляръ къ AB проведенный на разстояніи $\frac{m^2}{4c}$ отъ начала.

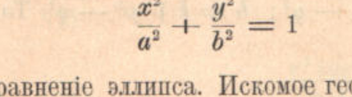
45) Примемъ прямыя, по которымъ ходятъ концы отрѣзка за оси координатъ. Пусть (x, y) суть координаты точки m. Обозначимъ чрезъ φ острый уголъ, составляемый отрѣзкомъ и осью x, чрезъ $a+b$ длину от-

рѣзка. Составивъ соотвѣтственный задачѣ чертежъ (фиг. 312), найдемъ:

$x = a\cos\varphi$; $y = b\sin\varphi$; откуда

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi;\quad \frac{y}{b} = \sin\varphi.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравненіе эллипса. Искомое геометрическое мѣсто есть эллипсъ. Средина отрѣзка (для которой $a = b$) описываетъ окружность, имѣющую центръ въ началѣ: $x^2 + y^2 = a^2$. На этомъ свойствѣ основанъ токарный станокъ Леонардо да Винчи для вытачиванія эллипсовъ.

Фиг. 312.

46) Эллипсъ.

47) Изъ фокуса F, какъ изъ центра, описываемъ дугу какимъ нибудь радіусомъ r; изъ фокуса F' описываемъ дугу радіусомъ $2a - r$, гдѣ $2a$ есть большая ось. Пересѣченіе этихъ дугъ лежитъ на эллипсѣ, потому что

$$r + r' = 2a.$$

48) Примемъ діаметръ окружности за ось x, центръ ея — за начало. Не трудно доказать, что ординаты точекъ B и m находятся въ постоянномъ отношеніи, а потому если B описываетъ окружность, то (по § 32) m описываетъ эллипсъ.

49) Назовемъ абсциссу точки A чрезъ x. абсциссу точки B чрезъ x'. Абсцисса точки C, по симметріи гиперболы будетъ $-x'$. Поэтому:

$$AB = x' - x;\ AC = x + x'.$$

Слѣдовательно $AB\,.\,AC = (x' - x)(x + x) = x'^2 - x^2$. Но

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ y = \frac{b}{a}x.$$

Слѣдовательно:

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2);\ x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2};$$

$$x'^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2) - \frac{a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2b^2}{b^2} = a^2.$$

Итакъ: $AB\,.\,AC = a^2$.

51) Примемъ oy за ось y, o за начало координатъ. Обозначимъ координаты точки n чрезъ (x', y'), координаты точки m чрезъ (x, y). Положимъ: $Am = Bm = p$; $An = Bn = q$. Изъ чертежа фиг. 309 видно, что

$$y = y';\ x_1^2 = q^2 - (p^2 - x^2) = x^2 - (p^2 - q^2).$$

Уравненіе MN пусть будетъ $y' = kx'$ или $y'^2 = k^2x'^2$. Вставляя сюда вмѣсто y', x' координаты x, y по полученнымъ формуламъ, найдемъ:

$$y^2 = k^2x^2 + k^2(p^2 - q^2);$$

или:

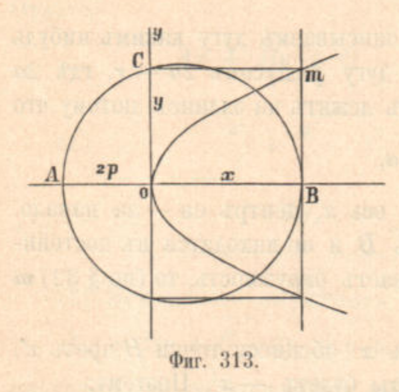
$$\frac{x^2}{p^2 - q^2} - \frac{y^2}{k^2(p^2 - q^2)} = 1$$

уравненіе гиперболы, въ которой $a = \sqrt{p^2 - q^2}$; $b = k\sqrt{p^2 - q^2}$. Тангенсъ угла наклоненія ассимптотъ будетъ:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a} = \frac{k\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{p^2 - q^2}} = k.$$

Слѣдовательно MN есть ассимптота гиперболы, чертимой точкою m.

52) Въ гиперболѣ $r' - r = 2a$. Описываемъ изъ F радіусомъ r дугу; изъ F' описываемъ дугу радіусомъ $2a + r$. Въ пересѣченіи дугъ получится точка гиперболы.



Фиг. 313.

53) Изъ уравненія параболы видимъ, что y есть среднепропорціональная между $2p$ и x. Откладываемъ по отрицательной части оси x отъ начала $OA = 2p$ (фиг. 313). Проводимъ окружность, проходящую чрезъ A и имѣющую центръ на оси x. Изъ пересѣченія ея C съ осью y проводимъ параллель къ оси x; изъ конца діаметра B возставляемъ ординату. Пересѣченіе ея m съ проведенною параллелью будетъ точка параболы, потому что $y = Bm = oC = \sqrt{2px}$.

54) Уравненія сторонъ прямаго угла будетъ:

$$y = kx;\quad y = -\frac{1}{k}x$$

(по формулѣ 36), если примемъ за ось x перпендикуляръ опущенный изъ o на MN, точку o — за начало координатъ. Назовемъ чрезъ a разстояніе o до MN. Уравненіе MN будетъ $x = -a$. Ордината точки пересѣченія стороны $y = -\frac{1}{k}x$ съ MN будетъ $-\frac{-a}{k}$ или $\frac{a}{k}$; такъ что $y = \frac{a}{k}$, откуда $k = \frac{a}{y}$. Внося эту величину въ уравненіе $y = kx$, получимъ: $y = \frac{a}{y}x$ или $y^2 = ax$. Если $a = 2p$, то получается уравненіе параболы $y^2 = 2px$. Искомое геометрическое мѣсто есть парабола.

55) $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$. Слѣдовательно $Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C = 0$.

56) Общее уравненіе окружности имѣющей центръ въ (a, b) таково:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Если центръ лежитъ на оси x, то $b = 0$. Если при этомъ окружность проходитъ чрезъ начало, то $R = a$. Слѣдовательно уравненіе указанной окружности въ Декартовыхъ координатахъ будетъ $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ или $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$. Въ полярныхъ координатахъ оно выразится такъ: $r^2 = 2R\,r\cos\varphi$; или $r = 2R\cos\varphi$. Это уравненіе можно было бы написать прямо изъ чертежа, усмотрѣвъ, что діаметръ $2R$ есть гипотенуза треугольника, въ которомъ r катетъ, φ прилежащій ему уголъ.

57) $$r\cos\varphi = a.$$

58) $$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1.$$

59) $$r^2\sin^2\varphi = 2p\,r\cos\varphi\,; \text{ или } r\sin^2\varphi = 2p\cos\varphi\,.$$

60) $$\frac{(x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2}{a^2} + \frac{(x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2}{b^2} = 1\,;$$

или:

$$x^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) - 2xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin\varphi\,.\,\cos\varphi$$

$$+ y^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right) = 1\,.$$

61) $$(x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = 2p\,(x\cos\varphi - y\sin\varphi).$$

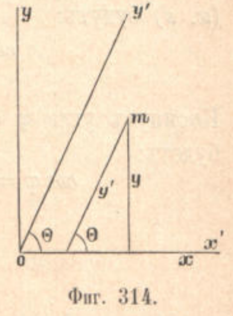
62) $$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right); \text{ или: } y^2 = 2px - p^2\,.$$

63) Если x', y' косоугольныя, x, y прямоугольныя координаты, то изъ чертежа (фиг. 314) слѣдуетъ:

$$x_1 = x - y\,.\,cotg\,\theta\,; \qquad x = x' + y'\cos\theta.$$

$$y_1 = \frac{y}{\sin\theta}\,; \qquad y = y'\sin\theta.$$

65) $$\frac{(x' + y'\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y'\sin\theta}{b^2} = 1\,.$$



Фиг. 314.

66) Здѣсь: $B^2 - 4AC = 16 - 12 = 4 > 0$. Типъ гиперболы.

67) Здѣсь: $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$. Типъ параболы.

68) Плоскость параллельную плоскости (y, z) проведенную на разстояніи 2 отъ начала.

69) Прямой круглый цилиндръ; радіусъ сѣченія его плоскостью нормальною къ образующимъ равенъ 5; ось его направлена по оси z.

70) Ось z.

71) $y = 0$; $z = 0$.

29*

72) Пересѣченіе сферы, описанной изъ начала радіусомъ 6 съ плоскостью, проведенной параллельно плоскости (x, y) на разстояніи 3 отъ нея. Это параллельный кругъ, проведенный на сферѣ подъ 30° широты, если принять (x, y) за плоскость экватора.

73) Плоскость, проходящую чрезъ ось z и наклоненную къ плоскости (x, z) подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ k.

74) Параболическій цилиндръ, образующія котораго проходятъ чрезъ лежащую въ плоскости (x, y) параболу $y^2 = 2px$ и параллельны оси z.

75)
$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi.$$
$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$
$$z = Z.$$

76) $X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0$. Плоскость эта проходитъ чрезъ новое начало.

77) $z=c$—плоскость параллельную (x, y) и находящуюся на разстояніи c отъ нея.

78)
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$
$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
(по формуламъ 125).

79) Косинусы угловъ наклоненія діагонали куба будутъ:
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Косинусы угловъ наклоненія діагонали квадрата, лежащаго въ плоскости (x, z) будутъ:
$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \cos\beta' = 0; \ \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Косинусъ угла φ составляемаго діагональю квадрата и діагональю куба будетъ:
$$\cos\varphi = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha' + \cos\beta \,.\, \cos\beta' + \cos\gamma \,.\, \cos\gamma'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

80)
$$\cos\theta = \frac{3 \,.\, 2 - 5 \,.\, 3 - 2 \,.\, 5}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2}\ \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}} = -\frac{19}{38} = -\frac{1}{2}.$$
$$\theta = 120^\circ.$$

81)
$$\cos\theta = \frac{3 \,.\, 6 + 5 \,.\, 10 + 8}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2}\ \sqrt{6^2 + 10^2 + 4^2}} = \frac{76}{\sqrt{38}\ \sqrt{152}}$$
$$= \frac{38}{\sqrt{19}\ \sqrt{76}} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{38}} = 1.$$

$\theta = 0$. Параллельность плоскостей видна и прямо изъ пропорціональности коэффиціентовъ:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-2}{-4}.$$

82) Уравненіе плоскости таково:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Длина перпендикуляра равна:

$$\frac{+1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Длину считаемъ положительною.

83) $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{-6-3} = \frac{z-1}{2-1}$ или: $\frac{x-2}{3} = \frac{3-y}{9} = z-1.$

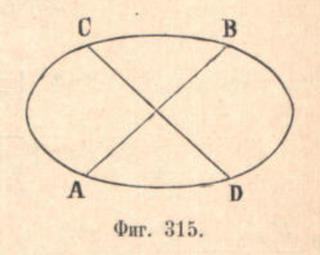
84) Исключая y изъ уравненій эллипсоида и сферы, получимъ:

$$x^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$

или:

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = \pm z\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}$$

уравненіе 2-хъ плоскостей. Слѣдовательно пересѣченіе эллипсоида со сферою тожественно съ пересѣченіемъ этихъ двухъ плоскостей со сферою. Но пересѣченіе плоскости со сферою даетъ кругъ. Слѣдовательно пересѣченіе эллипсоида со сферою $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ состоитъ изъ двухъ круговъ AB и CD (фиг. 315) лежащихъ въ плоскостяхъ, проходящихъ чрезъ ось y описанныхъ изъ начала радіусами равными b. Плоскость одного изъ этихъ круговъ наклонена къ плоскости (x, y) подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ:



Фиг. 315.

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}} = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

85) Пользуясь рѣшеніемъ задачи 84-ой, вычисляемъ по формуламъ:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}};\quad \sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}};$$

что уголъ φ наклоненія найденнаго въ задачѣ 84 круговаго сѣченія къ плоскости (x, y) имѣетъ слѣдующіе *sin* и *cos*:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2-c^2)}}} = \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2b^2 - a^2c^2 + a^2c^2 - b^2c^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Повернемъ оси на уголъ φ около оси y.

$$x = x'\cos\varphi - z'\sin\varphi = \frac{x'a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}} - \frac{z'c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}.$$

$$z = x'\sin\varphi + z'\cos\varphi = \frac{x'c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}} + \frac{z'a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$$

Уравненіе эллипсоида относительно новыхъ осей будетъ:

$$\frac{(x'a\sqrt{b^2-c^2} - z'c\sqrt{a^2-b^2})^2}{a^2b^2(a^2-c^2)} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$+ \frac{(x'c\sqrt{a^2-b^2} + z'a\sqrt{b^2-c^2})^2}{b^2c^2(a^2-c^2)} = 1;$$

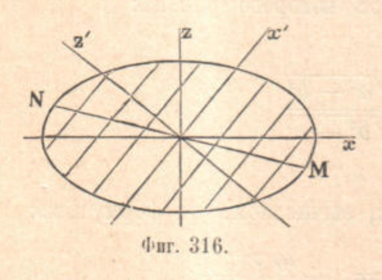
или:

$$z'^2\left(\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2b^2(a^2-c^2)} + \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2c^2(a^2-c^2)}\right) + \frac{y^2}{b^2}$$

$$+ x'^2\left(\frac{a^2(b^2-c^2)}{a^2b^2(a^2-c^2)} + \frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2c^2(a^2-c^2)}\right)$$

$$+ \frac{2x'z'ac\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{b^2(a^2-c^2)}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1.$$

$$\frac{b^2(a^2+c^2) - a^2c^2}{a^2b^2c^2} z_1^2 + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{2x_1z_1\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{acb^2} = 1.$$



Фиг. 316.

Полагая здѣсь $z_1 = m$ гдѣ m постоянное получимъ уравненіе, въ которомъ коэффиціенты при y^2 и при x_1^2 одинаковы. Это уравненіе окружности. Слѣдовательно сѣченія эллипсоида плоскостями параллельными плоскости (x', y) получаются въ видѣ окружностей и потому они проэктируются на плоскость (x_1, y) какъ круги (фиг. 316). Чтобы убѣдиться въ этомъ, перенесемъ начало плоскихъ координатъ (x', y)

по формулѣ $x_{\prime} = x_{\prime\prime} + \alpha$. Получимъ:

$$\frac{b^2(a^2+c^2)-a^2c^2}{a^2b^2c^2}m^2 + \frac{y_{\prime\prime}^2}{b^2} + \frac{x_{\prime\prime}^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{2\alpha x''}{b^2}$$

$$+ \frac{2x_{\prime\prime} m\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{acb^2} + \frac{2\alpha m\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{acb^2} = 1\,.$$

Изберемъ такое α, чтобы члены, содержащіе x'' въ первой степени, уничтожились. Для опредѣленія α будетъ служить уравненіе:

$$\frac{2\alpha}{b^2} + \frac{2m\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{acb^2} = 0\,;$$

уравненіе же сѣченія приметъ видъ:

$$x_{\prime\prime}^2 + y_{\prime\prime}^2 = \left[1 - \frac{b^2(a^2+c^2)-a^2c^2}{a^2b^2c^2}m^2 - \frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{2\alpha m\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{acb^2}\right]b^2.$$

Правая часть состоитъ изъ постоянныхъ величинъ. Называя ея R^2, получимъ $x_{\prime\prime}^2 + y_{\prime\prime}^2 = R^2$ знакомое намъ уравненіе окружности. Такой же рядъ круговыхъ сѣченій получится отъ пересѣченія эллипсоида плоскостями параллельными другому круговому сѣченію задачи 84-ой.

86) Мы видѣли въ задачѣ 85-ой, что центръ кругового сѣченія лежитъ на разстояніи α отъ оси oz', при чемъ α опредѣляется изъ уравненія

$$\alpha + \frac{m\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ac} = 0\,;$$

или:

$$\alpha = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ac}z_1\,.$$

Всѣ центры лежатъ (фиг. 316) въ плоскости (x', z'). Слѣдовательно они лежатъ на прямой MN, имѣющей уравненіе:

$$x' = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{ac}z_1.$$

Изъ формулъ, дающихъ переходъ отъ x, y къ x_1, z, легко получить для обратнаго перехода: $x_1 = x\cos\varphi + z\sin\varphi$; $z' = -x\sin\varphi + z\cos\varphi$. Вставляя эти величины въ найденное уравненіе прямой, получимъ:

$$(xa\sqrt{b^2-c^2} + zc\sqrt{a^2-b^2})\,ac$$
$$= (xc\sqrt{a^2-b^2} - za\sqrt{b^2-c^2})\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}$$

или:

$$z = -x\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}}\,.$$

Центры одного ряда круговыхъ сѣченій лежатъ на этой прямой, соста-

вляющей съ осью x тупой уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{-c\sqrt{b^2-c^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}}$. Центры другого ряда лежатъ (по симметріи эллипсоида) на другой прямой наклоненной къ оси x подъ угломъ дополнительнымъ этому до 180°, тангенсъ его $= \frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}}$. Уравненіе 2-ой прямой таково:

$$z = x\,\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Прямыя, проходящія чрезъ центры круговыхъ сѣченій эллипсоида имѣютъ весьма важное значеніе въ оптикѣ и въ кристаллографіи.

87) $$b\,dx.$$

88) $$(mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + 5Cx^4)\,dx.$$

89) $$(mA_m x^{m-1} + (m-1)\,A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + 2A_2x + A_1)\,dx.$$

90) $$(6x + 20x^3 + 42x^6 + 33x^{10})\,dx.$$

91) $$[(a+bx)\,n + (m+nx)\,b]\,dx.$$

92) $$[(ax^2+bx+c)(2Ax+B) + (Ax^2+Bx+C)(2ax+b)]\,dx.$$

93) $$[ax^2 + bx + c + x\,(2ax+b)]\,dx.$$

94) $$\frac{[(Ax+B)\,a - (ax+b)\,A]\,dx.}{(Ax+B)^2}.$$

95) $$\frac{[(Ax^2+Bx+C)(2ax+b) - (ax^2+bx+c)(2Ax+B)]\,dx.}{[Ax^2+Bx+C]^2}.$$

96) $$\frac{[(2x^5-3x^7)(6x+55x^{10}) - (3x^2+5x'')(10x^4-21x^6)]\,dx}{(2x^5-3x^7)^2}.$$

97) $$\cos(ax^2+b)\,2ax\,dx.$$

98) $$[(ax^2+bx+c)\cos x + (2ax+b)\sin x]\,dx.$$

99) $$(2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)\,dx.$$

100) $$(-\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \cos(2x)\,dx.$$

101) $$\frac{[(ax+b)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)\,a]\,dx}{(ax+b)^2}.$$

102) $$\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax+b}}.$$

103) $$\frac{(2ax+b)\,dx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

104) $$-\frac{a\,dx}{2\,(ax+b)^{\frac{3}{2}}}.$$

105) $$-\frac{(2ax+b)\,dx}{2\,(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}}.$$

106) $$\frac{2x\,dx}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

107) $$-\frac{xdx}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

108) $$\left[\frac{x\sin x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\sqrt{a^2+x^2}\,\cos x\right]dx.$$

109) $$\frac{\left[\frac{x\sin x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\sqrt{a^2+x^2}\,\cos x\right]dx}{\sin^2 x}$$

$$=\left[\frac{x}{\sin x\,.\,\sqrt{a^2+x^2}}-\sqrt{a^2+x^2}\,\frac{\cot g\,x}{\sin x}\right]dx.$$

110) $$\frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}.$$

111) $$\frac{\cos x\,.\,dx}{\sin x}=\cot g\,x\,.\,dx.$$

112) $$y=x^x;\ \ lg\,y=x\,lg\,x;\ \ \frac{dy}{y}=x\,\frac{dx}{x}+lg\,x\,dx,$$

$$dy=y\,(1+lg\,x)\,dx=x^x\,(1+lg\,x)\,dx;\ \ d\,(x^x)=x^x\,(1+lg\,x)\,dx.$$

113) $$y=e^{x^2};\ \ lg\,y=x^2;\ \ \frac{dy}{y}=2\,x\,dx;\ \ dy=2\,yx\,dx=2\,e^{x^2}\,x\,dx;$$

$$d\,(e^{x^2})=2\,x\,e^{x^2}\,dx.$$

114) $$y=e^{-x^2};\ \ lg\,y=-x^2;\ \ \frac{dy}{y}=-2\,x\,dx;$$

$$dy=-2\,y\,x\,dx=-2\,x\,e^{-x^2}\,dx;\ \ d\,(e^{-x^2})=-2\,x\,e^{-x^2}\,dx.$$

115) $$\frac{x^2}{(x+2)^5}\left[\frac{(x+2)^7}{x+1}\right]^{1/2}dx.$$

116) $$-\frac{dx}{x\,(1-x^2)^{1/2}}.$$

117) $$\frac{dx}{x\,lg\,x}.$$

118) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, e^{arcsin\, x}.$$

119) $$x^{\sin x}\left[\cos x \cdot lg\, x + \frac{\sin x}{x}\right] dx.$$

120) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x};\ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{dy}{x};$$

$$dz = \frac{1}{x}\left(dy - \frac{y}{x}dx\right).$$

121) $$\frac{\partial z}{\partial x} = y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x;\ dz = y\,dx + x\,dy.$$

122) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 15\,x^2 - 6\,xy + 5\,y^3;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3\,x^2 + 15\,xy^2 - 10;$$

$$dz = (15\,x^2 - 6\,xy + 5\,y^3)\,dx + (15\,xy^2 - 3\,x^2 - 10)\,dy.$$

123) Если $u = lg\, tg\, x$, то

$$du = \frac{dx}{\cos^2 x \cdot tg\, x} = \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y\sin x \cdot \cos x};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2 \sin x \cdot \cos x};$$

$$dz = \frac{dx}{y\sin x \cdot \cos x} - \frac{x\,dy}{y^2\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{y\sin(2x)}\left(dx - \frac{x}{y}dy\right).$$

124) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cdot \cos y;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \cdot \sin y;$$

$$dz = \cos x \cdot \cos y \cdot dx - \sin x \cdot \sin y\, dy.$$

125) $$f(x, y) = y - e^x - e^y - x;\ \frac{\partial f}{\partial x} = -e^x - 1;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - e^y;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{e^x - 1}{1 - e^y}.$$

126) $$f(x, y) = y - 1 - x e^y;\ \frac{\partial f}{\partial x} = -e^y;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x e^y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{xe^y - 1}.$$

127) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y + \sin y - 2 \sin (2y);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{2 \sin (2y) - x \cos y - \sin y}.$$

128) $$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x + \sin (x-y); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x - \sin (x-y);$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cos x + \sin (x-y)}{\sin x - \sin (x-y)}.$$

129) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x;$$

130) $$\frac{dy}{dx} = 5x^4; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2.$$

131) $$\frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$$

132) $$\frac{dy}{dx} = -2 \cos x \,.\, \sin x;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos^2 x + 2\sin^2 x = -2\cos (2x); \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 4 \sin (2x).$$

133) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = +2x^{-3};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}.$$

134) $$\frac{dy}{dx} = -m(a-bx)^{m-1} b; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1) b^2 (a-bx)^{m-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -m(m-1)(m-2) b^3 (a-bx)^{m-3} \ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) b^n (a-bx)^{m-n}.$$

Здѣсь множитель $(-1)^n$ поставленъ только для того, чтобы показать, что при n четныхъ стоятъ $+$, при нечетныхъ $-$.

135) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = +2x^{-3}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -2 \cdot 3x^{-4};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = +2 \,.\, 3 \,.\, 4x^{-5} \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots nx^{-(n+1)}$$

138) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -3ax + 3y^2$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3a$$

$$d^2U = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (dy)^2$$

$$= 6x (dx)^2 - 6a \, dx \, dy + 6y (dy)^2.$$

139) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = e^x \sin y$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^x \cos y; \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y; \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y; \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y$$

$$d^3U = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^{(3)} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy$$

$$+ 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} (dx) (dy)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} (dy)^3$$

$$d^3 u = e^x \sin y dx^3 + 3e^x \cos y dx^2 dy - 3e^x \sin y dx dy^2 - e^x \cos y dy^3$$

140) Первыя производныя остаются безъ перемѣны; вторая производная обращается въ

$$\frac{dx \, d^2 y - dy \, d^2 y}{dx^3}$$

Данное уравненіе обращается въ

$$\frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^3} - x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Замѣчая, что теперь $d^2 y = 0$ и умножая все на $(dx)^3$, получимъ:

$$dy d^2 x + x (dy)^3 - e^y (dy)^3 = 0.$$

Дѣля все на $(dy)^3$, получимъ:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} + x - e^y = 0$$

141) $x = a \cos^3 \omega$; $dx = -3a \cos^2 \omega \, . \, \sin \omega \, . \, d\omega$;

$$\left(\frac{a \cos^3 \omega}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1; \cos^2 \omega + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

$$y = b (1 - \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}} = b \sin^3 \omega; \; dy = 3b \sin^2 \omega \quad \cos \omega \, . \, d\omega;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3b\, sin^2\, \omega\, .\, cos\, \omega\, d\omega}{3a\, cos^2\, \omega\, .\, sin\, \omega\, d\omega} = -\frac{b}{a}\, tg\, \omega$$

142) Данное уравненіе обращается въ:

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0;$$

$$dx = -\, sin\, t\, dt;\; d^2x = -\, cos\, t\, .\, dt^2$$

$$\frac{-\, sin\, t\, dt\, .\, d^2y + dy\, .\, cos\, t\, dt^2}{-\, sin^3\, t\, dt^3} + \frac{cos\, t\, dy}{sin^2\, t\, .\, sin\, t\, dt} + \frac{y}{sin^2 t} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + 0$$

143) По теоремѣ Тэйлора:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + 2\,(3x^2 - 6x + 4) + \frac{4}{1\, .\, 2}(6x - 6) + \frac{8}{1\, .\, 2\, .\, 3}6$$

$$= x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + 6x^2 - 12x + 8 + 12x - 12 + 8$$

$$= x^3 + 3x^2 + 4x - 1.$$

144) $$f\,(x + 3) = x^6 - x^3 + 1 + 3\,(6x^5 - 3x^2)$$

$$+ \frac{9}{1\, .\, 2}(30x^4 - 6x) + \frac{27}{1.2.3}\,(120x^3 - 6) + \frac{81}{1\, .\, 2\, .\, 3\, .\, 4}\, 360x^2$$

$$+ \frac{243}{1\, .\, 2\, .\, 3\, .\, 4\, .\, 5}\, 720x + \frac{729}{1\, .\, 2\, .\, 3\, .\, 4\, .\, 5\, .\, 6}\, 720.$$

145) $$f\,(x) = \sqrt{x}\,;\; f'\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,;\; f''\,(x) = -\frac{1}{4}\, x^{-\frac{3}{2}};$$

$$f'''\,(x) = \frac{3}{8}\, x^{-\frac{5}{2}} \ldots$$

$$\sqrt{x+1} = f\,(1 + x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{4} + \frac{1\, .\, 3}{2\, .\, 4}\,\frac{x^3}{6} - \ldots$$

146) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1\;\; 3}{2\, .\, 4}\, x^2 + \frac{1\, .\, 3\, .\, 5}{2\, .\, 4\, .\, 6}\, x^3 + \ldots$$

147) $$ar\, sin\, x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\, .\, 3}{2\, .\, 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\, .\, 3\, .\, 5}{2\, .\, 4\, .\, 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots :$$

148) $$(ar\, sin\, x)^2 = 2\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{2\, .\, 4}{3\, .\, 5}\,\frac{x^6}{6} + \frac{2\, .\, 4\, \cdot 6}{3\, .\, 5\, .\, 7}\cdot\frac{x^8}{8} + \ldots\right]$$

151) $sin\left[\frac{x^2 - \sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax} - a}\right]_{x=a} = 3a$ 153) $-\frac{1}{2}$

152) $-\frac{1}{56}$ 154) lga

158) Наибольш. при $x = 3$; наименьш. при $x = 5$. Наименьш. $= 30$. Наибольш. $= 84$.

159) Наименьш. при $x = 6$; $x = -3$. Наибольш. при $= -6$; $x = 3$.

160) Наибольш. при $x = -1$; наименьш. при $x = 3$. Наибольш. $= \infty$; наименьш. $= -\frac{1}{8}$.

161) Наименьш. при $x = e$. Оно равно e.

162) Назовемъ основаніе чрезъ x, сумму высоты и основанія чрезъ m; тогда высота будетъ $m - x$. Найти наибольшее значеніе функціи $x(m-x)$.

$$\frac{d\,[x\,(m-x)]}{dx} = m - x - x = 0;\ x = \frac{m}{2};\ \text{высота} = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}.$$

Высота и основаніе наибольшаго треугольника равны между собою.

163) Обозначимъ гипотенузу чрезъ p, одинъ изъ острыхъ угловъ чрезъ φ. Катеты будутъ $p\cos\varphi$ и $p\sin\varphi$. Найти наибольшее значеніе функціи $p\,(\cos\varphi + \sin\varphi)$

$$\frac{d\,(\cos\varphi + \sin\varphi)}{d\varphi} = -\sin\varphi + \cos\varphi = 0.$$

Итакъ $\sin\varphi = \cos\varphi$; $\varphi = 45°$. Катеты должны быть равные.

164) Радіусъ полукруга долженъ равняться высотѣ прямоугольника.

165) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 3;\ x = 1;\ y = 2;\ z = -3.$

166)
$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Длина отрѣзка постоянная $= a$.

167)
$$Y - y = 3x^2\,(X - x)$$

168) $y\,lg\,x - x + y = 0;\ y = \frac{x}{1 + lg\,x};\ \frac{dy}{dx} = \frac{tg\,x}{(1 + lg\,x)^2};$

$$\text{подкасательная} = \frac{x^2}{x - y}$$

169) $r^4 = a^2 r^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi);\ (x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0;$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,(x^2 + y^2)\,2x - 2a^2x;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,(x^2 + y^2)\,2y + 2a^2y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[a^2 - 2\,(x^2 + y^2)]\,x}{[2\,(x^2 + y^2) + a^2]\,y};\quad Y - y = \frac{[a^2 - 2\,(x^2 + y^2)]\,x}{y\,[2\,(x^2 + y^2) + a^2]}\,(X - x).$$

170)
$$\frac{dy}{dx} = -\sin x;\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x.$$

Знаки при $\cos x$ и при $(-\cos x)$ противуположны при всѣхъ иксахъ; слѣдовательно кривая постоянно обращена вогнутостью къ оси x.

171) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x = 0.$$

Отсюда $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ $2n+1$ есть обозначеніе какого угодно нечетнаго числа. При x равномъ нечетному числу разъ $\frac{\pi}{2}$ кривая имѣетъ точки перегиба.

172) $y^2 = 2px$; $y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p}\sqrt{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = tg\, 45^\circ = 1;\ \frac{p}{y} = 1;\ p = y;\ x = \frac{p}{2}.$$

Точка лежитъ въ концѣ ординаты возставленной изъ фокуса.

173) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ a + b = m$$

$$F(x, y, a) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(m-a)^2} - 1;\ \frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{(m-a)^3} = 0;$$

$$a = \frac{mx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}};\ m - a = \frac{my^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}};\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}.$$

Эллипсы этой задачи суть тѣ, которые вычерчиваются различными точками отрѣзка длины m опирающагося концами на оси координатъ (сравн. съ задач. 45 и 166).

174) $$(x-a)^2 + y^2 - 4ma = F(x, y, a) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{dx} = -2(x-a) - 4m = 0;\ x - a + 2m = 0;\ a = x + 2m$$

$$4m^2 + y^2 - 4mx - 8m^2 = 0;\ y^2 = 4mx + 4m^2;$$

парабола.

175) Дифференцируя уравненіе $y^2 = 2px + qx^2$, получимъ:

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p + 2qx;$$

откуда: $$\frac{dy}{dx} = \frac{p+qx}{y}.$$

Дифференцируя: $$y\frac{dy}{dx} = p + qx,$$

получимъ: $$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q.$$

Слѣдовательно: $$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p^2 + 2pqx + q^2x}{y^2} = q;$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p^2 + q(2px + qx^2)}{y^2} = q;\ y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p^2}{y^2} + q = q;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}; \quad \rho = y^3 \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Но
$$n^2 = y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

если n обозначаетъ нормаль (отъ точки кривой до оси). Поэтому:

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Такова величина радіуса кривизны для всѣхъ коническихъ сѣченій (см. § 63).

176) $\rho = \frac{(2a+3x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{a\sqrt{3}}; t = \left(-x - \frac{3x^2}{a}\right); u = 2\sqrt{\frac{2x}{3a}}\,(2x+a);$

$$81au^2 = 4\,[2a \pm \sqrt{a^2 - 12at}]^2\,[\pm\sqrt{a^2 - 12at} - a]$$

—уравненіе развертки въ координатахъ (t, u).

177) $$t = \frac{ax\,(5x - 12a)}{3\,(2a - x)^2}; \quad u = \frac{8ax^{\frac{1}{2}}}{3(2a - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

178) $$\rho = \frac{a^2}{3r}.$$

179) Лемниската имѣетъ видъ восьмерки (цифры 8) лежащей по полярной оси.

180) Эта кривая называется *конхоидою*. Уравненіе ея:

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$$

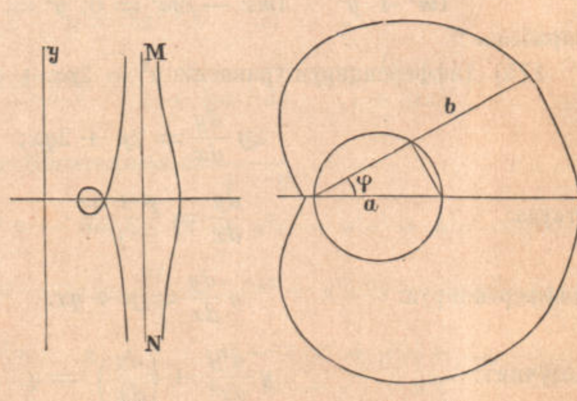
или:

$$x = a \pm \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

или:

$$(x - a)^2\,(x^2 + y^2) = b^2 x^2;$$

(фиг. 317).



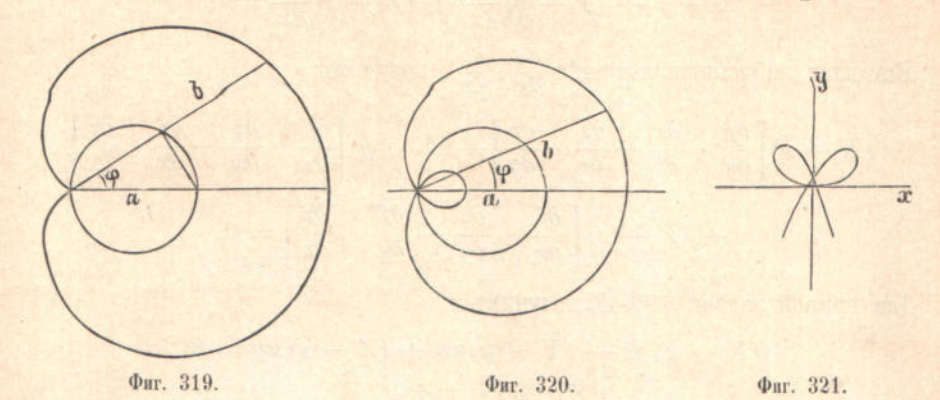
Фиг. 317. Фиг. 318.

181) Эта кривая называется *улиткою Паскаля*. Уравненіе ея:

$$r = a\cos\omega \pm b$$

или: $$\sqrt{x^2 + y^2} = a\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm b; \quad (x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2\,(x^2 + y^2)$$

Если $b > a$, то видъ ея таковъ какъ (фиг. 318).
Если $b = a$, то она имѣетъ видъ фиг. 319-ой и называется *кардіоидою*.



Фиг. 319. Фиг. 320. Фиг. 321.

Если $b < a$, то видъ ея таковъ какъ фиг. 320. На всѣхъ трехъ фигурахъ начерченъ и кругъ, изъ котораго образуется улитка.

182) $$x = \frac{3a}{2}.$$

183) $$x = 0.$$

184) Видъ кривой изображенъ на фиг. 321.

185) $(x^2 + y^2 + m^2)^2 - 4m^2 x^2 = a^4$, гдѣ $2m$ есть разстояніе между фокусами.

186) $$a^2 X^2 + b^2 Y^2 = (X^2 + Y^2)^2.$$

189) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z;\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$(X - x)\,x + (Y - y)\,y = 0;\ \text{или:}\ Xx + Yy = R_1^2$$

$$(Y - y)\,y + (Z - z)\,z = 0;\ \text{или:}\ Yy + Zz = R_2^2$$

190) Уравненіе нормальной плоскости въ дифференціальной формѣ (362) для всѣхъ кривыхъ одинаково. Чтобы получить его въ конечной формѣ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}};\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Дѣля (392) на dx, получимъ:

$$X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} + (Z - z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Вставляя найденныя значенія $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, получимъ:

$$(X - x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + (Y - y)\left[\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]$$

$$+ (Z - z)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = 0.$$

Для кривой задачи 190-ой получимъ:

$$(X - x)\,yz - (Y - y)\,zx + (Z - z)\,xy = 0.$$

191) $$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

192) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2};\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2};$$

$$\cos(N, x) = \frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\cos(N, y) = \frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\cos(N, z) = \frac{z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

193) $$\frac{(x - X)\,a^2}{x} = \frac{(y - Y)\,b^2}{y} = \frac{(z - Z)\,c^2}{z}.$$

194) $$\frac{x \,.\, ar\sin x}{\sqrt{1 - x^2}} + lg\sqrt{1 - x^2}.$$

195) $$x - \sqrt{1 - x^2}\,.\, ar\sin x.$$

196) $$x \,.\, artg x - lg\sqrt{1 + x^2}$$

197) $$\left(x - \frac{1}{2}artg x\right) artg x - lg\sqrt{1 + x^2}$$

198) $$\frac{1}{2}\, ar\sin\left(\frac{x^2}{a^2}\right).$$

199) $$\frac{1}{2a^2}\, ar\,tg\left(\frac{x^2}{a^2}\right).$$

200) Полагая $a + bx = y$ получимъ:

$$\frac{1}{b^3}\left(\frac{y^2}{2} - 2ay + a^2\, lg\, y\right).$$

201) $$-\frac{1}{\sin x}.$$

202) $$\frac{1}{3}\, lg \left[\frac{(x+1)^2\,(x-2)}{(x-1)\,(x+2)^2}\right].$$

203) $$\frac{a^3\, lg\, (x-a)}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{b^3\, lg\, (x-b)}{(b-a)\,(b-c)} + \frac{c^3\, lg\, (x-c)}{(c-a)\,(c-b)}.$$

204) Подстановка $x = t^6$ приводитъ $\int$ къ виду

$$\int \frac{(1 + t^2 - t^3)\, 6t^5\, dt}{1 + t^2}$$

не содержащему радикаловъ.

205) $$lg\left(1 + x + \sqrt{3 + 2x + x^2}\right)$$

206) $$\int \frac{dx}{\sqrt{mx^2 + nx + p}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{n}{m}\, x + \frac{p}{m}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}}\, lg\left(\frac{n}{2m} + x + \sqrt{x^2 + \frac{n}{m}\, x + \frac{p}{m}}\right)$$

207) $$\int \sin x\, .\, d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2}$$

208) $$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\, lg \cos x$$

209) $$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = lg \sin x$$

210) $$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d\, tg\, x}{tg\, x} = lg\, tg\, x.$$

211) $$\int_0^a y\, dx = \int_0^a x^3\, dx = \frac{a^4}{4}$$

212) $$\frac{a^2}{4} \sin 2\varphi + C.$$

213) $$f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\,; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}\, y^{-\frac{1}{3}}\,; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Длина всей кривой заключенной между положительными частями осей координатъ

$$= a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}\right)_0^a = \frac{3}{2}\, a.$$

214) $$\frac{\int_2^5 x^3\, dx}{5-2} = \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=2}^{x=5} = 50\,\frac{3}{4}\;.$$

215) $$\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\; d\varphi}{\pi - 0} = \frac{[-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}}{\pi} = \frac{[\cos\varphi]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0}}{\pi} = \frac{1-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

216) $$\frac{2}{3}\sqrt{2pa}$$

218) $$\pi \int_0^x y^2\, dx = \pi \int_0^x 2\, px\, dx = \frac{2\pi p x^2}{2} = \frac{\pi y^2 x}{2} = \text{половинѣ}$$

цилиндра высоты x и основанія πy^2.

219) $$\frac{abc}{3}\,.$$

220) $$\frac{V}{8} = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\, dx\, dy = \frac{2}{3}\, a^3.$$

221) $$\int_0^a \int_{y=0}^{y=kx} \int_{z=0}^{z\,\sqrt{k^2x^2-y^2}} dx\, dy\, dz = \int_0^a \int_{y=0}^{y=kx} \sqrt{k^2x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

Этотъ интегралъ по формулѣ [4] параграфа 276-го равенъ:

$$\int_0^a \left[\frac{y\sqrt{k^2x^2-y^2}}{2}+\frac{k^2x^2}{2}\,arccos\left(-\frac{y}{kx}\right)\right]_{y=0}^{y=kx} dx$$

$$=\int_0^a\left[\frac{k^2x^2\pi}{2}-\frac{k^2x^2\pi}{2\,.\,2}\right]dx=\int_0^a\frac{\pi k^2x^2}{4}dx=\frac{\pi k^2}{4}\int_0^a x^2dx=\frac{\pi k^2a^3}{12}.$$

222) $$2\pi\int_0^a y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}\,dx=2\pi\int_0^a\sqrt{p^2+y^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^a\sqrt{p^2+2px}\,dx=2\pi\left[\frac{2}{3\,.\,2p}(p^2+2pa)^{\frac{3}{2}}-\frac{2p^3}{3\,.\,2p}\right]$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[\frac{\sqrt{(p^2+2pa)^3}}{p}-p^2\right]=\frac{2\pi}{3}\left[\sqrt{p(p+2a)^3}-p^2\right].$$

223) $$\frac{dy}{y+a}=\frac{dx}{x^2};\ lg\,(y+a)=-\frac{1}{x}.$$

224) $$\frac{(y-b)\,dy}{y}=\frac{xdx}{a-x};\ dy\quad\frac{bdy}{y}=\frac{xdx}{a-x};$$

$$y-b\,lgy=a-x-a\,lg\,(a-x).$$

225) $$dx+\frac{y}{x}\,dy=2n\left(\frac{y}{x}\right)dx;\ \frac{y}{x}=z;\ dy=zdx+xdz$$

$$(1-2nz)\,dx+z\,(zdx+xdz)=0;\ lgx+\int\frac{zdz}{1-2nz+z^2}=C$$

$$lg\,x+\frac{1}{2}\,lg\,(1-2nz+z^2)+\int\frac{ndz}{1-2nz+z^2}=C.$$

Если $n=1$, то:

$$(x-y)\,e^{\frac{x}{x-y}}=C.$$

226) $$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=dy;$$

или:

$$d\sqrt{x^2+y^2-a^2}=dy$$

$$y+c=\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

$$F\,(x,y,c)=2cy+c^2+a^2-x^2=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c}=2y+2c=0;\ c=-y;$$

подставляя въ $F(x, y, c)$ вмѣсто c величину $(-y)$, получимъ:

$$-2y^2 + y^2 + a^2 - x^2 = 0;$$

или:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Общій интегралъ $x^2 = 2cy + c^2 + a^2$ представляетъ (при различныхъ c) рядъ параболъ. Особый интегралъ $x^2 + y^2 = a^2$ представляетъ окружность.

227) $$Y - y = p(X - x), \text{ гдѣ } p = \frac{dy}{dx}.$$

Разстояніе a касательной отъ начала равно:

$$a = \frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}; \quad y = px + a\sqrt{1 + p^2}.$$

Дифференцируя по x, получимъ:

$$p = p + x\,dp + \frac{ap\,dp}{\sqrt{1 - p^2}};$$

или:

$$dp\left(x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0.$$

Послѣднее уравненіе разлагается на два:

$$dp = 0; \quad \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + x = 0.$$

Изъ $dp = 0$ получимъ:

$$p = \frac{dy}{dx} = C; \; y = Cx + C_1;$$

рядъ прямыхъ. Изъ

$$\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + x = 0,$$

въ соединеніи съ полученнымъ выше $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$ получимъ:

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая уравненія:

$$\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = -x; \quad \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} = y,$$

получимъ $x^2 + y^2 = a^2$ окружность. Требованію задачи удовлетворяютъ прямыя, проведенныя на разстояніи a отъ начала, выражаемыя общимъ интеграломъ и окружность, огибающая ихъ и выражаемая *особымъ* интеграломъ.

228) $$xp - yq = \frac{x^2}{y}; \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{y\,dz}{x^2}$$

$$y = \frac{C}{x}; \quad z = \frac{x^3}{3C} + C'; \quad z = \frac{x^2}{3y} + C'$$

$$z = \frac{x^2}{3y} + f\,(x, y).$$

229) $$p - q = \frac{z}{x+y}; \quad -dy = dx = \frac{x+y}{z}\,dz$$

$$y + x = C; \; z = e^{\frac{z}{x+y}} f\,(x+y).$$

230) $$yp + xq = z; \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z};$$

$$y^2 - x^2 = \alpha; \quad \frac{z}{x+y} = \beta$$

$$z = (x+y)\,f\,(y^2 - x^2).$$

Механика.

1) $$y = 0; \; z = \sin x.$$

Синусоида (волнообразная) лежащая въ плоскости (x, z).

2) $$x^2 + y^2 = a^2 + b^2; \quad z = 0.$$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \; z = 0;$ эллипсъ въ плоскости (x, y).

4) $x = R\cos\left(\frac{z}{c}\right); \; y = R\sin\left(\frac{z}{c}\right)$ винтовая линія.

5) $$\frac{dx}{dt} = a\cos(at) = v; \; \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2\sin(at) = j.$$

6) $$\frac{dz}{dt} = e^t = v; \; \frac{d^2z}{dt^2} = e^t = j.$$

7) Сила $ma^2\sin(at) = ma^2x$, притягивающая точку m къ началу координатъ, прямо пропорціональная разстоянію x отъ начала.

8) На точку дѣйствуютъ: тяжесть mg и сопротивленіе, которое можно выразить чрезъ mgk^2v^2 (всегда можно подобрать такое k, чтобы сопротивленіе пропорціональное квадрату скорости v выражалось такимъ образомъ):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,(1 + k^2v^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\,(1 + k^2v^2)$$

$$-g\,dt = \frac{dv}{1 + k^2 v^2}$$

$$-k\,gt = artg\,(kv) + C.$$

При $t = 0$ полагаемъ $v = v_0$. Слѣдовательно $C = artg\,(kv_0)$

$$k\,gt = artg\,(kv_0) - artg\,(kv).$$

По формулѣ $tg\,(\varphi - \theta) = \frac{tg\,\varphi - tg\,\theta}{1 + tg\,\varphi\,.\,tg\,\theta}$ получимъ:

$$k\,gt = artg\left(\frac{k\,(v_0 - v)}{1 + k^2 v_0 v}\right)$$

$$v = \frac{kv_0 - tg\,(k\,gt)}{k + k^2 v_0\,tg\,(k\,gt)} = \frac{1}{k}\left[\frac{kv_0\cos\,(k\,gt) - \sin\,(k\,gt)}{\cos\,(k\,gt) + kv_0\sin\,(kgt)}\right] = \frac{dx}{dt}$$

$$k^2 gx + C_1 = lg\,[\cos\,(k\,gt) + kv_0 \sin\,(k\,gt)].$$

При $x = 0$, время $t = 0$. Слѣдовательно $C_1 = 0$

$$k^2 gx = lg\,[\cos\,(k\,gt) + kv_0 \sin\,(k\,gt)].$$

9) Рѣшимъ сначала такую задачу: Точка m, находящаяся на прямой OA, притягивается неподвижными точками O и A по закону Ньютона. Массу точки m можно принять за единицу. Въ начальномъ положенiи D точка m получила скорость v_0 по направленiю DB. Какъ велика должна быть v_0, чтобы m, дойдя до положенiя равновѣсiя E, потеряла бы всю скорость?

Примемъ 0 за начало координатъ, OA за ось иксовъ. Обозначимъ массы точекъ O и A чрезъ m_1 и m_2, коэффицiентъ притяженiя—чрезъ k. Пусть будутъ: a—разстоянiе OA; x_1 и x_2 координаты точекъ D и E.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\,v = -\,\frac{km_1}{x^2} + \frac{km_2}{(a-x)^2}$$

$$v = \frac{2km_1}{x} + \frac{2km_2}{a - x} + C.$$

Изъ начальныхъ обстоятельствъ движенiя находимъ, для опредѣленiя C, такое уравненiе:

$$v_0^{\,2} = C + \frac{2km_1}{x_1} + \frac{2km_2}{a - x_1}.$$

Поэтому:

$$v_0^{\,2} - v^2 = 2km_1\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) + 2km_2\left(\frac{1}{a - x_1} - \frac{1}{a - x}\right).$$

При $x = x_2$ скорость v обращается въ нуль. Слѣдовательно:

$$v_0 = 2km_1\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + 2km_2\left(\frac{1}{a-x_1} - \frac{1}{a-x_2}\right).$$

Положенiе точки E опредѣляется условiемъ

$$\frac{km_1}{x_2^2} = \frac{km_2}{(a-x_2)^2}.$$

Для случая земли и луны, обозначая чрезъ R радiусъ земли получимъ:

$$a = 60R; \quad x_1 = R; \quad \frac{81}{x_2^2} = \frac{1}{(60R - x_2)^2}$$

или:
$$\frac{9}{x_2} = \frac{1}{60R - x_2};$$

откуда: $x_2 = 54R$. $\qquad \dfrac{km_1}{R^2} = 9{,}8.$

Поэтому: $\quad v_0{}^2 = 19{,}6 \;.\; 6400000\left[1 + \frac{1}{5\;.\;81} - \frac{10}{6\;.\;81}\right].$

Отсюда приблизительно: $v_0 = 11000$ метровъ въ секунду. Это громадная начальная скорость: теперь артиллерiя не достигла еще начальной скорости въ 500 метровъ. Если точку бросить по направленiю къ лунѣ съ большею скоростью чѣмъ 11000 метровъ, то она упадетъ на луну; если съ меньшею, то она вернется на землю.

10) $$\frac{dx}{dt} = a; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = a\cos(at);$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -a^2\sin(at)$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2 + a^2\cos^2(at)} = a\sqrt{1 + \cos^2(at)}$$

$$j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{a^4\sin^2(at)} = a^2\sin(at) = a^2z.$$

11) $$\frac{dx}{dt} = a\cos t; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = -b\sin t;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b\cos t; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$v = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,; \quad j = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(V, x) = \frac{\frac{dx}{dt}}{V} = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$\cos(V, y) = \frac{\frac{dy}{dt}}{V} = \frac{-b \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$$

$$\cos(V, z) = 0$$

$$\cos(j, x) = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{j} = \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos(j, y) = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{j} = \frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos(j, z) = 0.$$

Послѣднія 3 формулы показываютъ, что ускореніе направлено къ центру эллиптической траекторіи полученной къ задачѣ 3.

12) $$\frac{dx}{dt} = -R \sin t;\ \frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos t;\ \frac{dy}{dt} = R \cos t;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R \sin t;\ \frac{dz}{dt} = C;\ \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$v = \sqrt{R^2 + C^2};\ \ j = R$$

$$\cos(V, x) = \frac{-R \sin t}{\sqrt{R^2 + C^2}};\quad \cos(V, y) = \frac{R \cos t}{\sqrt{R^2 + C^2}};$$

$$\cos(V, z) = \frac{C}{\sqrt{R^2 + C^2}}$$

$$\cos(j, x) = -\cos t;$$

$$\cos(j, y) = -\sin t;$$

$$\cos(j, z) = 0.$$

Добавленіе I-е.

О мнимомъ перемѣнномъ.

Математика послѣдней половины XIX-го столѣтія характеризуется особенно сильнымъ развитіемъ теоріи мнимаго перемѣннаго, на почвѣ котораго построена вся современная теорія функцій. Поэтому я нахожу необходимымъ сказать нѣсколько словъ о мнимыхъ величинахъ и о функціяхъ мнимаго перемѣннаго.

Мнимою величиною называется всякая величина содержащая $\sqrt{-1}$. Квадратнымъ корнемъ называется такая величина, которая, по возведеніи въ квадратъ, даетъ подкоренное количество. Въ ряду цѣлыхъ, дробныхъ и ирраціональныхъ величинъ, которыми занимается элементарная алгебра, не существуетъ такой, квадратъ которой былъ бы равенъ -1. Поэтому $\sqrt{-1}$ и названъ величиною *мнимою*.

Но невозможность такой величины совершенно условна. Постараемся это пояснить.

Когда занимаются только цѣлыми числами, то признаютъ невозможнымъ дѣленіе меньшаго числа на большее, и дѣйствительно во многихъ задачахъ, напримѣръ въ такихъ, гдѣ требуется опредѣлить число живыхъ людей, результатъ $^1/_3$ человѣка нелѣпъ. Но это не помѣшало установленію понятія о дроби и существуетъ множество задачъ, въ которыхъ дробный результатъ не содержитъ никакой нелѣпости. Съ теченіемъ времени понятіе дроби вошло въ обыденную жизнь и знакомо каждому; выраженіе $^1/_4$ фунта понятно каждому. Со введеніемъ дробныхъ величинъ оказалось возможнымъ дѣленіе меньшаго числа на бо̀льшее. Результатъ такого дѣленія нельзя найти въ ряду цѣлыхъ чиселъ, но его можно найти въ ряду дробныхъ чиселъ.

Во многихъ ариѳметикахъ категорически заявляется, что изъ меньшаго числа нельзя вычитать большаго. Во многихъ задачахъ результатъ такого дѣйствія дѣйствительно нелѣпъ, напримѣръ если окажется, что явилось къ обѣду (-5) человѣкъ. Но существуетъ множество задачъ, въ которыхъ вполнѣ понятны результаты вычитанія большаго числа изъ меньшаго—отрицательныя числа. Съ теченіемъ времени и отрицательныя числа вошли въ обыденную жизнь. Ученикъ, повѣрившій въ ариѳметикѣ,

что нельзя вычитать большаго числа изъ меньшаго, преспокойно занимается такимъ вычитаніемъ въ алгебрѣ. Точнѣе надо было бы выразиться такъ: результатъ вычитанія большаго числа изъ меньшаго не находится въ ряду положительныхъ цѣлыхъ или дробныхъ чиселъ. Но его можно найти въ ряду отрицательныхъ чиселъ.

Точно такъ же результатъ извлеченія квадратнаго корня изъ отрицательнаго количества нельзя найти въ ряду дѣйствительныхъ, цѣлыхъ или дробныхъ, положительныхъ или отрицательныхъ чиселъ. Но отсюда еще не вытекаетъ невозможность извлеченія квадратнаго корня изъ отрицательныхъ количествъ. Только результатъ такого дѣйствія надо искать въ ряду особыхъ чиселъ, неудачно названныхъ мнимыми.

Отрицательныя и дробныя числа были введены очень давно, и съ введеніемъ ихъ математика обогащалась новымъ матеріаломъ. Мало по малу эти числа проникли и въ жизнь. Точно такъ же введеніе мнимыхъ величинъ необыкновенно обогащаетъ математику и эти величины несомнѣнно проникнутъ современемъ въ обыденную жизнь.

При введеніи такихъ новыхъ величинъ чрезвычайно важно соединить ихъ съ какимъ нибудь реальнымъ представленіемъ, напримѣръ геометрическимъ. Это и сдѣлано для отрицательныхъ величинъ: если направленіе въ одну сторону считается положительнымъ, то направленіе въ противуположную сторону считаютъ отрицательнымъ. Нужно только, чтобы такое представленіе согласовалось со свойствами изучаемыхъ величинъ. Величины $+a$ и $-a$ при сложеніи взаимно уничтожаются; движеніе точки на разстояніе a впередъ и затѣмъ на разстояніе a назадъ приводитъ точку въ первоначальное положеніе. Въ этихъ и другихъ подобныхъ фактахъ и находитъ себѣ оправданіе представленіе отрицательныхъ величинъ противуположнымъ направленіемъ.

Теперь я хочу показать, что и мнимой величинѣ $\sqrt{-1}$ можно придать реальное значеніе. Можно напримѣръ считать помноженіе вектора a на $\sqrt{-1}$ за поворотъ на 90°. Дѣйствительно, если $OA = a$, и я принимаю, что $OB = a\sqrt{-1}$, то, помножая OB на $\sqrt{-1}$ я повертываю OB еще на 90° и долженъ получить $OA' = -a$. Но это совершенно согласуется со свойствами $\sqrt{-1}$, потому, что

$$OA' = -a = a\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1},$$

ибо извѣстно, что $\sqrt{-1}\ \sqrt{-1} = -1$.

Сначала математики встрѣтили мнимыя величины при рѣшеніи квадратныхъ уравненій и долгое время принимали ихъ за невозможныя величины. Мало по малу убѣждались въ ихъ важномъ и болѣе глубокомъ значеніи. Наконецъ въ началѣ XIX-го столѣтія знаменитый Коши (Cauchy) широко примѣнилъ мнимыя величины къ теоріи уравненій и къ интеграламъ. Съ тѣхъ поръ теорія мнимыхъ величинъ стала быстро развиваться и пролила яркій свѣтъ на многіе вопросы анализа и на общую теорію функцій.

Оказалось болѣе цѣлесообразнымъ изслѣдовать не $\sqrt{-1}$, но двучленъ:

$$x + y\sqrt{-1}$$

называемый *комплексною величиною.* Эту величину стали изображать геометрически слѣдующимъ образомъ: величины x стали откладывать по оси x прямоугольной системы координатъ, величины y—по оси y. Всю же величину $x + y\sqrt{-1}$ изображать точкою (x, y). Такую точку называютъ *фигуративною.* Самую величину $\sqrt{-1}$ стали изображать сокращенно буквою i, такъ что комплексную величину изображаютъ такъ:

$$x + iy.$$

Фигуративную точку можно отнести и къ полярнымъ координатамъ. Помощью извѣстныхъ формулъ:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi$$

получимъ:

$$x + iy = r\cos\varphi + ir\cos\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Затѣмъ стали изучать функціи отъ комплекснаго перемѣннаго $x + iy$. Такія функціи:

$$z = f(x + iy).$$

Изученіе именно такихъ-то функцій и оказалось наиболѣе плодотворнымъ. Одинъ изъ современныхъ математиковъ выразился такъ: область дѣйствительныхъ величинъ представляетъ собою какъ бы маленькій островокъ на безбрежномъ океанѣ комплексныхъ величинъ. Съ этой точки зрѣнія дѣйствительная величина есть частный случай комплексной, именно—такая комплексная $x + iy$, въ которой $y = 0$. При упомянутомъ геометрическомъ представленіи фигуративными точками только точки расположенныя на оси x представляютъ собою дѣйствительныя величины, всѣ же прочія точки служатъ представителями мнимыхъ величинъ.

Не углубляясь далѣе въ теорію функцій комплекснаго перемѣннаго, познакомимся съ нѣкоторыми замѣчательными соотношеніями, получаемыми при помощи мнимыхъ величинъ.

Вставимъ въ формулу 290:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \quad (290)$$

вмѣсто x, величину $x\sqrt{-1}$. Получимъ:

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2\dots5} - \dots$$

или:

$$e^{x\sqrt{-1}} \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots\right)$$

$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\dots5} - \dots\right).$$

Сравнивая эту формулу съ формулами (291) и (292):

$$\sin x + x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \ldots\ldots\ldots \quad (291)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots\ldots \quad (292)$$

получимъ:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x.$$

Слѣдовательно:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x.$$

Изъ послѣднихъ двухъ формулъ получимъ:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

— замѣчательныя соотношенія между тригонометрическими и показательными функціями.

Изъ выведенныхъ въ этомъ добавленіи формулъ:

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$

видно, что

$$x + iy = r\,e^{i\varphi}.$$

Замѣчательно, что теорія мнимаго перемѣннаго удивительно удобно прилагается къ изученію движенія жидкости. Такимъ методомъ воспользовался впервые Кирхгоффъ. Профессоръ Н. Е. Жуковскій развилъ эту теорію въ своей книгѣ «Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа для опредѣленія движенія жидкости» до такой степени, что получилъ возможность теоретически опредѣлять нѣкоторыя величины необходимыя въ теоріи водяныхъ колесъ и турбинъ, которыя до Жуковскаго опредѣлялись только опытнымъ путемъ.

Добавленіе II-е.

О вихревомъ движеніи.

Изученіе уравненій гидродинамики привели Гельмгольтца къ замѣчательной теоріи вихревыхъ движеній.

Движенія жидкости бываютъ двоякаго рода: 1) можетъ существовать такая функція, называемая *потенціаломъ скоростей*, производныя отъ которой по x, y, z равны проложеніямъ скоростей; 2) можетъ происходить такое движеніе, для котораго не имѣется потенціала скоростей.

Въ послѣднемъ случаѣ, то есть въ отсутствіи существованія потенціала скоростей, частицы жидкости вращаются и при томъ такъ, что оси вращенія сосѣднихъ частицъ располагаются по нѣкоторымъ подвижнымъ кривымъ, такъ что каждая частица, расположенная на такой кривой, называемой *вихревою нитью*, вращается около элемента вихревой нити. Чрезъ каждую точку жидкости проходитъ какая нибудь вихревая нить. Возьмемъ внутри жидкости безконечно малую площадь, ограниченную какимъ нибудь контуромъ (линіею), и отберемъ всѣ вихревыя нити, проходящія чрезъ точки этого контура. Получимъ совокупность вихревыхъ линій, называемую *вихревою трубкою*. Относительно этихъ вихревыхъ нитей и трубокъ Гельмгольтцъ установилъ слѣдующія теоремы:

I. Вихревая нить состоитъ во все время движенія изъ однихъ и тѣхъ же точекъ жидкости.

II. Произведеніе площади поперечнаго сѣченія вихревой трубки на скорость вращенія не мѣняется съ теченіемъ времени.

III. Это произведеніе имѣетъ одну и ту же величину по всей трубкѣ.

Вихревая трубка не можетъ прерваться внутри жидкости, гдѣ она можетъ только загибаться въ вихревыя кольца. Вихревая трубка оказывается неразрушимою.

Добавленіе III-е.

Система принятыхъ теперь въ Наукѣ единицъ.

Теперь принята слѣдующая система единицъ. Основными единицами признаются 1 сантиметръ, 1 граммъ, 1 секунда.

Принимаютъ:

за единицу скорости — скорость точки, проходящей 1 сантиметръ въ секунду;

за единицу массы — массу, содержащуюся въ одномъ граммѣ вещества;

за единицу ускоренія — ускореніе въ такомъ движеніи, въ которомъ въ одну секунду скорость увеличивается на 1 сантиметръ въ секунду;

за единицу силы — *динъ* — такую силу, подъ вліяніемъ которой масса 1 граммъ пріобрѣтаетъ единицу ускоренія, то есть его скорость увеличивается на 1 сантиметръ въ секунду.

Въ этой системѣ сила, равная вѣсу 1-го грамма, равна 981 дину.

Уравненіе (676)

$$\text{масса} = \frac{\text{вѣсу}}{g}$$

понимается такъ:

$$\text{масса 1-го грамма} = 1 \text{ gr} = \frac{981 \text{ (дину)}}{981 \text{ (сантиметръ)}} = \frac{981}{981} = 1$$

$$\text{масса 5 граммовъ} = 5 \text{ gr} = \frac{981.5 \text{ (динъ)}}{981 \text{ (сантиметръ)}} = \frac{981.5}{981} = 5.$$

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

(№№ означаютъ параграфы).

А.

Абель, 441, 444, 467.
Абсцисса 2.
Алексѣевъ 465.
Амплитуда 399.
Анализъ 115—340, 443—447, 465.
Ангармоническое отношеніе 451.
Аналитическая геометрія 1—114, 450, 472.
Андреевъ 472.
Анисимовъ 465.
Антикластическая точка 338.
Аполлоній 203, 206.
Аппель 466, 482.
Аристотель 343.
Архимедова спираль 217, 284.
arsin x 137, 444.
arcos x 138, 444, 255.
artg x 139, 255.
Ассимптоты 45, 47, 60, 213.

Б.

Бахъ 485, 486.
Безконечно малыя 115. 123, 124.
Беллавитисъ 477.
Бельтрами 338, 475.
Бернулли 220, 438.
Бертранъ 465.
Бирманъ 466.
Бобылевъ 482.
Брессъ 485.
Бріо 467, 472.
Брюнновъ 471, 491.
Бугаевъ 440, 462.
Буке 467, 472,
Букрѣевъ 480.
Буняковскій 481.
Буркхардтъ 439, 466.
Бурместеръ 487.
Буръ 482.

В.

Варьяціонное исчисленіе 446, 469.
Ващенко-Захарченко 463, 469, 472.
Веберъ 463.
Векторъ 73.
Вейерштрассъ 466, 467.
Веретенообразныя поверхности 338.
Вершина эллипса 33, 63.
— гиперболы 46, 63.
— параболы 63.
Винтовая косая поверхновть 246.
Винтовая линія 244.
Винтовая развертывающаяся поверхность 245, 323.
Винтовъ теорія 458.
Вогнутость 179.
Возможныя перемѣщенія 383, 397.
Всемірное притяженіе 372, 411.
Выпуклость 179.
Вѣроятностей (теорія) 456, 481.

Г.

Галилей 345.
Галуа 441.
Гальфенъ 467.
Гамильтонъ 453, 457, 478.
Гауссъ 336, 426, 462, 475.
Гельмгольтцъ 475, 482.
Геометрія аналитическая 1—114, 450, 472.
— высшая 451, 474.
— Лобачевскаго 452, 475.
— начертательная 454, 479.
— неевклидова 452, 475.
— положенія 451, 473.

— проэктивная 451.
— Римана 452, 475.
Гейне 468.
Гидравлика 438, 459, 486.
Гидродинамика 435—438, 482. Добавленіе II.
Гидростатика 430—434.
Гирнъ 488.
Гипербола 42—47, 55, 60, 62, 63, 114, 212—214, 273.
Гиперболоиды 100—105.
Гиперболическій параболоидъ 110.
Гиперболическая спираль 221.
Гипоциклоида 232.
Главная нормаль 243.
Главныя сѣченія 332, 333.
Гномоника 454.
Головъ 488.
Горловой кругъ 100.
Граве 472.
Гравеліусъ 482.
Грассманъ 477.
Графическак статика 459, 484.
Гринъ 429.
Группы 441, 447, 470.
Гурза 465, 466.
Гуэль 465, 478.

Д.

Д'Аламберъ 378.
Дарбу 480.
Депейру 482.
Детерминантъ 441.
Директриса 48.
Дифференціалъ 125.
— дуги 181, 182, 190.
— полный 152, 302.
— площади 252.
— сектора 275, 276.
Дифференціальная геометрія 455, 480.
Дифференціальное исчисленіе 115—246.
Дифференціальныя уравненія 297—314.
Дискриминантъ 62.
Діаметры эллипса 31.
— сопряженные 37, 202—206.
Длина полуокружности 230.
— — архимедовой спирали 284.
— параболы 281.
— циклоиды 280.
— эллипса 282.
Долгота 83.
Дюреге 466.

Е.

е 145, 160, 255.
Евклидъ 452.
Евневичъ 486, 489.
Ермаковъ 477, 481.
Ермитъ 465.

Ж.

Живая сила 355,356, 360, 390.
Животные двигатели 459.
Жорданъ 465.
Жуковскій 482, Добавленіе I.
Жуберъ 490.

З.

Законъ большихъ чиселъ 456.
— всемірнаго тяготѣнія 372, 411.
— площадей 368, 371, 395, 396.
— сохраненія движенія центра инерціи 389.
— сохраненія живой силы 360, 390.
— сохраненія энергіи 361, 394.
Законы Ньютона 345.
Закономѣрныя кривыя 8, 9.
Замѣна перемѣннаго 156.

И.

Индикатриса 330.
Импульсъ 373, 374.
Имшенецкій 465.
Интегралъ 247—255.
Интегралъ живой силы 392.
Инегрированіе по частямъ 256.
— бинома 266.
— дробей 259—262.
— дифференціальныхъ уравненій 297—314.
— подстановкою 257.
— радикаловъ 263—265.
— трансцендентныхъ функцій 267—269.
Интегрируемость 302.
Интегрирующій множитель 303, 304.

I.

Iорданъ 491.

К.

Катаніе 222, 232.
Касательныя 117, 173, 201, 207, 208, 212, 215, 218, 224, 234.
Касательная плоскость 238.
Кватерніоны 453, 478.
Кеплеръ 372.
Кетлэ 481.
Кинематика 410.
Кинетика 410.
Кинетическая энергія 361, 394.
Кирпичевъ 485.
Кирхгоффъ 482, 483, 490.
Клаузіусъ 490.
Клейнъ 447, 466. 467, 475.
Количество движенія 357, 374.
Коллиньонъ 482, 485.
Комбинаціи 441.

Комплексное перемѣнное — Добавленіе I.
Комплексъ Плюккеровскій 450.
Кöнигсъ 472.
Коническія поверхности 111, 319, 320.
— сѣченія 62, 114.
Коноидальныя поверхности 321.
Координаты 2, 3, 4, 51—53, 56—59, 61, 67, 83, 84, 450.
Коркинъ 465.
Косоугольныя координаты 61.
Косыя поверхности 102, 324.
Котельниковъ 478.
Кривизна 185, 331, 335.
— поверхностей 336—339.
Кривыя 2-го порядка 28—50, 54, 55, 60, 62, 63, 114, 201—216, 271—273, 281, 282.
— циклоида 222—229, 274, 280.
— огибающія 184.
— рулетты 222—232.
— спирали 217—221, 284.
Кругъ кривизны 185.
Круговыя функціи 137, 138, 139, 404.

Л.

Лагранжъ 343, 382, 383, 384, 385, 398, 482.
Лагурнери 479.
Ламе 483.
Лапласъ 417, 481, 491.
Леви 484.
Лежандръ 462.
Леженъ-Дирикле 462.
Лезанъ 478.
Лемниската—задача 179.
Лейбницъ 115.
Ли Софусъ 447, 465, 470, 475.
Линейныя преобразованія 441, 463.
— уравненія 307—310.
Линейчатыя поверхности 102, 324, 450.
Линіи геодезическія 340.
— кривизны 335.
Лобачевскій 452, 475.
Логариѳмъ 148, 164.
Логариѳмированіе 150.
Логариѳмическая спираль 218—220.
Лоранъ 465.
Лучъ проэктирующій 451.
Лѣтниковъ 469.

М.

Майеръ 394.
Макаровъ 479.
Максимумы 170—172.
Макъ-Лоренъ 159, 165.
Марковъ 464.
Машины 459.
Максвель, 468, 490.
Маскаръ 490.
Матьё 490.
Маятникъ 399, 405, 407.
Мере 465.
Мейеръ 439, 490.
Мейснеръ 486.
Механизмы 459, 487.
Млодзѣевскій 476.
Мнимыя величины 443. 466, добав. II.
— полуоси 46.
Могообразіе 452.
Мöбіусъ 477.
Модель 102.
Молькъ 467.
Моментъ инерціи 401—405.
Монжъ 454, 479, 480.
Мощность 393.
Мюллеръ-Бреслау 485.

Н.

Наблюденіе 343.
Наибольшія 170—172.
Наименьшія 170—172
Направленіе касательной 117.
— нормали 240.
— прямой 85.
— элемента кривой 181.
Направляющія 316.
Начало возможныхъ перемѣщеній 397.
— Д'Аламбера 378.
— координатъ 3, 57, 67.
— сохраненія движенія центра инерціи 389.
— живой силы 360, 390.
— площадей 368, 371, 395, 396.
— энергіи 361, 394.
Начертательная геометрія 454, 479.
Небесная механика 342, 491.
Независимое перемѣнное 65.
Неизмѣняемая плоскость 396.
Некрасовъ 465.
Нейманъ 490.
Неопредѣленныя выраженія 167—169.
Непрерывность 115.
Неявныя функціи 65, 154.
Нормаль 174, 177, 224, 239, 240, 241.
Нормальная плоскость 236.
Нормальныя сѣченія 331, 332.
Ньютонъ 115, 344, 345, 411, 482.

О.

Образованіе поверхностей 315—328.
Образующія 316.
Объемъ тѣлъ 289—292.
— эллипсоида вращенія 289.
— эллипсоида трехоснаго 290.
Огибающія кривыхъ 184.
— поверхностей 326.
Однородныя уравненія 299.
— функціи 166.
Окружность 7, 32, 230.

Оппольцеръ 491.
Определенные интегралы 251.
Оптика 460, 490.
Опытъ 343.
Ордината 3.
Ортогональныя проэкціи 454.
Оси гиперболы 46.
— гиперболоида 103.
— координатъ 3, 13, 67.
Оси эллипса 29, 30.
— эллипсоида 107.
Особыя точки 193—199, 338.
Особый интегралъ 306.
Остаточный членъ ряда 142.
Остроградскій 428.

П.

Парабола 48—50, 55, 62, 63, 114, 215, 216, 271, 281.
Параболоиды 108—110.
Параллельность 24, 91.
Параметры 183.
Паровая лошадь 393.
Пары силъ 458.
Паскаль 451.
Паукеръ 485.
Пенлеве 465.
Перегибъ 180.
Перемѣнное 6, 65.
Пересѣченіе линій 6.
— поверхностей 71, 107, 109, 114.
Перпендикулярность 25, 90.
Перспектива 451, 454.
Пикаръ 465, 466.
Плоскость 87—94.
— касательная 238.
— координатъ 67.
— нормальная 237.
— соприкосновенія 242.
Плюккеръ 472, 450.
Поверхность 68, 70, 100—113, 294—296, 315—328.
— вращенія 100—104, 106, 108, 289, 294, 322.
— гиперболоида 100—105.
— коническая 319, 320.
— коноидальная 321.
— линейчатая 324.
— параболоида 108—110.
— развертывающаяся 245, 323, 325, 328, 339.
— сферы 69.
— трубчатая 327.
— уровня 422, 433.
— цилиндрическая 317.
— шара 69.
Подкасательная 175.
Поднормаль 176.
Показательная функція 149.
Полный дифференціалъ 152.
Полюсъ 51.
Полярныя координаты 51—53.
Полярная ось 51, 83.
Полярный уголъ 51.
Полярныя уравненія кривыхъ 2-го порядка 55.
Покровскій 466, 467.
Порядокъ безконечно большой величины 122.
— — малой величины 123.
— касанія 189.
— кривой 66.
— уравненія 15, 66.
Порядокъ уравненія дифференціальнаго 297.
Послѣдняя сторона многоугольника 76.
Поссе 465.
Построеніе длины полуокружности 230.
— кривой по уравненію 10, 30.
— циклоиды 222, 228.
— эллипса 41.
Потенціальная энергія 361.
Потенціалъ 359, 386, 387, 416, 419.
Потокъ силовой 424.
Преобразованія (группы) 447, 470.
— линейныя 441, 463.
Признаки сходимости рядовъ 143.
Преобразованіе координатъ 52, 53, 56—59, 77—80, 84.
Притяженіе 372, 411—429.
Производная 116—121, 128—139, 151—155.
Простыя функціи 126—139.
Проэктивный лучъ 451.
Проэкціи 73—76, 295.
Псевдосферн 338.
Пуанкаре 475, 490, 491.
Пуансо 458.
Пуассонъ 418, 481, 482.
Пучекъ 451.

Р.

Работа 354, 391—393, 397.
Радіусы векторы 29, 51, 83.
Радіусъ кривизны 185, 186, 192, 209, 214, 217, 219, 225, 243, 331—339.
Равносторонняя гипербола 60.
Развертки 187, 188, 211, 214, 220, 227.
Развертывающія 187, 188.
Развертывающіяся поверхности 245, 323, 325, 328, 339.
Разстояніе между 2-мя точками 20, 81, 82.
— точки отъ плоскости 93, 94.
— точки отъ прямой 26, 27.
— точки эллипса и гиперболы отъ фокуса 54.
Растянутая циклоида 229.
— гипо- и эпициклоида 232.
Раціональная механика 342.
Раутъ 482.
Рейе 473.

Риманъ 466, 475—476, 490.
Рёло 487.
Рёссель 452, 475.
Рощинъ 465.
Рулетты 231.
Рычагъ 397.
Рэлей 490.
Ряды 142, 157—165.

С.

Савичъ 491.
Салмонъ 463, 472.
Связи 381.
Сенъ-Венанъ 483.
Сенъ-Жерменъ 482.
Секторъ 275—278.
Серре 463. 465.
Сжатая эпи- и гипоциклоида 229, 232.
Сила 351, 370, 420.
Силовыя линіи 421.
Силовой потокъ 425.
Силовыя трубки 424, 247.
Симпсонъ 288.
Синкластическія точки 338.
Система точекъ 362.
Скорость 347, 350, 363, 369.
Слудскій 482.
Смежности (уголъ) 185.
Сомовъ 482.
Соприкосновенія (плоскость) 242.
Сопротивленіе матеріаловъ 459, 485.
Сопряженные діаметры 37, 202—206.
Софусъ-Ли 447. 465, 470, 475.
Спирали 217—221. 284.
Спирали 217—221, 284.
Статика 410.
Сфера 69
Сферическія координаты 83, 84.
— астрономія 461, 491.
Сферическая тригонометрія 449.
Сферическія функціи 445, 468.
Сходимость 143.

Т.

Тайлоръ 157, 158, 165.
Таннери 467.
Теоретическая механика 342.
Теорія вѣроятностей 456, 481.
— конечныхъ разностей 442, 464.
— механизмовъ 459, 487, 489.
— мнимаго перемѣннаго—Добав. II.
— чиселъ 440, 462.
Теорема Аполлонія 203, 206.
— Бернулли 438.
— Бріаншона 451.
— о безконечно малыхъ 124.
— Грина 429.
— о количествѣ движенія 374.
— Остроградскаго 428.
Термодинамика 460, 490.
Тиме 486, 488.
Тихомандрицкій 463.
Томсонъ (Лордъ Кэльвинъ) 468, 482, 483.
Точка антикластическая 338.
— возврата 193, 194, 199.
— кратная 193, 197, 199.
— остановки 193, 195, 199.
— отдѣльная 193, 198, 199.
— перегиба 180.
— пересѣченія линій 6.
— синкластическая 338.
— угловая 193, 196, 199.
Торъ 327.
Тотгёнтеръ 463, 465.
Трансцендентныя функціи 126.
Трохоиды 232.
Трубки силовыя 424, 427.
Трубчатыя поверхности 327.
Тэтъ 468, 482, 483.

У.

Углы наклоненія нормали 240.
— — прямой 85.
—, составляемые плоскостями 89.
—, — прямыми 23, 86, 99.
Уголъ радіуса вектора съ касательною 191.
— смежности 185.
Уравненіе алгебраическое *m*-ой степени—введеніе.
— опредѣляетъ линію 6.
— опредѣляетъ поверхность 68.
— 1-го порядка опредѣляетъ прямую 16.
— 1-го порядка опредѣляетъ плоскость 88.
— дифференціальныя 297—314.
— съ частными производными 311—314.
Условіе интегрируемости 302.
— несжимаемости 436.
— параллельности 24, 91.
— перпендикулярности 25, 86, 90.
Ускореніе 348, 349, 350, 364.
Установившееся движеніе 437.

Ф.

Фокальное разстояніе 34.
Фокусы 28, 42, 48.
Функціи 65, 115, 126.
Фурье 490.

Ц.

Центральное движеніе 367—372
Центръ инерціи 388, 389.
— каченія 406.
— тяжести 389.
Циклоида 222—230, 274, 280.
Циклоидальный маятникъ 407.
Цилиндрическія поверхности 70, 72 317, 318.

Цилиндроидъ 458.
Цейнеръ 488.
Цингеръ 491.

Ч.

Частныя производныя 151.
Чебышевъ 462.
Чиселъ (теорія) 440, 462.

Ш.

Шаль 474.
Шелль 482.
Шиллеръ 490.
Широта 83.
Шиффъ 465.
Шлöмильхъ 465.
Штейнеръ 474.
Штурмъ 465.

Э.

Эксцентриситетъ 35.
Элементарная работа 391, 397.
Элементарный импульсъ 373.
Элементъ кривой 181, 182, 235.
Эллипсоиды 106, 107. 289, 290.
Эллипсъ 28—41, 54. 55, 62, 63, 114, 201—211, 272, 282.
Эллиптическія функціи 444, 467.
Энергія 361, 394.
Энциклоиды 232.
Эффектъ 393.

Я.

Явныя функціи 65.
Якоби 457, 465, 467, 482.

